BIBLIOTECA DE MATEMATICĂ

Gheorghe ANDREI Constantin CARAGEA

PARTEA ÎNTREAGĂ [x]

{x} PARTEA FRACȚIONARĂ

$$x=[x]+\{x\}$$

Volumul 2

Editura Paralela 45

Scanned with OKEN Scanner

Redactare: Olimpia Filip, Andreea Cîrstea
Tehnoredactare: Ovidiu Mictar
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ANDREI, GHEORGHE
Partea întreagă [x] : partea fracţionară {x} / Gheorghe Andrei, Constantin Caragea ; pref. de Radu Gologan. - Piteşti : Paralela 45, 2018
2 vol.
ISBN 978-973-47-2693-6
Vol. 2 : x=[x]+{x}. - 2018. - Conţine bibliografie. - ISBN 978-973-47-2695-0

I. Caragea, Constantin
II. Gologan, Radu N. (pref.)

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2018
Prezenta lucrare foloseşte denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conţinutul este protejat de legislaţia privind dreptul de proprietate intelectuală.

Scanned with OKEN Scanner

Gheorghe ANDREI Constantin CARAGEA

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA ÎNTREAGĂ $[x]$
PARTEA FRACŢIONARĂ $\{x\}$
$x = [x] + \{x\}$

VOLUMUL II

Editura Paralela 45

CUPRINS

		Enunțuri	Soluții
Prefață		7	
Introducere		9	
Capitolul XIII	Elemente de aritmetică	11-17	18-40
Capitolul XIV	Sume	41-57	58-110
Capitolul XV	Inegalități	111-118	119-150
Capitolul XVI	Șiruri	151-169	170-222
Capitolul XVII	Funcții	223-238	239-302
Capitolul XVIII	Probleme diverse	303-312	313-349
Capitolul XIX	Paragrafe speciale	350-410	
Bibliografie		411	

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

De-a lungul a aproape jumătate de secol, profesorii constănțeni Gheorghe Andrei şi Constantin Caragea au şlefuit matematic minţile a mii de foşti elevi, nu neapărat atunci avizi de matematică, dar azi intelectuali de vază, unii dintre ei făcând cinste României pe multe continente. Alţii sunt în prezent matematicieni renumiţi, ce duc mai departe faima şcolii româneşti de matematică.

Profesorii Andrei şi Caragea sunt renumiţi azi şi prin numărul însemnat de culegeri de probleme apărute în ultimii patruzeci de ani, dar şi prin problemele propuse la toate etapele olimpiadelor româneşti.

Culegerea de faţă este dedicată unui subiect important în toate domeniile matematicii: partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr. De această noţiune sunt legate importante probleme, unele încă deschise, din teoria numerelor, algebră, analiză matematică. De exemplu, chestiunile legate de ordinul de aproximare a unui număr iraţional cu un număr raţional conţin încă multe probleme deschise.

Cele nouăsprezece capitole ale cărţii fac o trecere prin toate domeniile matematicii unde apare noţiunea de parte întreagă sau parte fracţionară. Acestea conţin peste 1700 de probleme, prezentate gradat şi având, în fiecare capitol, un preambul teoretic complet.

O recomand cu mare căldură elevilor care nu neglijează matematica, dar, în primul rând, profesorilor de matematică din gimnaziu şi liceu. Vor găsi suficient material spre a delecta minţile deschise ale copiilor.

Radu Gologan

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

Cartea este o adevărată megaculegere de probleme care se adresează elevilor și profesorilor pasionați de matematică, în dorința de a obține performanțe sporite.

Ea are rolul de a ușura activitatea de căutare și selectare a problemelor cu partea întreagă și partea fracționară din diferite culegeri și publicații de matematică, întrucât această megaculegere este destul de cuprinzătoare. Ea reprezintă un izvor și un stimulator de abordare creatoare a altor probleme pe această temă.

Cu această ocazie aducem mulțumiri și felicitări tuturor autorilor multor probleme deosebite și fără de care cartea ar fi fost mai săracă și incompletă.

Au fost multe situații care ne-au pus „probleme" în găsirea soluțiilor, dar au fost și probleme asemănătoare propuse însă de „autori" diferiți. (Ne cerem anticipat scuze dacă am omis unii autori de probleme.)

Această carte este centrată pe un singur capitol de matematică: ***Partea întreagă și partea fracționară***, temă aproape inexistentă acum 30-40 de ani și mult mai frecventă în ultimii 15-20 de ani, atât în manuale, culegeri de probleme, reviste de specialitate, cât și în concursurile școlare. Prin cantitatea și varietatea problemelor și mai ales prin abordarea diferențiată a temelor cuprinse în cele 19 capitole, cartea reprezintă o adevărată enciclopedie a acestei teme.

Lucrarea acoperă un gol bibliografic, deoarece până acum elevii și profesorii nu aveau la îndemână un astfel de vast material de studiu.

Prima carte pe această temă a apărut la noi în țară în anul 1996, la Editura GIL, autori fiind Gheorghe Andrei, Ion Cucurezeanu și Constantin Caragea, și anume, *Probleme de algebră – gimnaziu și liceu. Funcțiile „partea întreagă" și „partea fracționară"*, urmată fiind de cartea regretatului profesor Mihai Onucu Drîmbe, *200 de identități și inegalități cu „partea întreagă"*, Editura GIL, 2003.

Prin multele probleme de nivel ridicat, prezenta culegere poate sta la baza formării competențelor sporite în acest domeniu. Ea ar trebui să se afle la oricare centru de excelență, în orice școală unde se pregătesc olimpici și chiar în posesia oricărui elev capabil și doritor de performanță.

În fiecare capitol există o ierarhizare a problemelor, în funcție de gradul de dificultate, și anume: „probleme elementare", nemarcate, probleme

Scanned with OKEN Scanner

mai dificile, cu o steluță, iar cele foarte dificile, cu două sau trei steluțe. Desigur, problemele de nivel standard, nemarcate, pot fi considerate ca „repere" necesare abordării celor mai dificile dintre ele.

Chiar dacă unele probleme sunt asemănătoare sau îmbracă o „haină mai veche", ele au fost totuși puse cu respectul cuvenit istoriei lor și care confirmă progresul abordărilor pe această temă în ultimii 20-30 de ani.

Sunt destule probleme care apar în unul sau două capitole, deoarece ele pot fi încadrate tematic în aceste capitole. În cadrul aceleiași teme, megaculegerea cuprinde 19 capitole diferențiate pe anumite subteme. Vom enumera câteva: Cap. I – Proprietăți, Cap. II – Aplicaţii de bază, completat cu Cap. V – Partea întreagă şi partea fracţionară a unor expresii cu radicali şi Cap. VI – Egalităţi şi identităţi, Cap. XV – Inegalități, Cap. VIII, IX, X – Ecuații, ecuații cu parametri, respectiv ecuații cu mai multe necunoscute, Cap. XII – Sisteme, Cap. XIII – Elemente de aritmetică, Cap. XIV – Sume, Cap. XVI și XVII – Șiruri, respectiv funcții, care conțin probleme ce aduc o completare a capitolelor respective din clasele a IX-a, a X-a și a XI-a. Capitolul XIX – Paragrafe speciale cuprinde chiar câteva paragrafe speciale care pun în evidență o gamă largă de aplicabilitate a funcției „partea întreagă" și „partea fracționară": funcția de rotunjire, funcția lui Legendre cu aplicații, funcțiile $\tau(n), \sigma(n), \varphi(n)$ (cu notațiile consacrate), spectrul unui număr, puncte laticiale etc.

Megaculegerea conține peste 1700 de probleme și proprietăți importante cu aplicativitate imediată la alte probleme. Pentru ca această carte să fie accesibilă unui număr mai mare de elevi și profesori, soluțiile sunt destul de detaliate, iar multe dintre probleme au câte două sau trei soluţii.

Pentru alcătuirea acestei culegeri de probleme, s-a depus o muncă susținută pe parcursul mai multor ani, consultându-se un uriaș material bibliografic, iar ca urmare, autorii înșiși și-au sporit competențele în acest domeniu.

Așteptăm soluții deosebite sau abordări interesante, precum și noi probleme pe această temă, ce vor fi cuprinse într-o viitoare ediție (e-mail: profandreigheorghe@gmail.com).

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 13 Elemente de aritmetică

§ 1.

1*. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine:

a) $\left[\sqrt{n^2+n}\right]$;

b) Prima zecimală a numărului $\sqrt{n^2+n}$;

c) Să se determine ultima cifră a numărului $\left[10 \cdot \sqrt{n^2+n}\right]$.

2. Arătaţi că pentru $n \geq 5$ numărul a_n, egal cu partea fracţionară a numărului $\sqrt{n^2+2n}$, are prima zecimală 9.

Există n pentru care a_n are primele 2011 zecimale egale cu 9?

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine prima zecimală a şirului $a_n = \sqrt{n^2+n}$;

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care prima zecimală a numărului $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ este 2;

c) Determinaţi prima zecimală de ordinul 1 a şirului $c_n = \sqrt{4n^2+n}$.

4. Determinaţi toate numerele naturale $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care a doua zecimală a numărului $\left\{\sqrt{n(n+1)}\right\}$ nu este 9.

5. Determinaţi cel mai mic număr natural pentru care primele două zecimale ale numărului $\sqrt{n^2+4n+1}$ sunt egale cu 9.

6.** Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care numărul:

$$A = \left[\frac{n^3+8n^2+1}{3n}\right] \text{ este prim.}$$

7.** Să se determine cel mai mic număr natural pentru care

$$0{,}7 < \left\{\sqrt[3]{n}\right\} < 0{,}(7).$$

8.** Descrieţi forma numerelor naturale n pentru care $1 + \left[\sqrt{2n}\right]$ divide pe $2n$.

9.** Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care partea întreagă a numărului $\sqrt{n+1+\sqrt{n}}$ este diferită de partea întreagă a numărului $\sqrt{n+\sqrt{n+1}}$.

10.** Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\left[n\sqrt{2}\right] = \left[n\sqrt{3}\right]$.

11.** Să se arate că nu există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left\{2^m\sqrt{5}\right\} = \left\{3^n\sqrt{5}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

12. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$, numărul $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ este compus.

13*. Determinați numerele naturale n care satisfac simultan proprietățile:

a) $\left[\frac{n}{9}\right]$ este număr natural de trei cifre egale;

b) $\left[\frac{n+36}{4}\right]$ este un număr natural de patru cifre, cifrele fiind $\{2,0,0,9\}$.

14. Să se determine $a > 0$ știind că $a^2 + 2[a]$ să fie pătrat perfect.

15. Să se arate că $a_n = \left[\frac{n+3}{4}\right] + \left[\frac{n+5}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + n^2 + 3n + 3$ este pătrat perfect, pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

16.** Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care:

a) $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ este număr prim;

b) Să se detemine cel mai mare $n \in \mathbb{N}$, pentru care $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ este număr prim.

17.** Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$ și $\left[\frac{2^n}{n}\right]$ este o putere a lui 2, atunci n este o putere a lui 2.

18*.** Fie $a, n \in \mathbb{N}^*$ cu $a < \sqrt{2n}$. Să se arate că numărul $\left[\frac{n^2}{a^2}\right]$ este pătrat perfect, dacă și numai dacă n se divide cu a.

19.** Fie $a, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left\{\sqrt{n+\sqrt{n}}\right\} = \{\sqrt{a}\}$. Arătați că $4a+1$ este pătrat perfect.

20. Fie p un număr prim, $p \geq 3$ și d un număr liber de pătrate.

Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea: $\left\{n\sqrt{d} + \frac{n}{p}\right\} = \{n\sqrt{d}\}$?

21.** Să se arate că: $\left[a\left[\frac{n+a^2}{a}\right] + a\right] = n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, unde $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

22.** Fie $a \in \mathbb{R}_+^*$, numărul de aur, adică soluția pozitivă a ecuației

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

(Ecuația caracteristică a șirului lui Fibonnaci)

Să se arate că $[a^2 n] \equiv [a[an]] + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

23**. Fie $a, b, a > b$ rădăcinile ecuației: $x^2 - x - 1 = 0$ și $\sigma_n = a^n + b^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că: $[a\sigma_n] = \begin{cases} \sigma_{n+1}, & \text{dacă } n \text{ par} \\ \sigma_{n+1} - 1, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}$

24**. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a > b$ rădăcinile ecuației $2x^2 - 2x - 1 = 0$. Să se arate că: $[b^n\sqrt{3}] = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ -1, & n \text{ impar} \end{cases}$

25**. Fie $a \in \mathbb{N}^*$ și $E(a) = \{\sqrt{a}\} + \{\sqrt{a}\}^2 + \{\sqrt{a}\}^3$. Să se demonstreze că $E(a)$ este rațional dacă și numai dacă a este pătrat perfect.

26. Să se arate că numărul natural $n \geq 1$ este pătrat perfect dacă și numai dacă $[\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1}] = 1$.

27. Să se arate că $[\sqrt{n}] = [\sqrt{n+1}]$ dacă și numai dacă $n + 1$ nu este pătrat perfect.

28. Pentru $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $s(n)$ numărul de reprezentări distincte ale lui n ca sumă de două numere naturale ($n = a + b$ și $n = b + a$ constituie aceeași reprezentare). Să se arate că:

a) $s(m+n) = s(m) + s(n) - \frac{1}{2}(1 + (-1)^{mn}]$;

b) $\sum_{k=0}^{n} s(k) = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

29. Fie a și b două numere reale pozitive, care nu sunt pătrate perfecte, $a < b$. Atunci numărul pătratelor perfecte situate între a și b este:

$$[\sqrt{b}] - [\sqrt{a}].$$

30*. Fie a și b două numere întregi, care nu sunt cuburi perfecte. Atunci numărul cuburilor perfecte situate între a și b este: $[\sqrt[3]{b}] - [\sqrt[3]{a}]$.

31. Să se determine numărul natural n, astfel încât expresia: $n + 4^{[\sqrt{n}]} + 3$ să fie pătrat perfect.

32**. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, între n și $2n$ există un pătrat perfect.

33***. Determinați numerele naturale nenule, care nu sunt pătrate perfecte și pentru care $[\sqrt{n}]^3$ divide n^2.

34. Fie p un număr natural prim și k un număr natural dat. În câte moduri se poate scrie p^k sub formă de diferență a două pătrate perfecte?

35. Să se determine numărul $\overline{abcd}$ știind că:

$$[\sqrt{\overline{ca}}] + [\sqrt{\overline{cb}}] + [\sqrt{\overline{cc}}] + [\sqrt{\overline{cd}}] = \sqrt{\overline{abcd}}.$$

36. Determinați numerele $\overline{abc}$ știind că: $[\sqrt{\overline{bca}}] = 2[\sqrt{\overline{abc}}]$.

Scanned with OKEN Scanner

37. Să se determine numerele $\overline{abc}$ știind că:

a) $\left[\sqrt{\overline{abc}}\right] = 11 = a + b + c$;

b) $\left[\sqrt{\overline{abc}}\right] = 21$ și $a + b + c = 15$.

38. Determinați $\overline{ab}$ dacă $\left[\overline{a,b^3}\right] = \overline{a,b}$.

39. Determinați cifrele a, b distincte, nenule știind că:

$$\left[\sqrt{\overline{abb}}\right] + \left[\sqrt{\overline{bba}}\right] + \left[\sqrt{\overline{bab}}\right] = a + \overline{bb}.$$

§ 2.

40. Numărul numerelor $p \in \{1,2,3, \dots, n\}$ care se divid la numărul $1 \leq k \leq n$ este egal cu $\left[\frac{n}{k}\right]$.

41. Câte numere naturale există printre numerele $\frac{1m}{n}, \frac{2m}{n}, \frac{3m}{n}, \dots, \frac{pm}{n}$, unde $m, n, p \in \mathbb{N}^*$?

42. În câte zerouri se termină 400! ?

43. Să se determine exponentul lui 108 în 253! .

44. Să se determine valoarea numitorului fracției după simplificare:

$$N = \frac{100!}{6^{100}}.$$

45. Să se determine exponentul α al numărului prim p în $(p^n)!, (n \in \mathbb{N}^*)$.

46.** Să se determine în câte zerouri se termină $p!$, unde

$$p = \frac{5^n - 1}{4}, (n \in \mathbb{N}^*).$$

47.** Să se arate că oricare ar fi numărul natural $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, numărul $n!$ nu se divide la 2^n.

48.** Să se determine $\left[\frac{10^{2017}}{S_{2014}}\right]$, unde: $S_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ ori}}$.

49*. Să se determine ultima cifră a numărului $\left[\frac{10^{93}}{10^{31} + 3}\right] = [A]$.

50.** Factorialul căror numere se termină exact în 1000 de zerouri?

51.** a) Să se arate că $\{\varphi\} = \frac{1}{\varphi}, \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$;

b) Să se calculeze $\left\{\frac{99^{99}}{1 - 99^9}\right\}, \left[\frac{99^{99}}{1 - 99^9}\right]$.

52.** Să se determine ultima cifră a numărului $A = \left[\frac{10^{20000}}{10^{100} + 3}\right]$.

53.** Să se determine exponentul lui 2 în descompunerea în factori a numărului: $A_n = (n + 1)(n + 2) \dots (2n)$.

Scanned with OKEN Scanner

54**. Fie $a = \sqrt{111\ldots11\ldots}$ (de 1998 ori). Să se determine:

a) $[a]$;

b) a mia zecimală a numărului.

55**. Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ astfel încât $[\sqrt[n]{111}]$ să dividă numărul 111.

56*. Fie $a = \{\sqrt{123456789}\}$. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$, știind că $\frac{1}{n+1} < a < \frac{1}{n}$.

57*. Să se determine $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ astfel încât $[\sqrt[n]{53}]$ să dividă pe 35.

58. Arătați că 1997! se divide la 19^{97} și nu se divide la 19^{111}.

59*. Să se arate că $\{\sqrt{333\ldots3}\} \neq \{\sqrt{22\ldots2}\}$ unde numerele de sub semnul radical au același număr de cifre.

60*. Determinați numerele naturale n pentru care:

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right\} = 0{,}08(3).$$

61. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $[1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}] = n$.

62. Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$ și $E_{n,k} = n!\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+k)!}\right)$.

Să se arate că:

a) $E_{n,k} \notin \mathbb{N}^*$;

b) Să se calculeze $[E_{n,k}]$.

63***. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

a) $\frac{[n!\,e] - 1}{n} \in \mathbb{N}$;

b) $\frac{[n \cdot n!\,e] - n}{n^2} \in \mathbb{N}$.

64*. Care este cel mai mic număr natural n, pentru care numerele reale $\sqrt{n}$ și $\sqrt{n+9}$ au aceeași parte întreagă?

65**. Să se determine numerele naturale n cu proprietatea că $[\sqrt{n}]$ divide pe n.

66***. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, ce valoare poate avea $a_n = \left[\sqrt{\sqrt{n}[n\sqrt{n}]}\right]$?

67**. Fie $p > 2$ număr prim. Determinați numerele naturale n, pentru care $\{\sqrt{n}\} = \{\sqrt{n+p}\}$.

68**. Să se compare mediile aritmetice ale mulțimilor de numere:

$$\left\{\left[\frac{2012}{1}\right], \left[\frac{2012}{2}\right], \ldots, \left[\frac{2012}{2012}\right]\right\} \text{ și } \left\{\left[\frac{2013}{1}\right], \left[\frac{2013}{2}\right], \ldots \left[\frac{2013}{2013}\right]\right\}.$$

69**. Determinați numerele naturale n pentru care: $\{\sqrt{m}\} = \{\sqrt{m+2011}\}$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 3.

70***. Să se arate că orice interval $(a,b) \subset [0,1]$ conține o infinitate de numere $\{\sqrt{n}\}$.

71***. Fie $p,q \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq q \leq p$ și $a = \left(\sqrt{p^2+q}+p\right)^2$.
Să se arate că a este irațional și $\{a\} < \frac{3}{4}$.

72**. Să se arate că dacă $m,n \in \mathbb{N}^*$ și

$$\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots,\frac{1}{n}\right\} = \left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots,\frac{1}{m}\right\}, \text{ atunci } m = n.$$

73***. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că numerele:

$$[\sqrt{n}] \text{ și } \left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right] \text{ au aceeași paritate.}$$

74**. Să se exprime $[\sqrt{n+1}]$ în funcție de $[\sqrt{n}]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

75***. Fie $a > 0$ și $b > a$ numere naturale, care nu sunt pătrate perfecte. Cât trebuie să fie b pentru ca între a și b să avem același număr de pătrate perfecte ca și între 0 și a $(0 < p^2 < a)$?

76***. O pereche de numere naturale consecutive $n, n+1$ se numește *adaptată*, dacă: $[(n+1)\sqrt{3}] - [n\sqrt{3}] = 1$. Care este probabilitatea ca două numere naturale consecutive, alese la întâmplare, să fie *adaptate*?

77***. a) Un pătrat perfect are cifra zecilor impară dacă și numai dacă cifra unităților rădăcinii lui pătrate este 4 sau 6.

b) Un pătrat perfect are cifra zecilor impară dacă și numai dacă cifra unităților lui este 6.

78**. Pentru orice număr natural nenul n notăm cu x_n numărul numerelor naturale de n cifre, divizibile cu 4, formate cu cifrele 2,0,1,6.

a) Să se calculeze x_1, x_2, x_3, x_4;

b) Să se găsească $n \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$1+\left[\frac{x_2}{x_1}\right]+\left[\frac{x_3}{x_2}\right]+\cdots,\left[\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = 2016.$$

79***. Fie $m,n \in \mathbb{N}, n \geq 5, 2 \leq m \leq n$. Să se demonstreze că $m-1$ divide pe $\left[\frac{(n-1)!}{m}\right]$.

80***. Fie n un număr natural nenul.
Să se demonstreze că cel puțin unul dintre numerele:

$$[2^n\sqrt{2}], [2^{n+1}\sqrt{2}], \ldots, [2^{2n}\sqrt{2}] \text{ este par.}$$

81***. Fie mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N}^* | [\sqrt{n+2}] = [\sqrt{n}]\}$. Să se determine card A, unde $n \leq 2013$.

82***. Aflați numerele $x \in \mathbb{R}, x > 1$ pentru care $\sqrt[n]{[x^n]}$ este întreg, $\forall\, n \geq 2$.

Scanned with OKEN Scanner

83*. Să se determine numerele naturale n pentru care există numerele naturale a, b, c astfel încât $\left[\frac{a+b}{c}\right]+\left[\frac{b+c}{a}\right]+\left[\frac{c+a}{b}\right]=n$.

84*. Exponentul numărului prim p în descompunerea canonică a produselor $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m+1)$ este:

$$\left[\frac{2m+1}{p}\right]-\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{2m+1}{p^2}\right]-\left[\frac{m}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{2m+1}{p^k}\right]-\left[\frac{m}{p^k}\right],$$

unde $p^k \leq 2m+1 < p^{k+1}$.

85*. Fie $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$ şi x un număr real cu proprietatea că numerele x, x^2 şi x^n au aceeaşi parte fracţionară. Să se arate că x este număr întreg.

86. Fie $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$ astfel încât $n+1$ se divide la $[\sqrt{n}]+1$. Demonstraţi că $E_n = (n-1)(n-3)$ se divide la $[\sqrt{n}]-1$.

87*. Fie a şi b două numere reale nenule distincte.
Dacă $a[bn] = b[an], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci a şi b sunt întregi.

88*. Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât:

$$n = [a\sqrt{2}] + [b\sqrt{3}].$$

89. Vom spune că un număr natural este *interesant* dacă $\{n\sqrt{2}\} < 3 - -2\sqrt{2}$. Demonstraţi că:

a) Există o infinitate de numere naturale *interesante*;

b) Dacă n este *interesant*, atunci $[n\sqrt{2}], [(n+1)\sqrt{2}], [(n+2)\sqrt{2}]$ sunt în progresie aritmetică.

90*. Fie p prim şi $n > 2$, natural. Dacă $p^{n-1} | n!$, atunci $p = 2$. Să se determine n astfel încât 2^{n-1} să dividă pe $n!$.

91. a) Demonstraţi că pentru orice numere $a, b \in [0,2]$, există un număr natural n pentru care are loc relaţia $a < \{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n+1}\} < b$;

b) Pentru orice $\alpha \in (0,2)$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n+1}\} = \alpha?$$

92. Fie un interval deschis de lungime $\frac{1}{n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că numărul fracţiilor ireductibile $\frac{p}{q}, 1 \leq q \leq n$, conţinute în interval este cel mult $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

soluții 13 | Elemente de aritmetică

§ 1.

1*. a) $n^2 < n^2 + n < (n+1)^2 \Leftrightarrow n < \sqrt{n^2+n} < n+1 \Rightarrow \left[\sqrt{n^2+n}\right] = n$;

b) Observăm că pentru $n = 1$, $\sqrt{2} = 1{,}4, \ldots$, pentru $n = 2 \Rightarrow \sqrt{6} = 2{,}4, \ldots$

Să arătăm că prima zecimală este 4, adică vom arăta că:

$$\left[\sqrt{n^2+n}\right] + 0{,}4 < \sqrt{n^2+n} < \left[\sqrt{n^2+n}\right] + 0{,}5 \Leftrightarrow n + \frac{4}{10} < \sqrt{n^2+n} <$$

$$< n + \frac{5}{10} \Rightarrow n^2 + \frac{4}{5}n + \frac{4}{25} \leq n^2 + n \Rightarrow \frac{4}{25} \leq \frac{n}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{5} \leq n$$

și $\sqrt{n^2+n} \leq 0{,}5 + n \Rightarrow n^2 + n \leq n^2 + n + \frac{1}{4}$;

c) Din b) rezultă că ultima cifră a numărului $\left[10\sqrt{n^2+n}\right]$ este 4.

2. Avem $\left[\sqrt{n^2+2n}\right]$. Arătăm că:

$$\left[\sqrt{n^2+n}\right] + 0{,}9 < \sqrt{n^2+2n} < \left[\sqrt{n^2+2n}\right] + 1.$$

$$n + \frac{9}{10} < \sqrt{n^2+2n} < n+1 \Leftrightarrow n^2 + \frac{9n}{5} + \frac{81}{100} < n^2 + 2n + 1 \Rightarrow n \geq 5.$$

Avem: $\left[\sqrt{n^2+2n}\right] + 0{,}9\ldots9 < \sqrt{n^2+2n} < \left[\sqrt{n^2+2n}\right] + 1.$

$$n + \frac{99\ldots9}{10^{2011}} < \sqrt{n^2+2n} < n+1 \quad \left(\text{notăm cu } A = \frac{99\ldots9}{10^{2011}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 2 \cdot \frac{99\ldots9}{10^{2011}} n + A^2 < n^2 + 2n \Rightarrow A^2 < 2n\left(1 - \frac{99\ldots9}{10^{2011}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 < 2n \frac{10^{2011} - 99\ldots9}{10^{2011}} \Rightarrow (10^{2011} - 1)^2 < 2n \cdot 10^{2011} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > \frac{(10^{2011}-1)^2}{2 \cdot 10^{2011}} = \frac{10^{2011}}{2} - 1 + \frac{1}{2 \cdot 2^{2011}} \Rightarrow n \geq 5 \cdot 10^{2010}.$$

3. a) Avem $n + \frac{2}{5} < \sqrt{n^2+n} < n + \frac{1}{2}$;

b) Avem $\frac{2}{10} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{10} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{3}{10} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{3} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 5 \Rightarrow n \in \{3,4,5\};$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Avem $2n+\frac{24}{100}<\sqrt{4n^2+n}<2n+\frac{25}{100}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2n+0{,}24<\sqrt{4n^2+n}<2n+0{,}25.$

4. Avem $\left\{\sqrt{n(n+1)}\right\}=\left\{\sqrt{n(n+1)}-n\right\}=\left\{\frac{n}{n+\sqrt{n(n+1)}}\right\}=$

$=\frac{n}{n+\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}.$

Dar, cum $0{,}4142=\sqrt{2}-1=\frac{1}{1+\sqrt{2}}<\left\{\sqrt{n(n+1)}\right\}<\frac{1}{2}=0{,}5$ rezultă că prima zecimală a numărului $\left\{\sqrt{n(n+1)}\right\}$ este 4.

Punem condiția ca $\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}<0{,}49\Rightarrow n<\frac{49^2}{200}\Rightarrow n\in\{0,1,\ldots,12\}.$

5. Din $(n+1)^2\le n^2+4n+1<(n+2)^2\Rightarrow\left[\sqrt{n^2+4n+1}\right]=n+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\sqrt{n^2+4n+1}\right]-(n+1)\ge 0{,}99\Rightarrow n\ge\frac{29601}{200}\Rightarrow n\ge 149.$

Deci numărul cerut este 149.

Costel Anghel, R.M.S., 2010

6.** Dacă $n=3k, k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow A=k(3k+8)$ care este prim doar pentru $k=1\Rightarrow A=11$. Putem scrie $A=\frac{n^2-1}{3}+\left[\frac{8n+1}{3}+\frac{1}{3n}\right]$.

Dacă $n=3k+1\Rightarrow A=(k+3)(3k+1)$ care este prim pentru $k=0\Rightarrow$ $\Rightarrow A=3$. Dacă $n=3k+2, A=3(k^2+4k+2)$ care este mereu compus. Așadar $n\in\{1,3\}$.

Gabriel Popa, R.M.C.S., 2011, Concursul „Unirea", 2013

7.** Notăm $\left[\sqrt[3]{n}\right]=k,\left\{\sqrt[3]{n}\right\}=t\in[0,1)\Rightarrow\sqrt[3]{n}=k+t$, atunci ipoteza devine $0{,}7<t<0{,}(7)\Rightarrow k+\frac{7}{10}<\sqrt[3]{n}<k+\frac{7}{9}\Rightarrow$

$\Rightarrow k^3+3k^2\frac{7}{10}+3k\frac{49}{100}+\frac{343}{1000}<n<k^3+3k^2\frac{7}{9}+3k\frac{49}{81}+\frac{343}{729},$

unde $n\in\mathbb{N}$. Pentru $k=0\Rightarrow\frac{343}{1000}<n<\frac{343}{729}$, fals. Pentru $k=1\Rightarrow$

$\Rightarrow 1+\frac{21}{10}+\frac{147}{100}+\frac{343}{1000}<1+\frac{21}{9}+\frac{147}{81}+\frac{343}{729}\Rightarrow\frac{4913}{1000}<n<\frac{4096}{729}\Rightarrow$

$\Rightarrow n\in(4,6)\Rightarrow n=5$. Așadar cel mai mic număr natural n este 5.

Mihai Vijdeluc, Argument, 2016

Scanned with OKEN Scanner

8**. Fie $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2n = (1 + [\sqrt{2}])m$.
Dacă $m \leq [\sqrt{2n}] - 1 \Rightarrow 2n \leq ([\sqrt{2n}] + 1)([\sqrt{2n}] - 1) =$
$= ([\sqrt{2n}])^2 - 1 \leq (\sqrt{2n})^2 - 1 = 2n - 1 < 2n$, fals.
Dacă $m \geq [\sqrt{2n}] + 1 \Rightarrow 2n \geq ([\sqrt{2n}] + 1)^2 > (\sqrt{2n} - 1 + 1)^2 = 2n$, fals,
deci $m = [\sqrt{2n}]$.
Dacă $n = \dfrac{p(p+1)}{2} \Rightarrow \sqrt{2n} = \sqrt{p(p+1)} \in (p, p+1) \Rightarrow [2n] = p$.

9**. Pentru $n = k^2 - k, k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ vom arăta
$\sqrt{n+1+\sqrt{n}} > k > \sqrt{n+\sqrt{n+1}} \Rightarrow \sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2-k}} > k$ și
$k > \sqrt{k^2-k+\sqrt{k^2-k+1}}$. Așadar există o infinitate de valori ale lui n,
$n = k^2 - k, k \geq 2$, pentru care $\left[\sqrt{n+1+\sqrt{n}}\right] > \left[\sqrt{n+\sqrt{n+1}}\right]$.

Andrei Horvath Marc, Concursul „Grigore Moisil", 2011, clasa VIII-a

10**. Avem $n\sqrt{3} - 1 < [n\sqrt{3}] = [n\sqrt{2}] \leq n\sqrt{2} \Rightarrow n(\sqrt{3} - \sqrt{2}) < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow n < \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \Rightarrow n \in \{0,1,2,3\}$.
Se deduce că numai $n \in \{0,1\}$ verifică relația dată.

11**. Presupunem prin absurd că există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât
$\{2^m\sqrt{5}\} = \{3^n\sqrt{5}\} \Leftrightarrow 2^m\sqrt{5} - [2^m\sqrt{5}] = 3^n\sqrt{5} - [3^n\sqrt{5}] \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{5}(2^m - 3^n) = [2^m\sqrt{5}] - [3^n\sqrt{5}] \Rightarrow (2^m - 3^n)\sqrt{5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^m - 3^n = 0 \Rightarrow 2^m = 3^n$, fals.

12. Dacă n este par, $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$, atunci $\left[\dfrac{n^2}{4}\right] = [k^2] \equiv k^2$,
care este compus. Dacă n este impar, $n = 2k + 1, k \geq 2$, atunci:
$\left[\dfrac{n^2}{4}\right] = \left[\dfrac{4k^2+4k+1}{4}\right] = \left[k^2 + k + \dfrac{1}{4}\right] = k^2 + k = k(k+1)$, care este
compus. Deci $\left[\dfrac{n^2}{4}\right]$ este compus.

13*. $\overline{aaa} \leq \dfrac{\overline{n}}{9} < \overline{aaa} + 1 \Leftrightarrow 100a + 10a + a \leq \dfrac{n}{9} < 100a + 10a + a + 1$
$900a + 90a + 9a \leq n < 900a + 90a + 9a + 9$
$999a \leq n < 999a + 9 \Rightarrow a \in \{1,2,3,\ldots,9\}$.
$999 \leq n < 1008 \Rightarrow n \in \{999,1000,1001,\ldots,1007\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $\left[\frac{n}{4}+9\right]=9+\left[\frac{n}{4}\right]\in\{2009,2090,2900,9002,9020,9200\}\Rightarrow$
$\Rightarrow\left[\frac{n}{4}\right]\in\{2000,2081,2891,8993,9011,9191\}$.

Lucian Dragomir, G.M. nr. 7/2000

14. Avem $a<[a]+1\Rightarrow[a]^2<a^2+2[a]=([a]+1)^2$, iar de aici rezultă: $a^2+2[a]=([a]+1)^2\Rightarrow a^2=[a]^2+1=k^2+1$, deci $a=\sqrt{k^2+1}$, k arbitrar.

Concurs Ungaria, 2003

15. Se consideră $n\in\{4k+r,r=0,1,2,3\}$ și se deduce de fiecare dată că a_n este pătrat perfect.

16.** a) Considerăm cazurile $n=3k,n=3k+1,n\in\mathbb{N}^*$.

Pentru $n=3k\Rightarrow\left[\frac{n^2}{3}\right]=3k^2$, deci se impune $k=1\Leftrightarrow n=3$.

Pentru $n=3k\pm1\Rightarrow\left[\frac{n^2}{3}\right]=\left[\frac{9k^2\pm6k+1}{3}\right]=3k^2\pm2k=k(3k\pm2)$, care este număr prim; pentru $k=1$ se obține 5 și evident pentru $k\geq2,k(3k\pm2)$ este număr compus. Așadar $n\in\{3,4\}$.

New York, 1983

b) În mod analog se consideră: $n\in\{5k,5k\pm1,5k\pm2\},k\in\mathbb{N}$. Se obțin numerele $n\in\{3,5,6\}$, cel mai mare număr este 6.

Concurs Ucraina, 1996

17.** Dacă $\left[\frac{2^n}{n}\right]=2^k,k\in\mathbb{N}\Rightarrow n2^k\leq2^n<n(2^k+1)$, deci există $r\in\mathbb{N}$, $0<r\leq n-1$ astfel încât $2^n=n\cdot2^k+r$. Avem cazurile:

a) $2^k<n\Rightarrow2^n<n^2+n$, dar prin inducție rezultă $2^n<n^2+4$, $\forall\,n\geq5$. Se verifică doar $n=4$ care și convine.

b) Pentru $n\geq5\Rightarrow2^n>n,2^k>r$ și din $2^n=n\cdot2^k+r\Rightarrow2^k|r\Rightarrow$ $r=0$, ceea ce atrage $n=2^{n-k}$, deci n este o putere a lui 2. Prin urmare $n\in\{2^p,p\in\mathbb{N}\}$.

N. Regen, O.J., 2009

18*.** Dacă $n=ak,k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\left[\frac{n^2}{a^2}\right]=k^2$. Reciproc să presupunem că n nu se divide la a, adică $n=aq+r,0<r<a$.

Atunci $\frac{n^2}{a^2}=q^2+\frac{2aqr+r^2}{a^2}$, dar $2aqr+r^2<2a^2q+a^2\Rightarrow\frac{2aqr+r^2}{a^2}<$
$<2q+1\Rightarrow\frac{n^2}{a^2}<(q+1)^2$. Dacă $2aqr+r^2<a^2\Rightarrow2aqr+r^2<2n-1=$
$=2aq+2r-1$, contradicție, deoarece rezultă că $2aq(r-1)+(r-1)^2<0$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow \frac{2aqr+r^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow q^2+1 \leq \frac{n^2}{a^2} < (q+1)^2$, deci $\left[\frac{n^2}{a^2}\right]$ nu poate fi pătrat perfect.

Concurs „Unirea", 2010

19**. Din enunț rezultă că $\sqrt{n+\sqrt{n}} = \sqrt{a}+k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n+\sqrt{n} =$
$= a+2k\sqrt{a}+k^2 \Rightarrow \sqrt{n} = 2k\sqrt{a}+b$, unde $b = k^2-n+a \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 4k^2a+b^2+4kb\sqrt{a} \Rightarrow kb\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ (*).
Dacă $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, atunci a este pătrat perfect, deci $n+\sqrt{n}$ este pătrat perfect, în particular, $n = m^2, m \in \mathbb{N} \Rightarrow m^2+m$ este pătrat perfect, de unde rezultă numai $m = 0 \Rightarrow n = 0$, contradicție. Așadar, din (*) rezultă $kb = 0$.
Pentru $b = 0 \Rightarrow n = k^2+a$ și $n = 4k^2a \Rightarrow a = \frac{k^2}{4k^2-1} < 1$, fals.
Prin urmare, $k = 0 \Rightarrow n = b^2$ și $n = a-b \Rightarrow a = b^2+b \Rightarrow 4a+1 =$
$= (2b+1)^2$.

O.J., 2016

20. Evident, se impune ca $n\sqrt{d}+\frac{n}{p}-n\sqrt{d} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n}{p} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = pq$, deci n este multiplu de p.
21**. Evident numărul a, verifică ecuația $x^2-x-1 = 0 \Rightarrow a^2+a = 1$.
Avem $a\left[\frac{n+a^2}{a}\right]+a < a\left(\frac{n+a^2}{a}\right)+a = n+a^2+a = n+1$ și
$a\left[\frac{n+a^2}{a}\right]+a \geq a\left[\frac{n}{a}\right]+a > \left(\frac{n}{a}-1\right)+a = n \Rightarrow \left[a\left[\frac{n+a^2}{a}\right]+a\right] = n.$

22**. Fie $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ și $a^2 = a+1 \Rightarrow na^2 = na+n \Rightarrow [a^2n] = [an+n] =$
$= [an]+n$. Din $a^2 = a+1 \Rightarrow a = 1+\frac{1}{a} \Rightarrow a[an] = \left(1+\frac{1}{a}\right)[an] =$
$= [an]+\frac{1}{a}[an] = [a[an]] = \left[[an]+\frac{1}{a}[an]\right] = [an]+\left[\frac{[an]}{a}\right]$ (*).
Dar, cum $an-1 < [an] \leq an \Rightarrow n-\frac{1}{a} < \frac{[an]}{a} \leq n \Rightarrow n-1 < \frac{[an]}{a} < n \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\frac{[an]}{a}\right] = n-1$; din (*) rezultă $[a[an]] = [an]+n-1 \Rightarrow [a[an]]+1 =$
$= [an]+n = [a^2n], \forall n \in \mathbb{N}^*$.
23**. Fie a și b rădăcinile ecuației $x^2-x-1 = 0$.
$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (a numărului de aur), $ab = 1$.
Se deduce ușor că $a\sigma_n = a(a^n+b^n) = a^{n+1}+ab^n = a^{n+1}-b^{n-1} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= a^{n+1} + b^{n+1} - b^{n+1} - b^{n-1} = \sigma_{n+1} + ab^n - b^{n+1} = \sigma_{n+1} + b^n(a-b) =$
$= \sigma_{n+1} + b^n\sqrt{5}$ (1). Din $b^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b^2\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2} < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 < b^{2m}\sqrt{5} < b^2\sqrt{5} < 1, \forall\, m \in \mathbb{N}^*$ și $0 > b\sqrt[3]{5} > -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow -1 < b^{2m+1}\sqrt{5} < 0 \Rightarrow \left[b^{2m}\sqrt{5}\right] = 0$ și $\left[b^{2m+1}\sqrt{5}\right] = -1.$
$[a\sigma_n] = \left[\sigma_{n+1} + b^n\sqrt{5}\right] = \sigma_{n+1} + \left[b^n\sqrt{5}\right] =$
$= \begin{cases} \sigma_{n+1} + \left[b^{2m}\sqrt{5}\right] = \sigma_{n+1}, & \text{dacă } n \text{ par} \\ \sigma_{n+1} + \left[b^{2m+1}\sqrt{5}\right] = \sigma_{n+1} - 1, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}.$

D.M. Bătinețu-Giurgiu

24**. Într-adevăr $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \in (1,2)$ și $b = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \in (-1,0) \Rightarrow$
$\Rightarrow b^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} < 1 \Rightarrow b^2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}-3}{2} < 1$ și cum $[b] < 1 \Rightarrow b^{2m} < 1,$
$\forall\, m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < b^{2m}\sqrt{3} < b^2\sqrt{3} < 1, \forall\, m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \left[b^{2m}\sqrt{3}\right] = 0, \forall\, m \in \mathbb{N}^*.$
De asemenea, din $0 < b^2\sqrt{3} < 1 \Rightarrow 0 > b^3\sqrt{3} > b > -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 > b^{2m+1}\sqrt{3} > -b^m > -1 \Rightarrow \left[b^{2m+1}\sqrt{3}\right] = -1.$

D.M. Bătinețu-Giurgiu

25**. Avem $\sqrt{a} = \left[\sqrt{a}\right] + \left\{\sqrt{a}\right\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1) \Rightarrow$
$\Rightarrow E_{(a)} = t + t^2 + t^3 = \sqrt{a} - k + \left(\sqrt{a}-k\right)^2 + \left(\sqrt{a}-k\right)^3 =$
$= \sqrt{a}(1 - 2k + a + 3k^2) - k + a + k^2 - 3ak - k^3 \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{a}(1 - 2k + a + 3k^2) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = p^2, p \in \mathbb{N}.$
Reciproc, dacă a este pătrat perfect $E_{(a)} = 0 \in \mathbb{Q}$.

E. Bojor, O.L. Maramureș, 2008

26. Fie $n = k^2 \Rightarrow \left[\sqrt{k^2}\right] - \left[\sqrt{k^2-1}\right] = p - (p-1) = 1.$
Reciproc, considerăm că n nu este pătrat perfect, atunci există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $p^2 < n < (p+1)^2$ și avem $\left[\sqrt{n}\right] = p, \left[\sqrt{n-1}\right] = p \Rightarrow \left[\sqrt{n}\right] - \left[\sqrt{n-1}\right] = 0$, contradicție. În concluzie n este pătrat perfect.
$\left(p^2 \le n-1 \Rightarrow p \le \sqrt{n-1} < p+1, \left[\sqrt{n-1}\right] = p\right).$
27. Se constată că dacă $n+1 = p^2 \Rightarrow n = p^2 - 1$, atunci egalitatea devine $\left[\sqrt{p^2-1}\right] = p$, care nu poate avea loc. Reciproc, fie $\left[\sqrt{n}\right] = \left[\sqrt{n+1}\right] = k \Rightarrow$
$\Rightarrow k \le \sqrt{n} < k+1 \Leftrightarrow k^2 \le n < (k+1)^2. k^2 < k^2 + 1 \le n+1 <$
$< (k+1)^2 + 1 \Rightarrow k^2 < n+1 \le (k+1)^2$ (*). $n+1$ nu poate fi egal cu $(k+1)^2$, pentru că atunci nu poate avea loc egalitatea $\left[\sqrt{n}\right] = \left[\sqrt{n-1}\right]$; din (*) $\Rightarrow k^2 < n+1 < (k+1)^2 \Rightarrow k < \sqrt{n+1} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{n+1}\right] = k.$

Scanned with OKEN Scanner

28. Să arătăm mai întâi că $s(n)=\left[\frac{n}{2}\right]+1$. Într-adevăr, pentru n par, $n=2m\Rightarrow n=0+n=1+(n-1)=2+(n-2)=\cdots=m+m$ deci $s(n)=m+1=\left[\frac{n}{2}\right]+1$.

Pentru n impar, $n=2m+1\Rightarrow n=0+n=1+(n-1)=2+(n-2)=$ $=\cdots=m+(m+1)$, din $s(n)=m+1=\left[\frac{n}{2}\right]+1$.

a) Relația se demonstrează dacă se analizează paritatea perechilor (n,m);

b) Dacă $n=2m+1\Rightarrow s(0)+s(1)+\cdots+s(n)=1+1+2+2+$ $+\cdots+m+m=m(m+1)=\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Dacă $n=2m\Rightarrow s(0)+s(1)+\cdots+s(n)=2[1+2+\cdots+(m-1)]+m=$ $=m^2=\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Petre Minuț, Recreații Matematice, 2007

29. Numărul pătratelor perfecte dintre a și b este egal cu numărul numerelor naturale dintre $\sqrt{a}$ și $\sqrt{b}$. Aceste numere întregi sunt date de: $\sqrt{a}<[\sqrt{a}]+1,[\sqrt{a}]+2,[\sqrt{a}]+3,\ldots,[\sqrt{b}]<b$ adică, $[\sqrt{b}]-([\sqrt{a}]+1)+1=[\sqrt{b}]-[\sqrt{a}]$.

Ion Cucurezeanu

30*. Numărul cuburilor perfecte dintre a și b este egal cu numărul numerelor întregi dintre $\sqrt[3]{a}$ și $\sqrt[3]{b}$.

Aceste numere sunt: $\sqrt[3]{a}<[\sqrt[3]{a}]+1,[\sqrt[3]{a}]+2,\ldots,[\sqrt[3]{a}]+p=[\sqrt[3]{b}]<\sqrt[3]{b}$, adică $[\sqrt[3]{b}]-[\sqrt[3]{a}]$.

Ion Cucurezeanu

31. Prin inducție se deduce că:

$$\left(2^{[\sqrt{n}]}\right)^2<n+4^{[\sqrt{n}]}+3<\left(2^{[\sqrt{n}]}+1\right)^2,\forall\, n\geq 4.$$

Rămâne să se verifice $n\in\{0,2\}$.

Cristinel Mortici

32.** Avem $\sqrt{n}=[\sqrt{n}]+\{\sqrt{n}\}$ și $\sqrt{2n}=[\sqrt{2n}]+\{\sqrt{2n}\}$.

Fie k un număr natural pentru care $[\sqrt{n}]+1\leq k\leq[\sqrt{2n}]$ și atunci k^2 este soluția problemei deoarece $n<([\sqrt{n}]+1)^2\leq k^2\leq[\sqrt{2n}]^2\leq 2n$.

33*.** Soluția 1

Dacă $[\sqrt{n}]=1\Rightarrow[\sqrt{n}]^3$ divide $n^2\Rightarrow n\in\{2,3\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dar cum $n \neq k^2 \Rightarrow k^2 < n < (k+1)^2 \Rightarrow [\sqrt{n}] = k$ și trebuie să avem $k^3 | n^2$, deci n este multiplu de k, dar între k^2 și $(k+1)^2$ există doi multipli de k și anume $k^2 + k, k^2 + 2k$.

a) Dacă $n = k^2 + k \Rightarrow n^2 = k^2(k+1)^2 \Rightarrow k^3 | n^3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k^3 | k^2(k+1)^2 \Rightarrow k | k^2 + 2k + 1 \Rightarrow k | 1 \Rightarrow 1 < n < 4$ caz analizat mai sus $\Rightarrow n \in \{2,3\}$.

b) $n = k^2 + 2k \Rightarrow n^2 = k^2(k+2)^2 \Rightarrow k^3 | k^2(k+2)^2 \Rightarrow k | 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ 1) $k = 2 \Rightarrow 2^2 < n < 3^2 \Rightarrow n \in \{4,7,8\} \Rightarrow n = 8$; 2) $k = 4 \Rightarrow 4^2 < n <$ $< 5^2 \Rightarrow n \in \{17,18, \ldots, 24\} \Rightarrow n = 24$. În final avem $n \in \{2,3,8,24\}$.

R.M.T., 2011, Vasile Pop, Concursul „Nicolae Păun", 2012

Soluția 2

Dacă n nu este pătrat perfect, atunci $k^2 < n < (k+1)^2, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow [\sqrt{n}] =$ $= k \Rightarrow n = k^2 + s, 0 < s < 2k + 1 \Rightarrow k^3 | (k^2 + s)^2 = k^4 + 2k^2 s + s^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow k^2 | k^4 + 2k^2 s + s^2 \Rightarrow k^2 | s^2 \Rightarrow k | s \Rightarrow s = kp, p \in \mathbb{N}^*$, deci $s < 2k + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow kp < 2k + 1 \Rightarrow p < 2 + \frac{1}{k} \leq 3 \Rightarrow p < 3 \Rightarrow p \in \{1,2\}$.

Cazul I

$p = 1 \Rightarrow s = k \Rightarrow k^3 | k^4 + 2k^3 + k^2 \Rightarrow k^3 | k^2 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow s = 1 \Rightarrow n = 2$.

Cazul II

$p = 2 \Rightarrow s = 2k \Rightarrow k^3 | k^4 + 4k^3 + 2k^2 \Rightarrow k^3 | 4k^2 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow k \in \{1,2,4\}$.

Pentru $k = 1 \Rightarrow s = 2 \Rightarrow n = 1 + 2 = 3$. Pentru $k = 2 \Rightarrow s = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow n = 2^2 + 4 = 8$. Pentru $k = 4 \Rightarrow s = 8 \Rightarrow n = 4^2 + 8 = 24$.

Prin urmare $n \in \{2,3,8,24\}$ și care verifică condițiile problemei.

34. Trebuie să determinăm perechile de numere naturale (a, b) astfel încât $a^2 - b^2 = p^k \Rightarrow (a-b)(a+b) = p^k \Rightarrow \begin{cases} a - b = p^m \\ a + b = p^{k-m}, \end{cases}$

dar cum $a - b < a + b \Rightarrow p^m \leq p^{k-m} \Rightarrow m \leq k - m \Rightarrow m \leq \frac{k}{2}, m \in \mathbb{N}$.

Dacă $p = 2$, numărul căutat este $\left[\frac{k}{2}\right]$, iar pentru p prim impar, numărul căutat este $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$.

35. Evident $\overline{abcd}$ trebuie să fie pătrat perfect și $c \neq 0$.

Valoarea maximă a lui $[\sqrt{\overline{ca}}] + [\sqrt{\overline{cb}}] + [\sqrt{\overline{cc}}] + [\sqrt{\overline{cd}}] = 4 \cdot 9 \equiv 36$ când $c = 9$ și cum $36^2 = 1296$ rezultă că $[\sqrt{\overline{91}}] + [\sqrt{\overline{92}}] + [\sqrt{\overline{99}}] + [\sqrt{\overline{96}}] =$ $36 = \sqrt{1296}$. Celelalte pătrate perfecte de la 32^2 la 99^2, fie că de la 41^2 încolo suma din stânga va lua valoarea maximă 36 care este mai mică

Scanned with OKEN Scanner

decât valoarea din dreapta. Singurele valori se caută printre pătratele perfecte de forma $(\overline{3x})^2$. Prin urmare, numărul $\overline{abcd} = 1296 = 36^2$.

Nicolae Păuna, G.M. nr. 12/2001

36. Rezultă că $2\sqrt{\overline{abc}} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \overline{abc}$ pătrat perfect $\Rightarrow$ $\overline{abc} \in \{121,144,146,196,225,256,289,324,361,441,484,529,576,625,676, 729,784,841,961\} \Rightarrow 2\sqrt{\overline{abc}} \in \{22,24,26,28,30,32,34,36,38,40,42,44,48, 50,52,54,56,58,60,62\}$.

37. a) Evident $\overline{abc} \in A = \{121,122,\ldots,128,129,\ldots 137,\ldots,143\}$ și $\left[\sqrt{\overline{abc}}\right] = 11, \forall\, \overline{abc} \in A$, dar numerele pentru care $a+b+c=11$ sunt 128 și 137.

b) Evident $\overline{abc} \in \{441,442,443,\ldots,483\} = B, \forall\, x \in B \Rightarrow \{\overline{abc}\} = 21$, dar numerele pentru care $a+b+c=15$, $\overline{abc} \in \{447,456,465,474,483\}$.

Gh. Achim, G.M. nr. 7-8/2003

38. Avem $\overline{ab} \leq \overline{a,b^3} < \overline{ab}+1 \Rightarrow 1000\overline{ab} < \overline{ab^3} < \overline{ab}1000 + 1000$. Din $1000\overline{ab} < \overline{ab^3} \Rightarrow \overline{ab} \geq 32$ și din $\overline{ab^3} < \overline{ab}1000 + 1000 \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{ab^3} - \overline{ab}1000 < 1000$ sau $\overline{ab}\left(\overline{ab}^2 - 1000\right) < 1000$. Dacă $\overline{ab} \geq 33 \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{ab}^2 - 1000 \geq 89$ și obținem $\overline{ab}\left(\overline{ab} - 1000\right) > 1000$. Prin urmare, singurul număr care verifică ambele inegalități este 32.

Romanța Ghiță, Ioan Ghiță, G.M. nr. 4/2015

39. Deoarece $\sqrt{\overline{abc}} \in [11,31] \cap \mathbb{N}^*$, rezultă că membrul stâng poate lua valorile $[33,93] \cap \mathbb{N}^* \Rightarrow a + \overline{bb} \in \{33,34,\ldots,93\}$ rezultă că $b \geq 3$. Dacă $b = 3 \Rightarrow \left[\sqrt{\overline{a33}}\right] + \left[\sqrt{\overline{33a}}\right] + \left[\sqrt{\overline{3a3}}\right] = a + 33$, însă, cum $\left[\sqrt{\overline{a33}}\right] \geq 11, \left[\sqrt{\overline{33a}}\right] \geq 18$ și $\left[\sqrt{\overline{3a3}}\right] \geq 17$, rezultă că suma din stânga egalității este mai mare decât 46, ori în dreapta $a + 33 \leq 42$, deci nu convine. Analizând și celelalte cazuri, vor rezulta numai două situații: $b = 6, a = 3$ și $b = 7, a = 9$.

Daniel Feher, G.M. nr. 6/2006

§ 2.

40. Numărul $p \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ care se divide la numărul k este $\left[\frac{n}{k}\right]$, aceste numere sunt $k, 2k, 3k, \ldots, \left[\frac{n}{k}\right]k$.

41. Fie $d = (m,n) \Rightarrow m = ad, n = bd$, unde $(a,b) = 1$.

Numerele din enunț devin: $\frac{1a}{b}, \frac{2a}{b}, \ldots, \frac{pa}{b}$ (1) și cum numerele a și b sunt

Scanned with OKEN Scanner

prime între ele, rezultă că printre numerele lui (1) sunt exact $\left[\frac{p}{b}\right]$ numere naturale (2).

Din $n = bd \Rightarrow b = \frac{n}{d}$ și înlocuind în (2) rezultă $\left[\frac{pd}{n}\right]$ numărul căutat.

42. Exponentul lui 5 în descompunerea canonică a lui 400! este:

$$\left[\frac{400}{5}\right] + \left[\frac{400}{5^2}\right] + \left[\frac{400}{5^3}\right] = 80 + 16 + 3 = 99.$$

Exponentul lui 2 în descompunerea canonică a lui 400! este mai mare, deci 400! se termină în 99 de zerouri.

43. Conform relației lui Legendre, exponentul lui 2^2 în 253! este:

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^{7} \left[\frac{253}{2^j \cdot 2}\right] = 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 120.$$

Analog, exponentul lui 3^3 în 253! este:

$$\alpha_2 = \sum_{j=1}^{5} \left[\frac{253}{3^j \cdot 3}\right] = 28 + 9 + 3 + 1 = 41.$$

44. Exponentul lui 2 în 100! este dat de:

$$\left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{2^2}\right] + \left[\frac{100}{2^3}\right] + \left[\frac{100}{2^4}\right] + \left[\frac{100}{2^5}\right] + \left[\frac{100}{2^6}\right] =$$
$$= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97,$$

iar exponentul lui 3 în 100! este dat de:

$$\left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{3^2}\right] + \left[\frac{100}{3^3}\right] + \left[\frac{100}{3^4}\right] = 48.$$

Numitorul fiind $2^{1000} \cdot 3^{100}$, după simplificare cu 2^{97} și 3^{48}, valoarea numitorului este $2^3 \cdot 3^{52}$.

Concurs Kiev, 1981

45. Conform relației lui Legendre, avem:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n+1} \left[\frac{p^n}{p^j}\right] = p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1 = \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

46.** Deoarece $10 = 25$ și $\frac{5^n - 1}{4} = 5^{n-1} + 5^{n-2} + \cdots + 5 + 1$

și cum 2 apare de mai multe ori decât 5 în $p!$, numărul de zerouri în care se termină $p!$ este egal cu:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{5^{n-1} + 5^{n-2} + \cdots + 5^2 + 5 + 1}{5^k}\right] = \frac{5^n - 4n + 1}{16}.$$

Scanned with OKEN Scanner

47.** Exponentul lui 2 în $n!$ este:

$$k = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \cdots < \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \frac{n}{2^3} + \cdots = \frac{n}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) =$$

$= 2 \cdot \frac{n}{2} = n$, adică $2^n \nmid n!$.

Generalizare

Dacă p este prim, n – natural, atunci $p^n \nmid [(p-1)n]!$.

48.** Avem $\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ ori}} = \frac{10^n - 1}{9}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{10^k - 1}{9} = \frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1} - 1}{9} - n\right) =$

$$= \frac{10^{n+1} - 1 - 9^n}{81} \Rightarrow S_{2014} = \frac{10^{2015} - 9 \cdot 2014 - 1}{81},$$

deci $\left[\frac{10^{2017}}{S_{2014}}\right] = \left[\frac{81 \cdot 10^{2017}}{10^{2015} - 9 \cdot 2014 - 1}\right] = \left[\frac{8100 \cdot 10^{2015}}{10^{2015} - 18125}\right] =$

$$= \left[8100\left(1 + \frac{18125}{10^{2015} - 18125}\right)\right] = 8100 + \left[\frac{18125}{10^{2015} - 18125}\right] = 8100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{10^{2017}}{S_{2014}}\right] = 8100.$$

Olimpiadă Austria 2003-2004

49*. Notăm $n = 10^{31}$; $[A] = \left[\frac{n^3 + 3^3}{n+3} - \frac{3^3}{n+3}\right] = \left[n^2 - 3n + 9 - \frac{3^3}{n+3}\right] =$

$$= n^2 - 3n + 8 + 1 - \frac{3^3}{n+3} \Rightarrow [A] = n^2 - 3n + 8 \equiv 10^{62} - 3 \cdot 10^{31} + 8 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u([A]) = 8$.

China, 1993

50.** Deoarece exponentul lui 5 în descompunerea canonică a lui $n!$ este mai mic decât exponentul lui 2, numărul zerourilor factorialului numărului n va fi dat de exponentul lui 5:

$$\left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + \cdots = 1000,$$

unde în membrul stâng avem un număr finit de termeni.

Deoarece $[a] \leq a \Rightarrow \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + \cdots < \frac{n}{5} + \frac{n}{5^2} + \frac{n}{5^3} + \cdots =$

$= \frac{n}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{n}{4}$, deci $1000 < \frac{n}{4} \Rightarrow n > 4000$. Deoarece $[a] > a - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1000 > \frac{n}{5} + \frac{n}{5^2} + \frac{n}{5^3} + \frac{n}{5^4} + \frac{n}{5^5} - 5 >> \frac{n}{5}\left[1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}\right] + 6 + 1 - 5 =$$

$$= \frac{31n}{125} + 2 \Rightarrow n < 4024 \Rightarrow 4000 < n < 4024.$$

Observăm că pentru $4000 < n < 4024$ sistemul S și S' de valori rămâne

Scanned with OKEN Scanner

constant $\Rightarrow$ S: $\left[\frac{4000}{25}\right]=160, \left[\frac{4000}{125}\right]=32, \left[\frac{4000}{625}\right]=6, \left[\frac{4000}{3125}\right]=1,$

S': $\left[\frac{4024}{25}\right]=160, \left[\frac{4024}{125}\right]=32, \left[\frac{4024}{625}\right]=6, \left[\frac{4024}{3125}\right]=1,$

singura variabilă fiind $\left[\frac{n}{5}\right]$.

Pentru $4000 \leq n < 4005 \Rightarrow \left[\frac{n}{5}\right]=800$; pentru $4005 \leq n \leq 4009 \Rightarrow \left[\frac{n}{5}\right]=$ $=801$; pentru $n \in \{4005,4006,4007,4008,4009\}$ avem:

$\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{n}{5^3}\right]+\cdots=1000.$

51**. a) Cum $1<\varphi<2 \Rightarrow [\varphi]=1 \Rightarrow \{\varphi\}=\varphi-[\varphi]=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=$

$=\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{1}{\varphi}$;

b) Avem $\frac{99^{99}-1}{99^9-1} \in \mathbb{N}^*$ și deci $\frac{99^{99}}{1-99^9}=-1-\frac{99^{99}-1}{99^9-1}+1-$

$-\frac{1}{99^9-1}=\left[\frac{99^{99}}{1-99^9}\right]+\left\{\frac{99^{99}}{1-99^9}\right\} \Rightarrow \left[\frac{99^{99}}{1-99^9}\right]=-1-\frac{99^{99}-1}{99^9-1}$ și

$\left\{\frac{99^{99}}{1-99^9}\right\}=1-\frac{1}{99^9-1}$.

52**. Notăm cu $B=10^{100}$, atunci $A=\left[\frac{B^{200}}{B+3}\right]=\left[\frac{B^{200}-3^{200}}{B+3}+\frac{3^{200}}{B+3}\right]=$

$=\frac{B^{200}-3^{200}}{B+3} \in \mathbb{N}$, întrucât $\frac{3^{200}}{B+3} \in (0,1)$.

Avem $\frac{(B^2-3^2)(B^2)^{99}\ldots(3^2)^{99}}{B+3}=(B-3)(M_{10}+3^{198})=M_{10}-3^{199}$.

Fie p ultima cifră a numărului dat, atunci $p(\text{mod } 10) \equiv$

$\equiv (M_{10}-3^{199})(\text{mod } 10) \equiv -3^{199}(\text{mod } 10)=-7(\text{mod } 10) \equiv 3$.

(Se știe că $U(3^{4k})=1$ deci $U(3^{199})=7$.)

Putnam, 1986

53**. Soluția 1

Avem $A_n=\frac{(2n)!}{n!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}{n!}=$

$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}{n!}=$

$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot 2^n}{n!}=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

Așadar, exponentul lui 2 în descompunerea lui A_n este n.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția 2

Exponentul lui 2 în descompunerea lui A_n este:

$$\left[\frac{2n}{2}\right]+\left[\frac{2n}{2^2}\right]+\left[\frac{2n}{2^3}\right]+\left[\frac{2n}{2^4}\right]-\cdots-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\left[\frac{n}{2^3}\right]-\cdots\right)=$$

$$=\left(n+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\cdots\right)-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]-\cdots\right)=n.$$

54**. a) Avem $\frac{10^{999}-1}{3}<A<\frac{10^{999}+2}{3}\Rightarrow 33\ldots3$ (de 999 ori).

$\underbrace{333\ldots3}_{999\text{ ori}}<a<\underbrace{33\ldots34}_{999\text{ ori}}\Rightarrow [A]=333\ldots33$ (de 999 ori);

b) a mia zecimală este 1.

55**. Avem $111=3\cdot37\Rightarrow\left[\sqrt[n]{111}\right]=1,\left[\sqrt[n]{111}\right]=3,\left[\sqrt[n]{111}\right]=37,$ $\left[\sqrt[n]{111}\right]=111.$

Din $\left[\sqrt[n]{111}\right]=1\Rightarrow 1\le\sqrt[n]{111}<2\Rightarrow 1\le 111<2^n\Rightarrow n\ge 7.$

Din $\left[\sqrt[n]{111}\right]=3\Rightarrow 3\le\sqrt[n]{111}<4\Rightarrow 3^n\le 111<4^n\Rightarrow n=4.$

Din $\left[\sqrt[n]{111}\right]=37\Rightarrow 37\le\sqrt[n]{111}<38\Rightarrow 37^n\le 111<38^n\Rightarrow n\in\emptyset,$ iar ultimul caz nu poate avea loc. Așadar $n=4$ și $n\ge 7$.

Concurs Serbia

56*. Avem $(11111{,}11)^2=123456765{,}4321<123456789<$ $<123456789{,}87654321=(11111{,}1111)^2\Rightarrow\left[\sqrt{123456789}\right]=11111$ și $\frac{1}{10}<0{,}11<\left\{\sqrt{123456789}\right\}<0{,}1111<\frac{1}{9}$, deci $n=9$.

57*. Cum $35=5\cdot7$ rezultă cazurile:

$\left[\sqrt[n]{53}\right]=1;\ \left[\sqrt[n]{53}\right]=5;\ \left[\sqrt[n]{53}\right]=7;\left[\sqrt[n]{53}\right]=35.$

Din $\left[\sqrt[n]{53}\right]=1\Rightarrow 1\le\sqrt[n]{53}<2\Rightarrow 1\le 53<2^n\Rightarrow n\ge 6.$

Din $\left[\sqrt[n]{53}\right]=5\Leftrightarrow 5\le\sqrt[n]{53}<6\Rightarrow 5^n\le 53<6^n\Rightarrow$ nu are soluție.

Din $\left[\sqrt[n]{53}\right]=7\Rightarrow 7\le\sqrt[n]{53}<8\Rightarrow 7^n\le 53<8^n\Rightarrow n=2$. Ultima relație nu poate avea loc. Așadar, $n=2$ și $n\ge 6$.

Concurs Bulgaria

58. Se știe că exponentul cu care apare un număr prim p în descompunerea lui $n!$ este egal cu:

$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$, deci exponentul cu care apare 19 în 1997! este:

$$n=\left[\frac{1997}{19}\right]+\left[\frac{1997}{19^2}\right]=105+5=110\Rightarrow 19^{110}\text{ divide }1997!.$$

59*. Presupunând, prin absurd că $\left\{\sqrt{222\ldots2}\right\}=\left\{\sqrt{333\ldots3}\right\}$, atunci rezultă că $\left\{\sqrt{333\ldots3}-\sqrt{222\ldots2}\right\}=0$, ceea ce nu este posibil, întrucât numărul $\sqrt{333\ldots3}-\sqrt{222\ldots2}$ este irațional.

Scanned with OKEN Scanner

60*. Fie $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ și $\{a_1\} = 0, \{a_2\} = 0{,}5, \{a_3\} = 0{,}83,$ $\{a_4\} = 0{,}08\ (3)$. Ținem seama că numărul $a = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n}$ nu poate fi întreg (se arată relativ ușor).
Rezultă că nu există $m \neq n$ pentru care $\{a_m\} = \{a_n\}$ și astfel pentru $n = 4$ este unica soluție.

Concurs Bacău, 2011

61. Evident $n \in \{1,2\}$ verifică și pentru $n \geq 3$. Se arată prin inducție că $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} > n + 1$ (1).
Într-adevăr, pentru $n = 3 \Rightarrow 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} > 4$. Presupunând că (1) este adevărată, arătăm că $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} > n + 2$. Avem $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} > n + 1 + \sqrt{n+1} > n + 2, n \in \{1,2\}$.

R.M.T.

62. a) $E_n = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} <$
$< 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^k} < 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} < 2$
și cum $1 < E_n < 2 \Rightarrow E_n \notin \mathbb{N}^*$;
b) Rezultă că $[E_n] = 1$.

63*.** a) Se știe că $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n \cdot n!} \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 < n!\,e - n!\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n} \Rightarrow [n!\,e] =$
$= n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \Rightarrow [n!\,e] = n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right) +$
$+1 \Rightarrow [n!\,e] - 1 = n(n-1)!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow n \mid ([n!\,e] - 1)$.
b) Avem $0 < n \cdot n!\,e - n \cdot n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow [n \cdot n!\,e] - n = n^2(n-1)!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 \mid ([n \cdot n!\,e] - n)$.

Lucian Tuțescu, R.M. Brăila, 2007

Scanned with OKEN Scanner

64*. Evident din $[\sqrt{n+9}] = [\sqrt{n}]$ $(*)$ $|\sqrt{n+9} - \sqrt{n}| < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{n+9} < \sqrt{n} + 1 \Rightarrow \sqrt{n} > 4, n > 16$. Primul număr care satisface condiția $(*)$ este $n = 25$, deoarece $[\sqrt{34}] = [\sqrt{25}] = 5$.

S.G.M. nr. 11/2011

65**. Enunțul este echivalent cu a determina, pentru fiecare $m \in \mathbb{N}^*$, numerele $n \in \mathbb{N}^*$ divizibile cu m, astfel încât $m^2 \leq n < (m+1)^2$.
Singurele astfel de numere sunt evident $m^2, m^2 + m$ și $m^2 + 2m$. Toate fiind cuprinse în intervalul $[m^2, (m+1)^2)$, deci rădăcinile lor au aceeași parte întreagă.

A.M.M.

66***. $n\sqrt{n} - 1 < [n\sqrt{n}] \leq n\sqrt{n} | \sqrt{n}, n^2 - \sqrt{n} < \sqrt{n}[n\sqrt{n}] \leq n^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow n - 1 < \sqrt{n^2 - \sqrt{n}} < \sqrt{\sqrt{n}[n\sqrt{n}]} \leq n, n \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \left[\sqrt{\sqrt{n}[n\sqrt{n}]}\right] \in \{n-1, n\},\ a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 4 \text{ etc.}$$

Roxana Diaconescu, R.M.(S) nr. 12/2011

67**. $\{\sqrt{n+p}\} = \{\sqrt{n}\} \Rightarrow \sqrt{n+p} - [\sqrt{n+p}] = \sqrt{n} - [\sqrt{n}] \Rightarrow \sqrt{n+p} - \sqrt{n}$
$= m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt{n+p} = \sqrt{n} + m \Rightarrow p = m^2 + 2m\sqrt{n} \Rightarrow n = k^2, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$
$\Rightarrow p = m(m+2k) \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \sqrt{n+p} - \sqrt{n} = 1$ și $\sqrt{n+p} + \sqrt{n} = p \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\sqrt{n} = p - 1 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{p-1}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$ unde p este număr prim mai mare cu 2, deci impar.

68**. <u>Generalizare</u>
Dacă $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \ldots, a_n \leq b_n,\ a_1 \leq a_2 \leq, \ldots, a_n,\ b_1 \leq b_2, \ldots, b_n,$

$$b_{n+1} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{n+1}}{n+1}.$$

Demonstrație.
Avem $(n+1)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \leq n(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n+1}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n[(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n)] +$
$+ \underline{a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n(b_{n+1})} < 0.$

69**. Ecuația se mai scrie $\sqrt{m} - [\sqrt{m}] = \sqrt{m+2011} - [\sqrt{m+2011}]$, de unde rezultă $\sqrt{m+2011} - \sqrt{m} = [\sqrt{m+2011}] - [\sqrt{m}] = p \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\sqrt{m+2011} == p + \sqrt{m} \Rightarrow 2011 = p^2 + 2p\sqrt{m} \in \mathbb{N}$ $(*) \Rightarrow$
$\Rightarrow m = k^2, k \in \mathbb{N}^*$, deci $(*)$ devine $2011 = p(p+2k)$, dar, cum 2011 este număr prim, rezultă $p = 1$ și $p + 2k = 2011 \Rightarrow k = 1005 \Rightarrow m = 1005^2$.

Alexandru Blaga, O.J., 2011

Scanned with OKEN Scanner

§ 3.

70***. Evident, ar fi suficient să arătăm că există o infinitate de perechi (x,y), $x,y \in \mathbb{N}$ astfel încât $a < \sqrt{x} - y < b \Leftrightarrow (a+y)^2 < x < (b+y)^2$. Prin urmare este suficient ca $(b+y)^2 - (a+y)^2 > 1$ $(*)$. Pentru că se alege $x \in \mathbb{N} \cap ((a+y)^2, (b+y)^2)$. Dar condiția $(*)$ se scrie:

$$y > \frac{1+a^2-b^2}{2(b-a)}$$

și care este îndeplinită pentru o infinitate de numere naturale y.

71***. Avem $p < p^2+q < p^2+p < (p+1)^2 \Rightarrow \sqrt{p^2+q} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

$a = 2p^2+q+2p\sqrt{p^2+q} \notin \mathbb{Q}$ și fie $b = \left(\sqrt{p^2+q} - p\right)^2 =$

$= 2p^2+q-2p\sqrt{p^2+q} \geq 0 \Rightarrow 2p\sqrt{p^2+q} \leq 2p^2+q \leq 2p^2+p \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{p^2+q} < p + \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{p^2+q} - p < \frac{1}{2} \Rightarrow b = (p^2+q-p)^2 < \frac{1}{4}$

și cum $a+b = 2(2p^2+q) = c \in \mathbb{N}^*, a = c-b > c - \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow c - 1 + \frac{3}{4} \Rightarrow \{a\} > \frac{3}{4}$, dar, cum $a = c-b = c-1+1-b \Rightarrow$

$\Rightarrow [a] = c-1$ și $\{a\} = 1-b > \frac{3.}{4}$

O.N., 2000

72**. a) Presupunem că $n > m$ și

$$\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\} = \left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} - \left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right] =$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m} - \left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{n} = k \in \mathbb{Z}$$ imposibil (demonstrație).

Fie $i \in \mathbb{N}^*$ astfel încât unul dintre numitorii $m+1, m+2, \ldots, n$ este de forma $2^i(2j+1)$. Dacă se aduce la același numitor rezultă:

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{n} = \frac{\text{impar}}{\text{par}} = k$$, fals. Așadar, $n = m$.

b) Avem $\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right]$

deci obținem ca la punctul a) $\frac{\text{impar}}{\text{par}} - k = r$. Dacă alegem $r = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\text{impar}}{\text{par}} = \frac{3k+1}{3}$, fals. Deci, $\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\} \neq \frac{1}{3}$.

Ion Savu

Scanned with OKEN Scanner

73*.** Fie $a_n = [\sqrt{n}]$ și $b_n = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]$ cu $a_1 = b_1 = 1$.

Dacă $n+1$ nu este pătrat perfect atunci $a_{n+1} = a_n$, iar dacă $n+1$ este pătrat perfect rezultă $a_{n+1} = a_n + 1$. Prin urmare, paritatea termenilor se schimbă atunci când rangul este pătrat perfect.

Evident $\left[\frac{n}{k}\right]$ reprezintă câtul împărțirii lui n la k și prin urmare,

$\forall\, k = \overline{1, n+1}, \varphi(n,k) = \left[\frac{n+1}{k}\right] - \left[\frac{n}{k}\right] = \begin{cases} 0, & k \nmid n+1 \\ 1, & k \mid n+1 \end{cases}$, deci

$b_{n+1} - b_n = \sigma(n+1)$, adică numărul divizorilor lui $n+1$. Acesta este impar dacă și numi dacă $n+1$ este pătrat perfect și deci paritatea termenilor șirului (b_n) se schimbă atunci când rangul este pătrat perfect, adică simultan cu (a_n). Așadar, a_n și b_n au, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, aceeași paritate.

Gh. Stoica, R.M.T., 2014

74.** a) Pentru $n \in [k^2, k^2+2k) \Rightarrow k < \sqrt{n} < \sqrt{k^2+2k} < k+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow [\sqrt{n}] = k \in \mathbb{N}^*$ și $k^2 < k^2+1 < n+1 < (k+1)^2 \Rightarrow k < \sqrt{n+1} <$
$< k+1 \Rightarrow [\sqrt{n+1}] = k$, deci $[\sqrt{n+1}] = [\sqrt{n}]$.

b) Dacă $n \in [k^2+2k, (k+1)^2) \Rightarrow k^2 < k^2+2k < n < (k+1)^2$;
$k < \sqrt{n} < k+1 \Rightarrow [\sqrt{n}] = k$ și $(k+1)^2 < n+1 < k^2+2k+2 < (k+2)^2$
$\Rightarrow k+1 < \sqrt{n+1} < k+2 \Rightarrow [\sqrt{n+1}] = k+1 \Rightarrow [\sqrt{n+1}] = [\sqrt{n}] + 1$.

Prin urmare: $[\sqrt{n+1}] = \begin{cases} [\sqrt{n}], & \text{dacă } n \in [k^2, k^2+2k) \\ [\sqrt{n}]+1, & \text{dacă } n \in [k^2+2k, (k+1)^2) \end{cases}$.

Concurs „Gh. Țițeica", 1990

75*.** Numărul pătratelor perfecte între a și b este $[\sqrt{b}] - [\sqrt{a}]$, (vezi exercițiul precedent) și numărul pătratelor perfecte între 0 și a este $[\sqrt{a}]$, de unde rezultă că $[\sqrt{b}] - [\sqrt{a}] = [\sqrt{a}] \Rightarrow [\sqrt{b}] = 2[\sqrt{a}] \Rightarrow b \approx 4a$.

Într-adevăr, dacă $[\sqrt{4a}] - [a] = [2\sqrt{a}] - [a] = \left[\sqrt{a} + \frac{1}{2}\right]$ (Hermite), iar a celor dintre 0 și a cu $[\sqrt{a}]$. Însă aceste numere diferă prin cel mult o unitate.

Ion Cucurezeanu

76*.** Probabilitatea căutată poate fi interpretată ca: $p = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_{(n)}}{n}$,
unde $P_{(n)} = \text{card}\{(k, k+1) \mid [(k+1)\sqrt{3}] - [k\sqrt{3}] = 1, k \le n\}$.
Fie $k\sqrt{3} = N_k + \alpha_k$ unde $\alpha_k \in [0,1), N_k = [k\sqrt{3}] \Rightarrow (k+1)\sqrt{3} =$
$= N_k + 1 + \sqrt{3} - 1 + \alpha_k$, deci condiția $[(k+1)\sqrt{3}] - [k\sqrt{3}] = 1$ este echivalentă cu $0 < \sqrt{3} - 1 + \alpha_k < 1$ sau $\alpha_k < 2 - \sqrt{3}$, deci

Scanned with OKEN Scanner

$p = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\{k \le n | \{\sqrt{3}k\} < 2-\sqrt{3}\}}{n}$.

Din Teorema lui Weyl rezultă că $p = 2-\sqrt{3}$.

Radu Gologan, G.M. seria A nr. 4/2009

77***. Fie $n^2 = \overline{a_1 a_2 \dots a_n ZU} = (10q+r)^2$, unde $r \equiv n(mod 10)$. Așadar, problema revine în a demonstra că Z impară $\Leftrightarrow r \in \{4,6\}$. Avem însă:

$Z = \left[\dfrac{n^2}{10}\right](mod 10)$ (1) și $\left[\dfrac{n^2}{10}\right] = \left[\dfrac{10q^2+20qr+r^2}{10}\right] =$

$= \left[10q^2+29r+\dfrac{r^2}{10}\right] = 10q^2+29r+\left[\dfrac{r^2}{10}\right]$ (2).

Din (1) și (2) rezultă că: $Z \equiv 2qr + \left[\dfrac{r^2}{10}\right](mod 10)$ (3).

Din relația (3) se deduce necesitatea și suficiența.

Necesitatea. Dacă Z impară, din (3) $\Rightarrow \left[\dfrac{r^2}{10}\right]$ impar $\Rightarrow r \in \{4,6\}$.

Suficiența. Dacă $r \in \{4,6\} \Rightarrow r^2 \in \{16,36\} \Rightarrow \left[\dfrac{r^2}{10}\right] \in \{1,3\} \Rightarrow Z$ impar.

b) Rezultă din punctul a), adică cifra u este 6, pentru ultima cifră a numărului n este 4 sau 6.

78**. a) Avem $x_1 = 0$ (0 este divizibil la 4); $x_2 = 4$ (numerele 12, 16, 20, 60 sunt divizibile cu 4); $x_3 = 3 \cdot 5 = 15$ (pentru că prima cifră nu poate fi 0, iar ultimele două cifre pot fi 12,16, 20, 60 și 00), iar $x_4 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ (pentru că prima cifră nu poate fi zero, iar pentru a doua cifră sunt 4 posibilități, iar ultimele două pot fi 12,15, 20, 60 sau 00);

b) Fie $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-2} pq}$ unde prima cifră poate lua 3 valori, și fiecare dintre cifrele $a_2, a_3 \dots a_{n-2}$ poate fi aleasă în 4 moduri, iar ultimele două cifre pot fi 12, 16, 20, 60 și 00. Prin urmare $x_n = 3 \cdot 4^{n-3} \cdot 5, \forall\, n \ge 3$ și $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 4, \forall\, n \ge 3 \Rightarrow 1 + \left[\dfrac{x_2}{x_1}\right] + \left[\dfrac{x_3}{x_2}\right] + \dots + \left[\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right] =$

$= 1+4+3+4(n-2) \equiv 4n$, deci $4n = 2016 \Rightarrow n = 504$.

Lucian Dragomir, O.J., 2016 (clasa VIII-a)

79***. Problema se reduce la cazul $m = n$, pentru că în cazul $m \le n-1$ este banal. Așadar, trebuie să demonstrăm că:

$(n-1) \left| \left[\dfrac{(n-1)!}{n}\right], \forall\, n \ge 5.\right.$

Distingem cazurile:

I. n nu este prim, adică $n = p \cdot q$ cu $2 \le p \le q \le n-2$ (deoarece $n > 4$); considerăm subcazurile $p < q$ și $p = q$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Dacă $p<q \Rightarrow (n-1)!=1\cdot 2\ldots p\cdot q\ldots (n-2)(n-1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{pq}=M_{n-1} \Rightarrow \left[\frac{(n-1)!}{n}\right]=\frac{(n-1)!}{pq}\vdots n-1;$

b) Dacă $p=q \Rightarrow n=p^2$ și $2\le p\le n-2, n\ge 5 \Rightarrow p\ge 3$ (pentru că $p^2=n\ge 5$). Din $n=p^2 \Rightarrow p=\sqrt{n} \Rightarrow 2p=2\sqrt{n}\le n-2$ (deoarece $n-2\sqrt{n}\ge 2 \Leftrightarrow \sqrt{n}(\sqrt{n}-2)\ge 2 \Leftrightarrow p(p-2)\ge 2$). Prin urmare
$2\le 3\le p<\cdots<2p\le n-2 \Rightarrow (n-2)!\vdots p^2 \Rightarrow \frac{(n-2)!}{n}\in\mathbb{N}^* \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\frac{(n-1)!}{n}\right]=\frac{(n-1)!}{n}=M_{n-1}.$

II. $n=p, p$ prim. Conform teoremei lui Wilson avem
$(p-1)!\equiv(-1)(\text{mod } p) \Rightarrow (p-1)!=M_p+p-1 \Rightarrow (p-1)!=$
$=pC+p-1 \Rightarrow C=\left[\frac{(p-1)!}{p}\right] \Rightarrow (p-1)|pC \Rightarrow (p-1)|C$
(pentru că $(p,p-1)=1$).

80***. Să presupunem prin absurd că toate numerele date sunt impare, atunci există $m\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $2m-1<2^n\sqrt{2}<2m$ (1) $\Rightarrow 4m-2<<2^{n+1}\sqrt{2}<4m$ și cum $\left[2^{n+1}\sqrt{2}\right]$ este impar $\Rightarrow 4m-1<$
$<2^{n+1}\sqrt{2}<4m$. Continuând la fel rezultă că $2^{n+1}\cdot m-1<2^{2n}\sqrt{2}<$
$<2^{n+1}\cdot m \Rightarrow m-2^{n-1}\sqrt{2}<\frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{m^2-2^{2n-1}}{m+\sqrt{2}\cdot 2^{n-1}}<\frac{1}{2^{n+1}}$ (2).
Dar pe de altă parte, din (1) $2m>2^n\sqrt{2} \Rightarrow m^2>2^{2n-1} \Rightarrow m^2-2^{2n-1}>1$.
Din (2)rezultă că $\frac{1}{m+2^{n-1}\cdot\sqrt{2}}<\frac{1}{2^{n+1}}$ (3).

Din (1) rezultă $2m-1<2^n\sqrt{2} \Rightarrow m<\frac{2^n\sqrt{2}+1}{2}$. Așadar
se obține succesiv 3) $2^{n+1}<2^{n-1}\sqrt{2}+m<2^{n-1}\sqrt{2}+\frac{2^n\sqrt{2}+1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{n+2}<2^{n+1}\sqrt{2}+1 \Rightarrow 2<\sqrt{2}+\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$, fals.

O.N., 2010

81***. Evident, pentru $n=1, A=\{1\}, \left[\sqrt{2}\right]=\sqrt{1}=1$.
Pentru $n\in\{4,5,6\} \Rightarrow \left[\sqrt{n+2}\right]=\left[\sqrt{n}\right]=2$.
Pentru $n\in\{9,10,11,12,13,14\} \Rightarrow \left[\sqrt{n+2}\right]=\left[\sqrt{n}\right]=3$.
În general, dacă $k^2\le n\le (k+1)^2-1 \Rightarrow \left[\sqrt{n}\right]=k$, pentru $2k+1$ valori ale lui n, dar $k^2+2\le n+2\le (k+1)^2+1 \Rightarrow \left[\sqrt{n+2}\right]=k$ dacă $k^2+2\le n+2\le (k+1)^2-1$ pentru $2k-1$ valori.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, pentru $2k-1$ valori ale lui n se obține: $[\sqrt{n+2}]=[\sqrt{n}]=k$.
Avem $[\sqrt{n+2}]=[\sqrt{n}]=44, n\in\{44^2,\ldots,2013\}=\{1936,\ldots,2013\}$.

Rezultă $\sum_{k=1}^{43}(2k-1)+78=1+3+5+\cdots+85+78=$

$=\frac{(85+1)43}{2}+78=43^2+78=1927.$

Artur Bălăucă, Concursul „Dimitrie Pompeiu", 2013

82***. Evident $x\in\mathbb{N}$ este soluție. Să presupunem că $x\notin\mathbb{N}$ și deci $\{x\}\neq 0$. Demonstrăm mai întâi următorul rezultat $x^n-[x]^n>1$ $(*)$. Într-adevăr, există n astfel încât $x^{n-1}>\frac{1}{\{x\}}\Rightarrow x^{n-1}(x-[x])>1\Rightarrow x^n-[x]^n>1$.

Revenind la problemă, avem $[x]^n\leq x^n\Rightarrow\sqrt[n]{[x]^n}\leq x$ și pe de altă parte $x\geq\sqrt[n]{[x]^n}\geq x-1\Rightarrow x-1<\sqrt[n]{[x]^n}\leq x$, rezultă $[x]^n=[x^n],\forall\, n\in\mathbb{N}$, deci $x^n-[x]^n<1$ în contradicție cu rezultatul $(*)$.

Mihai Piticari, Dan Popescu, „Al. Muller", 2004

83***. Din inegalitatea $x-1<[x]\leq x$, atunci

$$n>\frac{a+b}{c}-1+\frac{b+c}{b}-1\frac{a+c}{a}-1\geq 6-3=3,$$

deci $n\geq 4$. Vom arăta că pentru orice $n\geq 4$ există a,b,c astfel încât să aibă loc egalitatea. Pentru $n=4$ relația se verifică pentru $a=b=4,c=3$.
Pentru $n=2k,k\geq 3$, atunci avem soluția $a=b=k-1,c=2$.
Pentru $n=2k+1,k\geq 2$ atunci avem soluția $a=b=2k,c=2$.

Vasile Pop, R.M.T., 2016

84***. Evident $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m+1)=\frac{(2m+1)!}{2^m\cdot m!}$.

Exponenții a și b ai numărului prim p în descompunerea canonică a numerelor $(2m+1)!$, respectiv $m!$, sunt:

$a=\left[\frac{2m+1}{p}\right]+\left[\frac{2m+1}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{2m+1}{p^k}\right]$,

$b=\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{p^k}\right]$, de unde rezultă că exponentul lui p în descompunerea canonică a produsului $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m+1)$ va fi:

$a-b=\left[\frac{2m+1}{p}\right]-\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{2m+1}{p^2}\right]-\left[\frac{m}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{2m+1}{p^k}\right]-\left[\frac{m}{p^k}\right]$.

Ion Cucurezeanu

85***. În baza ipotezei, există $k,l\in\mathbb{Z}$ astfel încât: $x^2-x=k$ și $x^n-x=l$.
Ecuația $x^2-x-k=0$ are soluții reale, deci $a=1+4k\geq 0\Rightarrow k\in\mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

Arătăm prin inducție că $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, $(\exists)$ $a_m, b_m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x^m = a_m x + b_m$.
Pentru $m = 2$, considerăm $a_2 = 1$ și $b_2 = k$. Dacă pentru $m \geq 2$ fixat, avem $x^m = a_m x + b_m \Rightarrow x^{m+1} = a_m x^2 + b_m x = (a_m + b_m)x + a_m k$ și dacă considerăm $a_{m+1} = a_m + b_m$ și $b_{m+1} = a_m k$, demonstrația se încheie.
Din construcția șirurilor $(a_m)_{m\geq 2}, (b_m)_{m\geq 2}$ rezultă $a_m > 1$, dacă $k \geq 1$. În acest caz avem $a_n x + b_n = x + l \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$. Pe de altă parte x este rădăcină a polinomului $x^2 - x - k \in \mathbb{Z}[x]$ și deci $x \in \mathbb{Z}$. Dacă $k = 0$ atunci $x^2 = x$ și $x \in \{0,1\} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.

L. Panaitopol, O.N., 1997

86**. Notăm $\sqrt{n} = m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; conform ipotezei există $q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n + 1 = q(m + 1)$ $(*) \Rightarrow n = q(m + 1) - 1$. Din $m \leq \sqrt{n} < m + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow m^2 \leq n < (m + 1)^2 \Rightarrow m^2 + 1 \leq n + 1 < (m + 1)^2 + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m^2 + 1 \leq q(m + 1) < (m + 1)^2 + 1 \Rightarrow \frac{m^2 + 1}{m + 1} < q < m + 1 + \frac{1}{m + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m - 1 - \frac{1}{m + 1} < m - 1 + \frac{2}{m + 1} \leq q < m + 1 + \frac{1}{m + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |q - m| < 1 + \frac{1}{m + 1} <, m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2 \Rightarrow q \in \{m, m + 1\}.$$

Utilizând $(*)$, pentru $q = m$ rezultă $n = m^2 + 2m$.
Atunci $E_n = (n - 1)(n - 3) = (m^2 + m - 2)(m^2 + m - 4) =$
$= (m - 1)(m + 2)(m^2 + m - 4) \vdots (m - 1)$ și $E_n = (n - 1)(n - 3) =$
$= (m^2 + m - 1)(m^2 + 2m - 3) = (m - 1)(m + 3)(m^2 + m - 1) \vdots (m - 1)$

A. Golovanov, Rusia, Sankt Petersburg, 1998

87***. Să presupunem că a nu este întreg și fie $a = [a] + \{a\} = k + t$, $k \in \mathbb{Z}, t \in (0,1)$. Există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $mt < 1, (m + 1)t > 1$. Punând în relația dată $n = m, n = m + 1 \Rightarrow [mt] = 0$ și $[(m + 1)t] = 1$ și relația din enunț devine $a[mb] = bm[a]$ și respectiv $a[bm + b] = bm[a] + b[a] +$ $+b$ și cum $b[a] = a[b]$ (pentru $n = 1$) rezultă $a([bk + b] - [bk] - [b]) = b$. Deoarece expresia din paranteză nu poate lua decât valorile 0 sau 1, se obține $b = 0$ sau $b = a$, contradicție. Prin urmare a trebuie să fie întreg și pentru $n = 1$ rezultă b întreg.

Ion Cucurezeanu

88***. Pentru orice $m \in \mathbb{Z}$ există $b \in \mathbb{Z}$, astfel încât: $\sqrt{2} + b\sqrt{3} - 2 < n \leq$ $\leq \sqrt{2} + b\sqrt{3}$. Există cazurile:

a) $n = [\sqrt{2}] + [b\sqrt{3}]$;
b) $n = [\sqrt{2}] + [b\sqrt{3}] + 1 = [2\sqrt{2}] + [b\sqrt{3}]$;
c) $n = [\sqrt{2}] + [b\sqrt{3}] - 1 = [0\sqrt{2}] + [b\sqrt{3}]$.

Andrian Zanoski, Olimpiada Balcanică pentru juniori, 2000

Scanned with OKEN Scanner

89**. Soluția 1

a) Ecuația de tip Pell $m^2 - 2n^2 = -1$ are o infinitate de soluții $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Dacă $(m,n), m \geq 6$ este o astfel de soluție, atunci:

$\{n\sqrt{2}\} = \left\{\sqrt{m^2+1}\right\} < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{6} < 3 - \sqrt{2} \quad \left(m < \sqrt{m^2+1} < m + \frac{1}{m}\right)$.

Soluția 2

Arătăm că există o infinitate de numere naturale interesante, dar pentru care $\{n\sqrt{2}\} < \frac{1}{10} < 3 - 2\sqrt{2}$.

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și numerele $k\sqrt{2}, 2k\sqrt{2}, \ldots, 11k\sqrt{2}$ (1) și intervalele $\left[0, \frac{1}{10}\right], \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right], \ldots, \left[\frac{9}{10}, \frac{10}{10}\right]$; conform principiului cutiei, vor exista două dintre numerele din (1) ale căror părți fracționare se află în același interval. Fie ele $pk\sqrt{2}, qk\sqrt{2}$, cu $p < q$.

Avem $\{pk\sqrt{2}\} \leq \{qk\sqrt{2}\}, (q-p)k\sqrt{2} \leq \frac{1}{10} < 3 - 2\sqrt{2}$.

Prin urmare $(q-p)k$ este număr interesant. Dacă $\{pk\sqrt{2}\} > \{qk\sqrt{2}\}$, atunci $\{(q-p)k\sqrt{2}\} > \frac{9}{10}$.

Evident că șirul $a_m = \{m(q-p)k\sqrt{2}\}, m = 1,2,3, \ldots$ începe să descrească cu $0 < 1 - a_1 < \frac{1}{10}$, deci de la un rang încolo există un $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $\{t(q-p)k\sqrt{2}\} < \frac{1}{10}$, deci $k \in \mathbb{N}$ are o infinitate de multipli interesanți.

Prin urmare există o infinitate de numere naturale interesante.

b) $\{n\sqrt{2}\} < \frac{1}{10} \Rightarrow [(n+1)\sqrt{2}] = [n\sqrt{2} + \sqrt{2}] = [n\sqrt{2}] + 1$ și $[(n+2)\sqrt{2}] = [n\sqrt{2} + 2\sqrt{2}] = [n\sqrt{2}] + 2$ și deoarece

$\{n\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\} = \{n\sqrt{2}\} + \{2\sqrt{2}\} < \frac{1}{10} + 0{,}84 < \frac{1}{10} + \frac{84}{100} = \frac{94}{100} < 1$

Cristinel Mortici, Cornel Stoicescu, R.M.T., 2012

90***. Ținând seama de exponentul lui p în descompunerea canonică a lui $n!$, rezultă că: $n - 1 \leq \sum_s \left[\frac{n}{p^s}\right]$ (1).

Dar $\sum_{s \geq 1} \left[\frac{n}{p^2}\right] < \frac{n}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right) = \frac{n}{p-1}$, și din (1) deducem că

$n - 1 < \frac{n}{p-1} \Rightarrow p - 1 < \frac{n}{n-1} \Rightarrow p - 1 < 1 + \frac{1}{n-1} \leq 2 \Rightarrow p - 1 < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Din $2^{n-1}|n!$ deducem: $n-1 \leq \sum_{s\geq 1}\left[\frac{n}{2^s}\right]$ (2).

Pentru n impar și $n>3$, relația (2) nu este posibilă fiindcă exponentul lui 2 în descompunere canonică a lui $n!$ fiind același ca în $(n-1)!$, ar trebui să avem:

$$n-1 \leq \sum_{s\geq 1}\left[\frac{n-1}{2^s}\right] < \sum_{s\geq 1}\frac{n-1}{2^s} = (n-1)\sum\frac{1}{2^s} = n-1.$$

Fie n par, deci $n=2^k m$ cu $k\geq 1, m$ impar și relația (2) se scrie:

$$2^k m - 1 = \sum_{s\geq 1}\left[\frac{2^k m}{2^s}\right] = 2^{k-1}m + \cdots + m + \sum_{i\geq 1}\left[\frac{m}{2^i}\right] (3)$$

și cum $2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+1 = 2^k-1$, din (3)deducem $m-1 = \sum_{i\geq 1}\left[\frac{m}{2^i}\right]$

adică o relație de forma (2), cu m impar, care nu este posibilă decât pentru $m=1$. Rezultă, deci, $n=2^k$, cu k natural arbitrar.

G.M. nr. 1/1980, R.M.T nr. 1/1990, Olimpiadă Canada, 1985

91**. a) Fie $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $k > \frac{1}{b-a}\left(2-\frac{b^2-a^2}{4}\right)$ de unde rezultă că lungimea intervalului $\left(\left(k+\frac{a}{2}\right)^2, \left(k+\frac{b}{2}\right)^2 - 1\right)$ este mai mare decât 1 și prin urmare el conține cel puțin un număr natural, notat cu n. Avem:

$$\left(k+\frac{a}{2}\right)^2 < n < n+1 < \left(k+\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow k+\frac{a}{2} < \sqrt{n} < \sqrt{n+1} < k+\frac{b}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\sqrt{n}] = [\sqrt{n+1}] = k \text{ de unde rezultă } \frac{a}{2} < \sqrt{n}-k < \sqrt{n+1}-k < \frac{b}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} < \{\sqrt{n}\} < \{\sqrt{n+1}\} < \frac{b}{2} \Rightarrow a < \{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n+1}\} < b.$$

b) Răspunsul este negativ. Pentru $\alpha=1$, presupunem prin absurd că există $\alpha\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$\{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n+1}\} = 1 \Rightarrow \sqrt{n} - [\sqrt{n}] + \sqrt{n+1} - [\sqrt{n+1}] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}+\sqrt{n+1} = [\sqrt{n}] + [\sqrt{n+1}] + 1 \Rightarrow \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \in \mathbb{N}^*, \text{ fals.}$$

Cristinel Mortici

92**. Împărțim mulțimea fracțiilor ireductibile $\frac{p}{q}, 1\leq q\leq n$, din interval, în două submulțimi: $A = \left\{\frac{u_i}{v_i}\middle| i=1,2,\ldots,r, 1<\sqrt{i}\leq\frac{n}{2}\right\}$ și

$$B = \left\{\frac{x_i}{y_i}\middle| i=1,2,\ldots,p, \frac{n}{2} < y_i \leq n\right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 14 | Sume

§ 1. Sume elementare cu radicali (I)

1. Să se determine valorile numerelor naturale $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ pentru care au loc egalitățile:

a) $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right] + \left[\sqrt{2\cdot 3}\right] + \left[\sqrt{3\cdot 4}\right] + \cdots + \left[\sqrt{n\cdot(n+1)}\right] = 5050;$

b) Să se calculeze: $S_n = \left[\sqrt{1\cdot 2}\right]\cdot\left[\sqrt{2\cdot 3}\right] + \left[\sqrt{2\cdot 3}\right]\cdot\left[\sqrt{3\cdot 4}\right] + \cdots + \left[\sqrt{n\cdot(n+1)}\right]\cdot\left[\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}\right] = 3080.$

2. Fie $E_1(n) = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \cdots + [\sqrt{n}]$ și

$E_2(n) = -[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] - \sqrt{3} + \cdots + (-1)^n[\sqrt{n}]$

a) Să se rezolve ecuația $E_1(x^2) = a$ unde a și x sunt numere naturale prime între ele;

b) Să se calculeze $E_2(2000)$.

3. Fie sumele:

a) $S_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{(n+1)}};$

b) $S_2 = \dfrac{1}{1\sqrt{1}+2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{n\sqrt{n}+(n+1)\sqrt{(n+1)}};$

c) $S_3 = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)}}.$

Să se calculeze partea întreagă și partea fracționară a lui $S_1, S_2, \dfrac{\sqrt{n}}{S_3}$.

4*. Să se determine partea întreagă a sumelor:

a) $S_1 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{1000000}};$

b) $S_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{1000000}}.$

5. Să se arate că:

a) $\left[1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{10000}}\right] = 198;$

Scanned with OKEN Scanner

b) $\left[1+2^{-\frac{2}{3}}+3^{-\frac{2}{3}}+\cdots+(10^9)^{-\frac{2}{3}}\right]=2997;$

c) $[2\pi]+\left[\frac{[3\pi]}{2}\right]+\left[\frac{[4\pi]}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{[2015\pi]}{3}\right]=6047.$

6. Fie $a_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}, \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$
Să se calculeze: $E_n=[a_1]+[2a_2]+[3a_3]+\cdots+[na_n].$

7. Să se calculeze:

a) $S_1=\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k^2-k+1}\right];$

b) $S_2=\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k^2+k+1}\right];$

c) $S_3=\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k(k+1)}\right];$

d) $S_4=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\right];$

e) $S_5=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^2+1}{k^2-k+1}\right];$

f) $S_6=\left[\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\left[\sqrt[3]{n^3+2n+1}\right]^2}\right].$

8. Demonstrați că:

$$\left[\sqrt{1+3+5+\cdots+(2n-1)}\right]=\sqrt{[2+4+6+\cdots+2n]}, \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

9. Fie $S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$. Se cere: $[4\,S_n]$.

10. Să se arate că $A_n=\left[\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}+\cdots+\sqrt{n^2+n}\right]$ este pătrat perfect.

11*. Fie $S=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2000}}$. Să se calculeze $[S]$.

12*. Să se calculeze suma:

$$S_n=\left[\frac{2^n+1}{2^{n-1}+1}\right]+\left[\frac{3^n+1}{3^{n-1}+1}\right]+\cdots+\left[\frac{m^n+1}{m^{n-1}+1}\right].$$

13. Fie $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ și $S_n'=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha\geq 2$. Să se determine $[S_n]$ și $[S_n']$.

Scanned with OKEN Scanner

14. Să se calculeze:

$$S_n = \left[\sqrt{1^2+1}\right] + \left[\sqrt{2^2-1}+\sqrt{2^2+1}\right] + \left[\sqrt{3^2-1}+\sqrt{3^2+1}\right] + \\ + \cdots + \left[\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right].$$

15. Să se calculeze:

a) $S_1 = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k^2+k+1}+\sqrt{k^2-k+1}\right]$;

b) $S_2 = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k^2+k+1}+\sqrt{k^2-k+1}\right]}$.

16. Fie $S_n = \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Să se determine $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ pentru care:

a) $\{S_n\} \in \left[\frac{1}{15}, \frac{1}{7}\right]$;

b) $\{S_n\} \in \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right]$.

17*. Să se calculeze: $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k^{n+1}+k+1}{k^n+1}\right]$.

18*. Să se calculeze suma:

$$S_n = \frac{2\cdot 1}{1^4+2\cdot 1^3+1^2} + \frac{2\cdot(1+2)}{2^4+2\cdot 2^3+2^2} + \cdots + \frac{2\cdot(1+2+3+\cdots+n)}{n^4+2\cdot n^3+n^2},$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$ și să se determine $\{S_n\}$ și $[S_n]$.

19*. Calculați:

a) $S_n = \left[\frac{1-\sqrt{1}}{1-\sqrt{1+\sqrt{1}}}\right] + \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right] + \cdots + \left[\frac{n-\sqrt{n}}{n-\sqrt{n+\sqrt{n}}}\right]$;

b) $S'_n = \left[\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}\right] + \left[\frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}+1}\right] + \cdots + \left[\frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+1}\right]$.

20. Să se calculeze:

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left[\sqrt{k^2+k}\right]\left[\sqrt{k^2+3k+2}\right]}$;

b) $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left[\sqrt{4k^2-4k+3}\right]\left[\sqrt{4k^2+4k+3}\right]}$.

Scanned with OKEN Scanner

21. Fie $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k^2+1)}{k^3+1}$. Să se calculeze $[S_n]$.

22. Să se calculeze $\{S_n\}$ și $[S_n]$ unde: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left[\sqrt{k^4+4k^3+5k^2+4k+1}\right]}$.

23. Să se calculeze suma: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{k\frac{n}{n+1}\right\}$.

24. Fie suma: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}(k+1)+\sqrt[3]{k^2(k+1)^2}+k\sqrt[3]{k+1}}$.

Să se calculeze $[S_n]$ și $\{S_n\}$, $\left[1+\sqrt[3]{2}S_n\right]$.

25.** Fie $A = \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}} + \frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{398}+\sqrt{399}}$.

Să se arate că $[A] = 5$.

26.** Fie $a_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots + \frac{n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$.

Să se calculeze $\{2a_n\}$.

§ 2. Sume elementare cu radicali (II)

27. Să se arate că: $\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \cdots + \left[\sqrt{n^2-1}\right] = \frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)$.

28. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ are loc egalitatea:

$$\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \cdots + \left[\sqrt{n^2-1}\right] + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n^3.$$

29. Să se calculeze: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k^2+k+1}\right] + \left[\sqrt{k^2-k+1}\right]$.

30*. Să se arate că:

a) $\left[\sqrt{1}\right]^2 + \left[\sqrt{2}\right]^2 + \left[\sqrt{3}\right]^2 + \cdots + \left[\sqrt{n^2-1}\right]^2 = \frac{n(n-1)(3n^2-n-1)}{6}$;

b) $1\cdot\left[\sqrt{1}\right]^2 + 2\cdot\left[\sqrt{2}\right]^2 + 3\cdot\left[\sqrt{3}\right]^2 + \cdots + (n^2-1)\left[\sqrt{n^2-1}\right]^2 =$

$= \frac{(n-1)n(n+1)(2n-1)(2n+1)(5n-6)}{60}$.

31*. Fie șirul:

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{1^2\cdot 3} - \frac{1}{1\cdot 3^2}} + \sqrt{\frac{1}{2^2\cdot 4} - \frac{1}{2\cdot 4^2}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{n^2(n+2)} - \frac{1}{n(n+2)^2}}.$$

Să se calculeze $\left[\sqrt{2}a_n\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

32.** Să se calculeze:

a) $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k(k+1)}\right]$;

b) $Q_n = \prod_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k^2+k+1}\right]$;

c) $R_n = \prod_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k^2-k+1}\right]$.

33*. Să se arate că: $\left[\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2}}\right] = 2n-2, \forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

34.** Să se calculeze: $S_n = \sum_{n=1}^{n} \left[\sqrt{k^2+10k}\right]$.

35. Fie şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$:

a) $a_n = \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$;

b) $b_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n-1}{n!}$.

Să se calculeze $[a_n], [b_n], [2a_n], [2b_n]$.

36*. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care:

a) $\left[\sqrt{4n^2+1}\right] + \left[\sqrt{4n^2+2}\right] + \left[\sqrt{4n^2+3}\right] + \cdots + \left[\sqrt{4n^2+4n+3}\right] + \left[\sqrt{4n^2+4n+4}\right] = 18n^2 + 2021$;

b) $\left[\sqrt{4n^2+1}\right] + \left[\sqrt{4n^2+2}\right] + \cdots + \left[\sqrt{4n^2+12n}\right] = 2517$.

37*. Fie suma:

$$S_n = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3.$$

38.** Fie $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2-k} + \sqrt{n^2+k}$. Să se determine $[S_n]$.

39*. Să se calculeze: $S_n = \sum \left[10\sqrt{k^2+k} - 10\left[\sqrt{k^2+k}\right]\right]$.

40*. Fie $a_n = \sqrt{n^4+1} + \sqrt{n^4+2} + \cdots + \sqrt{n^4+n}, n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $[a_n]$.

Scanned with OKEN Scanner

41*.Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2^3}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2^n}}}\right]=n.$$

42*. Să se calculeze: $S_n=\left[\sqrt[4]{1}\right]+\left[\sqrt[4]{2}\right]+\left[\sqrt[4]{3}\right]+\cdots+\left[\sqrt[4]{n^4-1}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

43*. Fie n un număr natural impar. Demonstrați că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\left[\sqrt{n^2}\right]+\left[\sqrt{n^2+2}\right]+\left[\sqrt{n^2+4}\right]+\cdots+\left[\sqrt{(n+2)^2-2}\right]=$
$=(n+1)(2n+1)$;

b) $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\left[\sqrt{5}\right]+\cdots+\left[\sqrt{4n^2+4n-1}\right]=\frac{n(n+1)(8n+1)}{3}$.

44*. Să se arate că: $2^{[\sqrt{2}]}+2^{[\sqrt{3}]}+\cdots+2^{[\sqrt{n^2-1}]}=2^n(2n-3), \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

45*. Fie $a_n=\frac{1}{[1\cdot\sqrt{2}]}+\frac{1}{[2\cdot\sqrt{5}]}+\frac{1}{[3\cdot\sqrt{10}]}+\cdots+\frac{1}{[n\cdot\sqrt{n^2+1}]}$.

Să se calculeze $[a_n]$.

46**. Fie numerele:

$$a=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt{4n^2}};$$

$$b=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{4n^2-1}}.$$

Să se determine $[a]$ și $[b]$.

47*. Să se arate că:

$$\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\left[\sqrt[3]{3}\right]+\cdots+\left[\sqrt[3]{n^3-1}\right]=\frac{(n-1)n^2(3n+1)}{4},$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*-\{13\}$.

48**. Să se determine:

$$\left[\frac{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}+\cdots+\sqrt{(n+2m)(n+2m+1)}}{2m+1}\right].$$

49**. a) Fie $a \in \mathbb{N}^*$ și $b_1=\sqrt{a(a+1)}, b_n=\sqrt{a(a+1)+b_{n-1}}, \forall n \geq 2$. Să se arate că $[b_n]=a, n \geq 1$;

b) Să se determine $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât să avem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^3}{\left[\sqrt{k(k+1)+\sqrt{k(k+1)}}\right]+x}=\frac{n(2n^2+9n+13)}{6}.$$

Scanned with OKEN Scanner

$\oint$ 3. Sume elementare cu radicali (III)

50**. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și

$$E_n = \sqrt{\frac{1}{(n-1)^2} + \sqrt{\frac{1}{(n-2)^2} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + 1}}}, \text{ cu } n-1 \text{ radicali.}$$

Să se arate $[nE_n] = n, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

51**. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n^2+n} \left[\sqrt{k} + \frac{1}{2}\right] = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}, (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$$

52**. Să se calculeze suma: $S_n = \sum_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \left[\frac{\sqrt{1+8k}-1}{2}\right], n \in \mathbb{N}^*$.

53. Să se calculeze: $\left[\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{k}}\right], n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

54**. Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Calculați partea întreagă a șirului:

$$a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{2!}} + \sqrt{1 + \frac{2}{3!}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n-1}{n!}} + \sqrt{n + \frac{1}{n!}}.$$

55**. Fie $a_k = \sqrt{4n^4 + k}, n, k \in \mathbb{N}^*$ și $a = \sum_{k=1}^{8n^2} [a_k]$.

a) Arătați că a nu poate fi pătrat perfect, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$;

b) Dacă $4n^2 + 1 < 2013 < 8n^2$ și $a = \sum_{k=1}^{2013} [a_k]$,

aflați n astfel încât $a - 2013 = 2011 \cdot 800$.

56**. a) Să se calculeze: $\sum_{k=1}^{n(n+1)} [\sqrt{k}]$;

b) Să se determine suma: $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\sqrt{k}],\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$;

c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\sqrt{k}]$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se afle cea mai mare valoare a lui n pentru care S_n este număr prim.

57. Să se calculeze suma: $S = \left[\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

58. Să se arate că: $[S_n] = \left[\sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \cdots + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}\right] = n$.

59. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

$$\left[\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{3}} + \sqrt[4]{\frac{3}{4}} + \cdots + \sqrt[n+1]{\frac{n}{n+1}}\right] = n - 1.$$

60. Să se arate că: $\left[\sum_{k=1}^{n} \sqrt[2k+1]{\frac{2k}{2k-1}}\right] = n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

61.** Să se determine partea întreagă a numărului: $a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt[2k+2]{\frac{k+1}{k}}$,

unde $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

62*. Fie $F_n = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{4}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n+1}}$. Să se determine $[F_n]$.

63. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ o progresie aritmetică cu rația $r \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \in \mathbb{N}^*$ și

$S_n = \sqrt[a_2]{\frac{a_2}{a_1}} + \sqrt[a_3]{\frac{a_3}{a_2}} + \cdots + \sqrt[a_n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}} + \sqrt[a_{n+1}]{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$. Să se determine $[S_n]$.

64*. Arătați că: $\left[\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} + \cdots + \sqrt{n^2+2n}\right] = 2n^2 + n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

65.** Fie $a_k > 0, k = \overline{1,n}$ cu $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2$ și

$E_n = \frac{1}{\sqrt{1+a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+a_n}}$. Să se calculeze $[E_n]$.

66.** Să se calculeze partea întreagă a lui: $S = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$.

67.** Să se arate că:

$\left[\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2-n+1} + \sqrt{n^2-n+2} + \cdots + \sqrt{n^2+n}\right] = 2n^2 + n - 1$,

$(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

68. Demonstrați că: $\left[\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{4k^2-2k}\}}\right]=2, \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$

69. Să se demonstreze egalitatea: $\left[\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{\frac{1}{k^4+k^2+1}}\right]=n, \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$

70.** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, avem:

$$\left[\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}+\cdots+\sqrt{n^2+n}\right]\equiv n^2+\left[\frac{n}{4}\right].$$

71*.** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, avem:

$$\left[\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{4n^2+2}+\cdots+\sqrt{4n^2+n}\right]=2n^2+\left[\frac{n}{8}\right].$$

72*.** Să se determine $m\in\mathbb{N}^*$, știind că: $\sum_{k=1}^{m}\left[\sqrt[3]{k}\right]=\left[\sqrt[3]{m}\right]^4.$

73.** Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ este adevărată inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n^2}\{\sqrt{k}\}\leq\frac{n-1}{2}.$$

74.** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, avem:

$$\left[\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n+2}+\cdots+\sqrt{n^2+2n}\right]\equiv n^2+\left[\frac{3n-1}{4}\right].$$

75*.** Să se arate că:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n^2}(-1)^k\left[\sqrt{k}\right]=\begin{cases}\frac{(-1)^n n}{2}, & \text{dacă } n \text{ par}\\ \frac{(-1)^n n}{2}-\frac{1}{2}, & \text{dacă } n \text{ impar}\end{cases}=$$

$$=\frac{(-1)^n n}{2}+\frac{(-1)^n-1}{4}=(-1)^n\left[\frac{n+1}{2}\right], \text{unde } n\in\mathbb{N}^*.$$

76*.** Să se determine partea întreagă a expresiei:

$$E=\sqrt{(m+1)^2-(m+1)-1+\sqrt{(m+2)^2-(m+2)-1+\cdots+\sqrt{\ldots+\sqrt{(m+n)^2-(m+n)-1}}}}$$

unde $m\in\mathbb{N}^*$ fixat și $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

77*.** Să se arate că:

a) $\left[\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right]=\left[\frac{2n}{3}\right], \forall\, n\in\mathbb{N}^*;$

b) $\left[\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n^2}}{n}\right]=\left[\frac{2n^2+1}{3}\right], \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$

Scanned with OKEN Scanner

78*. Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\left[\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+2n-1}+\cdots+\sqrt{n^2+n+1}\right]=$$

$$=\left[\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2+n-2}+\cdots+\sqrt{n^2+1}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

79*. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\left[\sqrt{4k^2+3}\right]+[4k^2+8k+5]\right)\left(\left[\sqrt{4k^2+4k+3}\right]+[4k^2+12k+11]\right)}=$$

$$=\frac{n}{16(n+1)}.$$

80*. Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left[\sqrt{k}+\frac{1}{2}\right]}=\left[\frac{\sqrt{4n-3}-1}{2}\right]+\frac{n}{\left[\frac{\sqrt{4n-3}+1}{2}\right]}.$$

81. Să se determine partea întreagă a expresiei:

$$E_{m,n}=\sqrt[3]{m^3-m+\sqrt[3]{m^3-m+\cdots\sqrt[3]{\sqrt[3]{m^3-m}}}}+$$

$$+\sqrt{n^2-n+\sqrt{n^2-n}+\cdots+\sqrt{n^2-n}},\forall\, m,n\in\mathbb{N}^*-\{1\}.$$

82. Fie $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ și $x_k > 0, k = \overline{1,n}$ astfel încât:

$$\sqrt[3]{[x_1][x_2]\ldots[x_n]}=\frac{1}{\{x_1\}+\{x_2\}+\cdots+\{x_n\}}.$$

Dacă $\{x_1\}+\{x_2\}+\cdots+\{x_n\} \in \mathbb{N}$ și $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, determinați S.

83. Fie $x_k \geq 0, k = \overline{1,n}$ și $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n, \forall\, n \geq 2$ și

$$E(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sqrt{[x_1]+\{x_2\}}+\sqrt{[x_2]+\{x_3\}}+\cdots+$$
$$+\sqrt{[x_{n-1}]+\{x_n\}}+\sqrt{[x_n]+\{x_1\}}.$$

Se cere: a) $\max\limits_{x_k} E(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;

a) Să se determine $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pentru care este atinsă valoarea maximă.

84*. Să se arate că: $\left[\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{n}\right]=\left[\frac{3n-1}{2}\right].$

Scanned with OKEN Scanner

$\oint$ 4. Sume fără radicali

85. Fie $a_k = \left[\frac{k^2}{4}\right]$ și $b_k = \left[\frac{k}{2}\right]$. Să se calculeze $\sum_{k=2}^{2009} \frac{a_k}{b_k}$.

86. Calculați suma: $\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \left[\frac{n+2^2}{2^3}\right] + \cdots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \cdots$.

87. Dacă $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left[\frac{k^2}{k+1}\right]$, atunci să se arate că:

$$[2^{-n-1} \cdot S_n] = \frac{n}{2} - 1, \text{pentru } n \text{ par.}$$

88*. Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Să se demonstreze că:

$$[a] + [2a] + \cdots + [na] = \frac{[na](n+1)}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

dacă și numai dacă $a \in \mathbb{Z}$.

89. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că: $\sum_{k=1}^{n} [ka]^3 = \left(\frac{[na]([na]+[a])}{2}\right)^2$

dacă și numai dacă $a \in \mathbb{Z}$.

90. Fie $m, n > 1$ două numere naturale. Să se arate că:

$$\left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{m+1}{n}\right] + \left[\frac{m+2}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{m+n-1}{n}\right] = m.$$

91. Să se calculeze suma: $\left[\frac{2^n+1}{2^{n-1}+1}\right] + \left[\frac{3^n+1}{3^{n-1}+1}\right] + \cdots + \left[\frac{m^n+1}{m^{n-1}+1}\right]$,

unde $m, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

92. Să se determine suma:

$$S(m,n) = \left[\frac{2^{n+1}+1}{2^{n-1}+1}\right] + \left[\frac{3^{n+1}+1}{3^{n-1}+1}\right] + \cdots + \left[\frac{m^{n+1}+1}{m^{n-1}+1}\right],$$

unde $m, n \in \mathbb{N}^*, m \geq 2, n \geq 3$.

93. Să se calculeze suma: $S = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right], n \in \mathbb{N}^*$.

94*. Să se calculeze suma: $S = \sum_{k=1}^{n} \left[2^k x + \frac{1}{2}\right], \forall\, x \in \mathbb{R}$.

95. Fie n un număr natural de forma $n \in \{4k, 4k+1\}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ și notăm $m = \left[\frac{n}{2}\right]$. Demonstrați că: $\sum_{p=1}^{m} \left[\frac{p}{2}\right] = \left(\left[\frac{n}{4}\right]\right)^2$.

Scanned with OKEN Scanner

96*. Calculați: $S_n = \left[\frac{1^2}{2}\right] + 2^1 \cdot \left[\frac{2^2}{3}\right] + 2^2 \cdot \left[\frac{3^2}{4}\right] + \cdots + 2^{n-1} \cdot \left[\frac{n^2}{n+1}\right]$.

97. Pentru ce valori ale lui n suma: $S_n = \sum_{k-1}^{n} \left[\frac{k}{2}\right]$ este pătrat perfect.

98. Să se calculeze: $\left[\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2+k+1}\right]$.

99***. Se consideră numerele $x_k \geq 1, k = \overline{1,n}$. Determinați intervalul maximal $[a,b)$ cu $x_k \in [a,b), k = \overline{1,n}$ astfel încât:

$$[x_1^2 + 1] + [x_2^2 + 2] + \cdots + [x_n^2 + n] = \frac{n(n+3)}{2}.$$

100**. Fie numerele $A = \left\{\frac{2006}{2007}\right\} + \left\{2 \cdot \frac{2006}{2007}\right\} + \cdots + \left\{2006 \cdot \frac{2006}{2007}\right\}$ și

$$B = \left\{\frac{2008}{2007}\right\} + \left\{2 \cdot \frac{2008}{2007}\right\} + \left\{3 \cdot \frac{2008}{2007}\right\} + \cdots + \left\{2006 \cdot \frac{2008}{2007}\right\}.$$

Să se compare numerele $[A]$ și $[B]$.

101**. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât:

a) $\left[a + \frac{19}{100}\right] + \left[a + \frac{20}{100}\right] + \cdots + \left[a + \frac{91}{100}\right] = 584$;

b) $\left[b + \frac{19}{100}\right] + \left[b + \frac{20}{100}\right] + \cdots + \left[b + \frac{91}{100}\right] = 556$.

Să se determine $[100a]$ și $[100b]$.

102**. a) Să se arate că

$$\left\{\frac{2}{2011}\right\} + \left\{2 \cdot \frac{2}{2011}\right\} + \left\{3 \cdot \frac{2}{2011}\right\} + \cdots + \left\{2010 \cdot \frac{2}{2011}\right\} = 1005;$$

b) Dacă p este un număr natural prim cu 2011, demonstrați că:

$$\left\{\frac{p}{2011}\right\} + \left\{2 \cdot \frac{p}{2011}\right\} + \left\{3 \cdot \frac{p}{2011}\right\} + \cdots + \left\{2010 \cdot \frac{p}{2011}\right\} = 1005.$$

103***. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Determinați $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, c \in \mathbb{R}$ pentru care

$$[x] + [x + a_1] + [x + a_2] + \cdots + [x + a_{n-1}] = [cx], \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

104***. Să se calculeze suma: $S_n(x) = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \left[\frac{x+i}{j}\right]$.

105. Să se demonstreze că avem:

$$\left[\frac{4}{p}\right] + \left[\frac{8}{p}\right] + \left[\frac{12}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{2(p-1)}{p}\right] = \left[\frac{p+1}{4}\right], \text{ unde } p \neq 2, p \text{ prim.}$$

106***. Să se arate că

$$\left[\frac{4}{2n+1}\right] + \left[\frac{8}{2n+1}\right] + \left[\frac{12}{2n+1}\right] + \cdots + \left[\frac{4n}{2n+1}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Scanned with OKEN Scanner

107***. Să se arate că:

$$\left[\frac{1^2}{2}\right]+\left[\frac{2^2}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n^2}{2}\right]=\frac{1}{3}\left\{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n}{2}+1\right](2n+1+2(-1)^{n+1})\right\},\forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

108. Să se demonstreze că, oricare ar fi $m,n\in\mathbb{N}^*$, avem:

$$\left[\frac{1}{n}\right]+\left[\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{n}\right]=\left[\frac{m}{n}\right]\left(1+m-\frac{n}{2}\left(1+\left[\frac{m}{n}\right]\right)\right).$$

109**. Fie p_n al n-lea număr, unde $S_n=\frac{1}{p_1p_2}+\frac{1}{p_2p_3}+\cdots+\frac{1}{p_np_{n+1}}, n\in\mathbb{N}^*$.

Să se determine $[12S_n]$.

110***. Pentru fiecare $x\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}-\{1\}$, fie

$$S_m=\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{x+jn^m}{n^{m+1}}\right].$$ Să se calculeze $\sum_{m=0}^{\infty}S_m$.

111. Să se arate că, pentru orice $m,n\in\mathbb{N}^*$, avem:

$$\left[m(m+1)\left(\frac{1}{mn+1}+\frac{1}{mn+2}+\cdots+\frac{1}{mn+n}\right)\right]=m.$$

112***. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_n=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right], \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Să se arate că $a_n=2+a_{n-1}$, dacă și numai dacă n este număr prim.

113**. Să se arate că, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, avem $\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{neP}\right]=p$.

114. Fie $a_1<a_2<\cdots<a_n$ numere naturale și $n=2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}$. Atunci

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\left[\frac{n}{2^3}\right]+\cdots=n-k.$$

115. Să se demonstreze identitatea:

$$\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]=\begin{cases}\left(\frac{n}{2}\right)^2 & \text{, dacă } n \text{ par}\\ \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2} & \text{, dacă } n \text{ impar}\end{cases}.$$

116. Să se demonstreze identitatea:

$$\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{3}\right]=\begin{cases}\frac{n(n-1)}{6} & \text{, dacă } n=3m\\ \frac{n(n-1)}{6} & \text{, dacă } n=3m+1\\ \frac{(n-2)(n+1)}{6} & \text{, dacă } n=3m+2\end{cases}.$$

Scanned with OKEN Scanner

117. Să se calculeze sumele:

a) $S_1 = \sum_{k=1}^{n^2} \left\{\frac{k}{3}\right\}$;

b) $S_1 = \sum_{k=1}^{n^2} \left[\frac{k}{3}\right]$.

118. Să se calculeze suma:

$$S = \sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{k^3}{p}\right], \text{ unde } p \in \mathbb{N}^* - \{1\} \text{ număr prim, impar.}$$

119. Să se arate că, pentru orice p prim impar, avem:

$$\left\{\frac{1^p}{p^2}\right\} + \left\{\frac{2^p}{p^2}\right\} + \left\{\frac{3^p}{p^2}\right\} + \cdots + \left\{\frac{(p-1)^p}{p^2}\right\} = \frac{p-1}{2}.$$

120. Să se arate că, pentru orice p prim impar și orice $a \in \{2,3,\ldots,p-1\}$ cu proprietatea $p|a^k - 1, \forall\, k \in \{1,2,3,\ldots,p-2\}$, avem:

$$\left[\frac{a}{p}\right] + \left[\frac{a^2}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{a^{p-1}}{p}\right] = \frac{a^p - a}{p(a-1)} - \frac{p-1}{2}.$$

121*.** Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Aflați mulțimea valorilor pe care le poate lua:

$$S = [x_2 - x_1] + [x_3 - x_2] + \cdots + [x_n - x_{n-1}]$$

unde $x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$ cu partea întreagă $1,2,3,\ldots,n$.

122. Arătați că, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea:

$$\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{m+1}{n}\right\} + \left\{\frac{m+2}{n}\right\} + \cdots + \left\{\frac{mn-1}{n}\right\} = \frac{n-1}{2}.$$

123.** Să se arate că: $S_n = \left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{2m}{n}\right\} + \cdots + \left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\} = \frac{n-1}{2}$

unde $m, n \in \mathbb{N}^*$, prime între ele.

124.** Fie $n \geq 3$ un număr fixat. Determinați, în funcție de numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ real pozitive valoarea minimă a sumei:

$$S_n = \left[\frac{a_1 + a_2}{a_3}\right] + \left[\frac{a_2 + a_3}{a_4}\right] + \cdots \left[\frac{a_n + a_1}{a_2}\right].$$

125.** Să se arate că: $A = \left[\frac{2011}{1}\right] + \left[\frac{2011}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{2011}{2011}\right]$ este număr par.

126*.** Să se demonstreze că suma: $S = \frac{1}{25} \sum_{k=0}^{2001} \left[\frac{2^k}{25}\right]$ este număr întreg.

127. Să se calculeze: $\sum_{k=1}^{2019} \left[\frac{3^k}{13}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

128. Să se calculeze suma: $S = \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{2^{1000}}{3}\right]$.

129. Să se arate că: $\sum_{k=1}^{2n} \left[\frac{2^k}{3}\right] = \frac{2^{2n+1} - 2}{3} - n$.

130. Să se calculeze suma: $S_n = \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{2^n}{3}\right]$.

131. Să se demonstreze egalitatea:

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

pentru $p, q \in \mathbb{N}^*$, prime între ele. (Gauss)

132. Să se calculeze $S = \sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{kn}{p}\right]$ unde p prim și $n \in \mathbb{N}^*, n < p$.

133*. Pentru a, b numere naturale nenule definim numărul:

$$N(a,b) = \left\{\frac{a}{b}\right\} + \left\{\frac{2a}{b}\right\} + \left\{\frac{3a}{b}\right\} + \cdots + \left\{\frac{(b-1)a}{b}\right\}.$$

Arătați că $N(a,b)$ este întreg dacă și numai dacă a este par sau b este impar.

134*. Se consideră numerele naturale a, b și n, cu $(a,n) = 1$.

Calculați $S_n = \left\{\frac{a+b}{n}\right\} + \left\{\frac{2a+b}{n}\right\} + \cdots + \left\{\frac{na+b}{n}\right\}$.

135*. Să se arate că $\sum_{k=n+1}^{n+m} \left\{\frac{ak+b}{m}\right\} = \frac{m-1}{2}, a, b, m, n \in \mathbb{N}^* \ (a,m) = 1$.

136*. Fie m, n numere naturale cu $n < m$,

$S_n = \left[1 \cdot \frac{m}{n}\right] + \left[2 \cdot \frac{m}{n}\right] + \cdots + \left[n \cdot \frac{m}{n}\right]$ și $S_m = \left[1 \cdot \frac{n}{m}\right] + \left[2 \cdot \frac{n}{m}\right] + \cdots + \left[m \cdot \frac{n}{m}\right]$.

Care dintre aceste sume este mai mare?

137. a) Fie $p \in \mathbb{N}^*, p \geq 3$, un număr prim, iar $a \in \mathbb{Z}$ un număr întreg nedivizibil prin p. Calculați $\sum_{k=1}^{p-1} \left\{\frac{ak}{p}\right\}$;

b) Arătați că dacă p și q sunt numere prime impare distincte, atunci:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\{\frac{qk}{p}\right\} + \sum_{l=1}^{q-1} \left\{\frac{pl}{q}\right\} = (p-1)(q-1).$$

Scanned with OKEN Scanner

138. Fie $p > 2$ număr prim și $q \in \mathbb{N}^*$ nedivizibil cu p. Să se arate că:

$$S = \sum_{k=1}^{p-1} \left[(-1)^k \frac{k^2 q}{p} \right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

139. Să se demonstreze că:

$$S = \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{kn}{m} \right] = \frac{n \cdot m - n - m + (n,m)}{2} = \frac{(n-1)(m-1)}{2} + \frac{d-1}{2}$$

unde $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $d = (m,n)$ cel mai mare divizor comun.

140. Să se demonstreze că: $S = \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \frac{kn}{m} \right\} = \frac{m - (n,m)}{2}$,

unde $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $d = (m,n)$ cel mai mare divizor comun.

141*.** Să se demonstreze identitatea:

$$\left[\frac{n}{m}\right]^2 + \left[\frac{n+1}{m}\right]^2 + \cdots + \left[\frac{n+m-1}{m}\right]^2 = \left[\frac{n^2+m-1}{m}\right] + \left[\frac{n(m-r)}{m}\right] =$$

$$= \left[\frac{n^2+m-1}{m}\right] + \left[m\left\{\frac{n}{m}\right\}\left\{-\frac{n}{m}\right\}\right] \text{ unde } n \equiv r (\text{mod } m) \ \ 0 \le r \le m-1,$$

$m, n \in \mathbb{N}^*$.

142. Dacă m și n sunt numere naturale impare, prime între ele, atunci:

$$\sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{hn}{m}\right] + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{km}{n}\right] = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}.$$

(Landau)

143*.** Fie p, n două numere impare mai mari decât 1 și p prim:

a) Arătați că $\sum_{k=1}^{p-1} \left\{ \frac{k^n}{p} \right\} = \frac{p-1}{2}$;

b) Să se determine numerele naturale impare $m \ge 3$ pentru care

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \frac{k^n}{m} \right\} = \frac{m-1}{2}.$$

144*.** Să se demonstreze că suma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k^3}{9} \right], \text{ nu este pătrat perfect oricare } n \in \mathbb{N}^*, n \ge 3.$$

Scanned with OKEN Scanner

145*. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n} [kx] = n[x] + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{i} \left[x + \frac{k}{i+1} \right] \right).$$

146. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine mulțimile:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \left[\frac{a+x}{b} \right] = \left[\frac{a}{b} \right] \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \left[\frac{a+x}{b} \right] = \left[\frac{a}{b} \right] + 1 \right\};$$

b) Să se calculeze: $\sum_{k=0}^{b-1} \left[\frac{a+k}{b} \right]$.

147*. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_i \ldots$ șirul numerelor prime și $n > 2$ un număr natural fixat. Să se arate că: $\sum_{i} \left[\frac{n}{p_i} \right] - \sum_{i<j} \left[\frac{n}{p_i p_j} \right] + \sum_{i<j<k} \left[\frac{n}{p_i p_j p_k} \right] - \cdots = n - 1.$

148*. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$, m par și n impar. Să se arate că:

$$\frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{\left[\frac{mk}{n} \right]} \left\{ \frac{mk}{n} \right\} \text{ nu depind de } m \text{ și } n.$$

149*. Să se arate că:

$$2\left(\left[\frac{n}{1} \right] - \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{3} \right] + \cdots + (-1)^{n-1} \left[\frac{n}{n} \right] \right) + (-1)^{\left[\frac{n}{1} \right]} + (-1)^{\left[\frac{n}{2} \right]} + \cdots + (-1)^{\left[\frac{n}{n} \right]} = n.$$

Scanned with OKEN Scanner

soluții 14 | Sume

§ 1. Sume elementare cu radicali (I)

1. a) Evident $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2 \Rightarrow k < \sqrt{k(k+1)} < k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\sqrt{k(k+1)}\right] = k$ și deci $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k(k+1)}\right] = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Deci se impune ca $\frac{n(n+1)}{2} = 5050 \Rightarrow n(n+1) = 100 \cdot 101 \Rightarrow n = 100$.

b) Se deduce ușor că: $[k^2 + k] = k$ și $\left[\sqrt{(k+1)(k+2)}\right] = k+1$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k(k+1)}\right]\left[\sqrt{(k+1)(k+2)}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = 3080 \Rightarrow n = 20.$$

2. a) $E_1(x^2) = ([\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]) + ([\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + [\sqrt{6}] + [\sqrt{7}] + [\sqrt{8}]) + \cdots + \left[\sqrt{(x-1)^2}\right] + \left[\sqrt{(x-1)^2+1}\right] + \cdots + [\sqrt{x^2-1}] + [\sqrt{x^2}] =$

$= 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + \cdots + (2x-1)(x-1) + x =$

$$= x + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)k = \frac{x(4x^2 - 3x + 5)}{6},$$

deci $E_1(x^2) = a \Leftrightarrow x(4x^2 - 3x + 5) = 6a$; cum $(x, a) = 1 \Rightarrow x|6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \{1,2,3,6\} \Rightarrow S = \{x, a\} = \{(1,1), (2,5), (3,16), (6,131)\}$;

b) $E_2(2001) = -22$.

Simion Miheț

3. a) Avem $S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}\left(\sqrt{k+1} \times \sqrt{k}\right)} =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \in (0,1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{S_1\} = S_1$ și $[S_1] = 0$;

b) Se arată ușor că $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}, \forall\, a, b \in (0,\infty)$ și deci:

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1} + k\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = S_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0 < S_2 < S_1 \Rightarrow \{S_2\} = S_2$ și $[S_2] = 0$;

c) $S_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sqrt{n+1} - 1$ și deci

$\frac{\sqrt{n}}{S_3} \in (1,2), \forall\, n \geq 2 \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{n}}{S_3}\right] = 1, \forall\, n \geq 2$ și pentru $n = 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{S_3}\right] = 2,$

deoarece $1 < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-1} < 2, \forall\, n \geq 2$ și pentru $n = 1, \frac{1}{\sqrt{2}-1} =$

$= \sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2} - 1 \Rightarrow$ deci pentru $n = 1 \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{n}}{S_3}\right] = 2$ și

$$\left\{\frac{\sqrt{n}}{S_3}\right\} = \sqrt{2} - 1; \left\{\frac{\sqrt{n}}{S_3}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-1}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+1\right)}{n}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{1 + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right\} \text{ și cum}$$

$$0 < \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}} < 1, \forall n \geq 2 \Rightarrow \left\{\frac{n}{S_3}\right\} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}.$$

4.** a) Utilizăm inegalitatea:

$$2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Însumând după k de la 1 la n. Obținem:

$$2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < S_n < 1 + 2\left(\sqrt{n}-1\right)$ și pentru $n = 10^6$ rezultă

$$2(1000-1) < 2\left(\sqrt{10^6+1}-1\right) < S_1 < 2\left(\sqrt{10^6}-1\right) + 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1998 < S_1 < 1999 \Rightarrow [S_1] = 1998.$

b) Utilizăm inegalitatea:

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(k+1)^2} - \sqrt[3]{k^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{k}} < \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{k^2} - \sqrt[3]{(k-1)^2}\right), \forall\, k \in \mathbb{N}^*.$$

Scanned with OKEN Scanner

Însumând de la $k=4$ la $k=10^6$ obținem după reducerea termenilor:

$$\frac{3}{2}\sum_{k=4}^{10^6}\left(\sqrt[3]{(k+1)^2}-\sqrt[3]{k^2}\right)<\sum_{k=4}^{10^6}\frac{1}{\sqrt[3]{k}}<\frac{3}{2}\sum_{k=4}^{10^6}\left(\sqrt[3]{k^2}-\sqrt[3]{(k-1)^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(1000001)^2}-\sqrt[3]{16}\right]<S_2<\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{10^{12}}-\sqrt[3]{9}\right)\ (*).$$

Dar membrul stâng al inegalităţilor $(*)$ este mai mare decât

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{10^{12}}-\sqrt[3]{16}\right)>\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(1000001)^2}-\sqrt[3]{54}\right]>15000-4=14996$$

şi membrul drept al inegalităţilor $(*)$

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{10^{12}}-\sqrt[3]{9}\right)<\frac{3}{2}(10000-2)=14997.$$

Aşadar $14996<S_2<14997\Rightarrow[S_2]=14996$.

5. Rezultă din inegalităţile:

a) $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$;

b) $3\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<3\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right)$.

Utilizând identitatea: $\left[\frac{[a]}{n}\right]=\left[\frac{a}{n}\right]$ avem:

$$\left[\frac{[(n+1)\pi]}{n}\right]=\left[\frac{(n+1)\pi}{n}\right]=\left[\pi+\frac{\pi}{n}\right],\text{ deci}$$

$$S=[2\pi]+\left[\frac{3\pi}{2}\right]+\left[\frac{4\pi}{3}\right]+\sum_{k=4}^{2014}\left[\pi+\frac{\pi}{k}\right]=6+8+\sum_{k=4}^{2014}\left[\pi+\frac{\pi}{k}\right]=$$

$$=14+2011\cdot3=6033+14=6047,\text{ întrucât }\left[\pi+\frac{\pi}{n}\right]=3,\forall\,k\geq4.$$

6. $a_n=1-\frac{1}{n+1}\Rightarrow[ka_k]=\left[k-\frac{k}{k+1}\right]=k-1\Rightarrow$

$$\Rightarrow E_n=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

7. a) Avem $(k-1)^2\leq k^2-k+1<k^2,\forall\,k\geq2\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\sqrt{k^2-k+1}\right]=k-1,\text{ deci}$$

$$S_1=1+\sum_{k=2}^{n}\left[\sqrt{k^2-k+1}\right]=1+\sum_{k=2}^{n}(k-1)=$$

$$=1+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+2}{2};$$

b) $k^2<k^2+k+1<(k+1)^2,\forall\,k\geq1\Rightarrow\left[\sqrt{k^2+k+1}\right]=k\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_2 = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k^2+k+1}\right] = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};$$

c) Avem $k < \sqrt{k(k+1)} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{k(k+1)}\right] = k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k(k+1)}\right] = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};$$

d) $3 + 2 + \sum_{k=3}^{n} \left[\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\right] = 5 + (n-2) = n+3,$

unde $1 < \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} < 2, \forall\, k \geq 3;$

e) Remarcăm $1 < \frac{k^2+1}{k^2-k+1} < 2, \forall\, k \geq 2 \Rightarrow \left[\frac{k^2+1}{k^2-k+1}\right] = 1.$

$$S_5 = 2 + \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{k^2+1}{k^2-k+1}\right] = 2 + n - 1 = n+1;$$

f) Avem $\left[\sqrt[3]{n^3+2n+1}\right] = n$, deci $S_6 = \left[\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}\right] = 1$, deoarece

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \in (1,2).$$

8. Evident $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$ și $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$ și cum

$n^2 < n(n+1) < (n+1)^2 \Rightarrow n < \sqrt{n(n+1)} < n+1 \Rightarrow \left[\sqrt{n(n+1)}\right] = n.$

$\left[\sqrt{1+3+\cdots+m-1}\right] = \left[\sqrt{n^2}\right] = n.$

9. Avem: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2-k}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right) \Rightarrow 4S_n = 3 - \frac{2\cdot(2n+3)}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow [4S_n] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \in \{1,2\} \\ 2, & \text{dacă } n \geq 3 \end{cases}$, deoarece

$-\frac{2\cdot(2n+3)}{(n+1)(n+2)} \in (-1,0) \Rightarrow [4S_n] = 3 + \left[-\frac{2\cdot(2n+3)}{(n+1)(n+2)}\right] = 3 - 1 = 2.$

Scanned with OKEN Scanner

10. Avem $n \le \sqrt{n^2+k} < n+1 \Leftrightarrow n^2 \le n^2+k < (n+1)^2, \forall\, k = \overline{1,n}$, deci $\left[\sqrt{n^2+k}\right] = n \Rightarrow A_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{n^2+k}\right] = n \cdot n = n^2.$

11*. Pentru $k \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k+\frac{1}{2}} - 2\sqrt{k-\frac{1}{2}}$$

și pentru $k = \overline{1,2000}$ însumând rezultă: $2\sqrt{2001} - 2 < S \Rightarrow S > 87{,}46$, pentru $k = \overline{3,2000}$ și însumând avem:

$S - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2000{,}5} - 2\sqrt{2{,}5} \Rightarrow S < 87{,}998 \Rightarrow [S] = 87.$

Constantin Zălog, R.M.T./2005

12*. Avem $S_n = \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{k^n+1}{k^{n-1}+1}\right] = \sum_{k=2}^{m} (k-1) = \frac{m(m-1)}{2}$, deoarece $k - 1 < \frac{k^n+1}{k^{n-1}+1} < k.$

Mugurel Szörös

13. a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} =$

$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow 1 < S_n < 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow [S_n] = 1;$

b) Avem $1 < S_n' < S_n < 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow [S_n'] = 1.$

14. $[\sqrt{2}] + \sum_{k=2}^{n} \left[\sqrt{k^2-1} + \sqrt{k^2+1}\right] = 1 + \sum_{k=2}^{n} (2k-1) =$

$= \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$, deoarece $2k - 1 < \sqrt{k^2-1} + \sqrt{k^2+1} < 2k \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\sqrt{k^2-1} + \sqrt{k^2+1}\right] = 2k - 1.$

15. a) Pentru $n = 1 \Rightarrow [\sqrt{1} + \sqrt{3}] = 2$ și pentru $n = 2 \Rightarrow [\sqrt{3} + \sqrt{7}] = 4$, dar cum $2k \le \sqrt{k^2-k+1} + \sqrt{k^2+k+1} < 2k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\sqrt{k^2-k+1} + \sqrt{k^2+k+1}\right] = 2k \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1).$

Scanned with OKEN Scanner

Se deduce ușor că $2k < \sqrt{k^2+k+1} + \sqrt{k^2-k+1} < 2k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\sqrt{k^2+k+1} + \sqrt{k^2-k+1}\right] = 2k,$

deci $\sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k^2+k+1} + \sqrt{k^2-k+1}\right] = \sum_{k=1}^{n} 2k = n^2+n.$

Prin urmare suma din stânga devine:

$$S_n = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1};$$

b) Se deduce ușor că $2k < \sqrt{k^2+k+1} + \sqrt{k^2-k+1} < 2k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\sqrt{k^2+k+1} + \sqrt{k^2-k+1}\right] = 2k$, deci

$\sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k^2+k+1} + \sqrt{k^2-k+1}\right] = \sum_{k=1}^{n} 2k = n^2+n.$

Prin urmare, suma din stânga devine:

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{m}{m+1}.$$

Mihaly Bencze, 2016

16. a) $S_n = \frac{1}{2}\sum \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{n-1}{3(2n+1)} \Rightarrow \{S_n\} = \left\{\frac{n-1}{3(2n+1)}\right\} =$

$= \frac{n-1}{3(2n+1)} \in \left[\frac{1}{15}, \frac{1}{7}\right], n \in \{2,3,\ldots,10\};$

b) $n \geq 10.$

17*. Avem $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k(k^n+1)}{k^n+1} + \frac{1}{k^n+1}\right] = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$

18*. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(1+2+3+\cdots+k)}{k^4+2k^3+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$

$= \frac{n}{n+1} \Rightarrow \{S_n\} = \frac{n}{n+1}$ și $[S_n] = 0.$

19*. a) Primul termen este nul, iar cel de-al doilea termen este 3.

Pentru $k \geq 3$, avem $1 < \frac{k-\sqrt{k}}{k-\sqrt{k+\sqrt{k}}} < 2$ și deci termenii sunt egali cu 1.

$S_n = 0 + 3 + (n-2)1 = n+1;$

b) Analog.

20. a) Avem $k<\sqrt{k^2+k}<k+1$ și $k+1<\sqrt{k^2+3k+2}<k+2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\sqrt{k^2+k}\right]\left[\sqrt{k^2+3k+2}\right]=k(k+1)$ și deci suma devine:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{n}{n+1};$$

b) Avem $2k-1<\sqrt{4k^2-4k+3}<2k$ și
$2k+1<\sqrt{4k^2+4k+3}<2k+2 \Rightarrow \left[\sqrt{4k^2-4k+3}\right]=2k-1$ și
$\left[\sqrt{4k^2+4k+3}\right]=2k+1$ și deci suma este egală cu:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2k+1}\right]=$$
$$=\frac{n}{2n+1}.$$

21. Avem $1<\frac{k^3+k}{k^3+1}<1+\frac{1}{k^2-k+1}<1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$

$$n<\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+k}{k^3+1}<\sum_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=n+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=$$
$$=n+1-\frac{1}{n}<n+1 \Rightarrow n<S_n<n+1 \Rightarrow [S_n]=n.$$

22. Se descompune relativ ușor:
$k^4+4k^3+5k^2+4k+1=(k^2+k+1)(k^2+3k+1) \Rightarrow$
$$\Rightarrow \frac{1}{\left[\sqrt{(k^2+k+1)(k^2+3k+1)}\right]}\leq\frac{1}{[k^2+k+1][k^2+3k+1]},$$
unde s-a folosit inegalitatea $[x][y]\leq[xy], \forall\, x,y\geq 0.$
Dar cum $k^2<k^2+k+1<(k+1)^2$ și $(k+1)^2\leq k^2+3k+1<$
$<(k+2)^2 \Rightarrow \left[\sqrt{k^2+k+1}\right]=k$ și $\left[\sqrt{k^2+3k+1}\right]=k+1$, deci

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^4+4k^3+5k^2+4k+1}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_n\in(0,1)\Rightarrow\{S_n\}=S_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1} \text{ și } [S_n]=0.$$

23. Avem $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kn}{n+1}-\left[\frac{kn}{n+1}\right]\right)=\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k(n+1)-k}{n+1}\right]=$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{-k}{n+1}\right]=\frac{n^2}{2}-\frac{n(n+1)}{2}-n(-1)=$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \frac{n^2 - n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n}{2}.$$

Gh. Andrei

24. Avem $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}\sqrt[3]{k+1}\left(\sqrt[3]{(k+1)^2 + \sqrt[3]{k(k+1)} + \sqrt[3]{k^2}}\right)} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k} \cdot \sqrt[3]{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow [S_n] = 0, \{S_n\} = S_n$. Cum $S_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ și $S_1 < S_n < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{2} - 1 < \sqrt[3]{2}S_n < \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt[3]{2} < 1 + \sqrt[3]{2}S_n < \sqrt[3]{2} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[1 + \sqrt[3]{2}S_n\right] \in \{1,2\}$ și evident există $h_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\left[1 + \sqrt[3]{2}S_n\right] =$

$= 2, \forall\, n \geq n_0$. De exemplu pentru $n = 124$.

25.** Notăm $B = \frac{1}{\sqrt{101} + \sqrt{102}} + \frac{1}{\sqrt{103} + \sqrt{104}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{399} + \sqrt{400}}$ și

$C = \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101} + \sqrt{102}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{397} + \sqrt{398}}$.

Din $A + B = 10$ și $A > B \Rightarrow 5 < A$ și din $A + C = \sqrt{399 - \sqrt{99}} < 20 - 9 =$

$= 11$ și cum $A < C \Rightarrow 2A < A + C < 11 \Rightarrow A < 5{,}5 \Rightarrow [A] = 5$.

Cristinel Mortici

26.** $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{135 - (2k-1)(2k+1)} =$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{135 - (2k-1)} - \frac{1}{135 - (2k+1)}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{13 \ldots 2n+1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{2a_n\} = 1 - \frac{1}{13 \ldots (2n+1)}.$$

§ 2. Sume elementare cu radicali (II)

27. Soluția 1

$$\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \cdots + \left[\sqrt{n^2 - 1}\right] = \left(\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right]\right) +$$

$$+\left(\left[\sqrt{4}\right] + \left[\sqrt{5}\right] + \left[\sqrt{6}\right] + \left[\sqrt{7}\right] + \left[\sqrt{8}\right]\right) +$$

$$+ \cdots + \left(\left[\sqrt{k^2}\right] + \left[\sqrt{k^2 + 1}\right] + \cdots + \left[\sqrt{k^2 + 2k}\right]\right) +$$

$$+ \cdots + \left(\left[\sqrt{(n-1)^2}\right] + \left[\sqrt{(n-1)^2 + 1}\right] + \cdots + \left[\sqrt{n^2 - 1}\right]\right) =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= (1+1+1) + (2+2+2+2+2) + \cdots + \left(\underbrace{k+k+\cdots+k}_{2k+1}\right) +$$

$$+ \cdots + \left[\underbrace{(n-1)+(n-1)+\cdots+(n-1)}_{2n-1}\right] = 3{,}1 + 5{,}2 + \cdots + (2k+1)k +$$

$$+ \cdots + (2n-1)(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)k = 2\sum_{k=1}^{n-1}k^2 = 2\sum_{k=1}^{n-1}k^2 + \sum_{k=1}^{n-1}k =$$

$$= 2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{6}(n-1)n(4n+1).$$

Soluția 2

Notăm $[\sqrt{y}] = k \Leftrightarrow k^2 \le j < (k+1)^2$ și cum în membrul stâng sunt $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ termeni egali cu k pentru $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$.

Avem $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \cdots + [\sqrt{n^2-1}] = (2^2-1^2)\cdot 1 + (3^2-2^2)\cdot 2 +$

$$+(4^2-3^2)\cdot 3 + \cdots + [n^2-(n-1)^2](n-1) = 2^2\cdot 1 + 3^2\cdot 2 +$$

$$+ 4^2\cdot 3 + \cdots + n^2 - (n-1)^2 - [1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3] =$$

$$= 2^2(2-1) + 3^2(3-1) + \cdots + n^2(n-1) - [1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3] =$$

$$= (2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3) - (2^2+3^2+\cdots+n^2) -$$

$$- [1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3] = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.$$

M. Negoescu, R.T.M. nr. 3/1971

28. Calculăm suma:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\sqrt{k^2}\right] + \left[\sqrt{k^2+1}\right] + \left[\sqrt{(k+1)^2-1}\right] = \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(2k^2+k) = 2\sum_{k=1}^{n-1}k^2 + \sum_{k=1}^{n-1}k = 2\frac{(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}[4n+1] \text{ și } S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = n^3.$$

Florin Rotaru, G.M. nr. 16/2003

29. Se aplică ex.7 a) și b). Avem $S_n = A_n + B_n$.

$$A_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k^2+k+1}\right] = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k^2-k+1}\right] = \frac{n^2-n+2}{2} \Rightarrow S_n = n^2+1.$$

Scanned with OKEN Scanner

30. a) $\left[\sqrt{k^2}\right]^2+\left[\sqrt{k^2+1}\right]^2+\cdots+\left[\sqrt{k^2+2k}\right]^2=(2k+1)k^2=$
$=[(k+1)^2-k^2]\cdot k^2,$
deci $\left(\left[\sqrt{1}\right]^2+\left[\sqrt{2}\right]^2+\left[\sqrt{3}\right]^2\right)+\left(\left[\sqrt{4}\right]^2+\left[\sqrt{5}\right]^2+\cdots+\left[\sqrt{8}\right]^2\right)+$
$+\cdots+\left[\sqrt{(n-1)^2}\right]^2+\left[\sqrt{(n-1)^2+1}\right]^2+\cdots+\left[\sqrt{n^2-1}\right]^2=$
$=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\sqrt{k^2}\right]^2+\left[\sqrt{k^2+1}\right]^2+\cdots+\left[\sqrt{(k+1)^2-1}\right]^2=$
$=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)k^2=2\sum_{k=1}^{n-1}k^3+\sum_{k=1}^{n-1}k^2=2\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2+\frac{n(n-1)(m-1)}{6}=$
$=\frac{n(n-1)(3n^2-n-1)}{6};$

b) În mod analog.

31*. Evident şirul este strict crescător. Avem:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{k^2(k+2)}-\frac{1}{k(k+2)^2}}=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)<\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Din $a_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\Rightarrow\sqrt{2}a_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{2}a_1=\frac{2}{3}\Rightarrow\left[\sqrt{2}a_1\right]=0$ şi $\sqrt{2}a_2=\frac{11}{12}\Rightarrow\left[\sqrt{2}a_2\right]=0, k=1,2.$

Pentru $n\geq 3\Rightarrow\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}<\sqrt{2}a_n<\frac{3}{2}\Rightarrow\left[\sqrt{2}a_n\right]=1,\forall\, n\geq 3.$

M. Matrosenko, M. Chiriţă, O.L. Bucureşti, 2000

32*. a) Avem $k\leq k^2+k<(k+1)^2\Rightarrow\left[\sqrt{k^2+k}\right]=k$ şi deci

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}k=n!;$$

b) Din $\left[\sqrt{k^2+k+1}\right]=k\Rightarrow Q_n=n!;$

c) $\left[\sqrt{k^2-k+1}\right]=k-1,\forall\, k\geq 2\Rightarrow R_n=(n-1)!$ şi pentru $k=1,$ $\left[\sqrt{k^2-k+1}\right]=1.$

33*. Pentru orice $k\geq 2$ avem:

$$\sqrt{k-1}+\sqrt{k}<2\sqrt{k}<\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\Rightarrow\sqrt{k}<\frac{\sqrt{(k+1)}+\sqrt{k}}{2}\Rightarrow$$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow 2\left(\sqrt{(k+1)}-\sqrt{k}\right)<\frac{1}{\sqrt{k}}<2\left(\sqrt{k}-\sqrt{(k-1)}\right)$ (1).

Prin însumare de la $k=2$ la $k=n^2$ rezultă:

$$1+2\sum_{k=2}^{n^2}\left(\sqrt{(k+1)}-\sqrt{k}\right)\leq\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq 1+2\sum_{k=2}^{n^2}\left(\sqrt{k}-\sqrt{(k-1)}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2}\right)<\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{k}}<1+2(n-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n-2<\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{k}}<2n-1\Rightarrow\left[\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]=2n-2.$$

M.O. Drîmbe

34*. $S_n=[\sqrt{11}]+[\sqrt{24}]+[\sqrt{39}]+[\sqrt{56}]+[\sqrt{75}]+[\sqrt{96}]+[\sqrt{119}]+$

$$+\sum_{k=8}^{n}\left[\sqrt{k^2+10k}\right]=3+4+6+7+8+9+10+\sum_{k=8}^{n}(k+4)=$$

$$=47+\sum_{12}^{n+4}p=\left(\frac{(n+4)(n+5)}{2}\right)-19,\text{ unde }(k+4)\leq\sqrt{k^2+10k}<(k+5).$$

Concurs „Gh. Țițeica", G.M. nr. 9/2005

35. a) $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{k+1}=$

$=1-\frac{1}{n+1}<1\Rightarrow\frac{1}{2}\leq a_n<1\Rightarrow[a_n]=0$ și $\{a_n\}=a_n\Rightarrow 1\leq 2a_n<2\Rightarrow$
$\Rightarrow[2a_n]=1;$

b) $b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}=1-\frac{1}{n!}\Rightarrow\frac{1}{2}\leq b_n<1\Rightarrow$

$\Rightarrow[b_n]=0$ și $\{b_n\}=b_n$ și $1\leq 2b_n<2\Rightarrow[2b_n]=1.$

36*. a) Fie S_n suma din stânga, atunci avem:

$[\sqrt{4n^2+k}]=2n,\ \forall\ k=\overline{1,4n},$

$[\sqrt{4n^2+k}]=2n+1, k=\overline{4n+1,8n+3}$ și

$[\sqrt{4n^2+k}]=2n+2, k=\overline{8n+4,9n+4}$, de unde

rezultă că suma S_n din stânga este egală cu:

$S_n=(2n)(4n)+(2n+1)(4n+3)+(2n+2)(n+1)=18n^2+14n+5$

și din $S_n=18n^2+2021\Rightarrow n=144.$

Gh. Lobonț, O.L. Cluj, 2012

Scanned with OKEN Scanner

b) Avem $\left[\sqrt{4n^2+k}\right]=2n$, pentru $k=\overline{1,4n}$,
$\left[\sqrt{4n^2+k}\right]=2n+1$, pentru $k=\overline{4n+1,8n+3}$ și
$\left[\sqrt{4n^2+k}\right]=2n+2$, pentru $k=\overline{8n+4,12p}$, de unde
ecuația devine $2n\cdot 4n+(2n+1)(4n+3)+(2n+2)(4n-3)=2517\Rightarrow$
$\Rightarrow 24n^2+12n-3=2517\Rightarrow 24n^2+12n-2520=0\Rightarrow$
$\Rightarrow 2n^2+n-210=0\Rightarrow n=10.$

Gh. Andrei, O.L., 2011

37*. Avem $S_1=\sum_{k=2}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{k^2}}=\sum_{k=2}^{n}\sqrt{\frac{(k^2-k+1)^2}{(k-1)^2k^2}}=$
$=\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2-k+1}{k(k-1)}=\sum_{k=2}^{n}1+\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=3}^{n}1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=n-1+1=$
$=n-\frac{1}{n}\in\mathbb{Q}$ și $[S_1]=n-1,\forall\, n\geq 2.$

38**. Avem $n-\frac{k+1}{2n}<\sqrt{n^2-k}<n-\frac{k}{2n}, k=\overline{1,n}$ și
$n+\frac{k-1}{2n}<\sqrt{n^2+k}<n+\frac{k}{2n}\Rightarrow 2n-\frac{1}{n}<\sqrt{n^2-k}+\sqrt{n^2+k}<2n\Rightarrow$
$\Rightarrow 2n^2-1<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k}+\sqrt{n^2+k}<2n^2\Rightarrow [S_n]=2n^2-1.$

39*. Avem $10\sqrt{k^2+k}-10\left[\sqrt{k^2+k}\right]=10\sqrt{k^2+k}-10k$ și
$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[10\sqrt{k^2+k}-10k\right]=\sum_{k=1}^{n}4=4n.$
Deoarece $4<10\sqrt{k^2+k}-10k<5,\forall\, k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$
$\Rightarrow 10k+4<10\sqrt{k^2+k}<10k+5\Rightarrow$
$\Rightarrow 100k^2+80k+16<100k^2+100k<100k^2+100k+25,\forall\, k\in\mathbb{N}^*,$
deci $\left[10\sqrt{k^2+k}-10k\right]=4.$

40*. Avem $n^2<\sqrt{n^4+k}<n^2+\frac{1}{2n}<n^2+\frac{1}{n}, 1\leq k\leq n$ și prin adunare,
găsim $n^2\cdot n<a_n<n\left(n^2+\frac{1}{n}\right)\Rightarrow n^3<a_n<n^3+1\Rightarrow [a_n]=n^3.$

Cristinel Mortici, R.T.M., 2008

41*. Avem $1<\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2^k}}}<1+\frac{1}{2^k}, k=\overline{1,n}$ și prin însumare rezultă:

Scanned with OKEN Scanner

$$n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2^k}}}<n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=n+1-\frac{1}{2^k}<n+1.$$

Prin urmare, $n=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2^k}}}\right]$.

Florin Rotaru

42*. $S_n=([\sqrt[4]{1}]+[\sqrt[4]{2}]+[\sqrt[4]{3}]+\cdots+[\sqrt[4]{15}])+$
$+([\sqrt[4]{16}]+[\sqrt[4]{17}]+\cdots+[\sqrt[4]{80}])+[\sqrt[4]{k^4}]+[\sqrt[4]{k^4+1}]+\cdots+$
$+[\sqrt[4]{(k+1)^4-1}]+\cdots+[\sqrt[4]{(n-1)^4}]+[\sqrt[4]{(n-1)^4+1}]+\cdots+$
$+[\sqrt[4]{n^4-1}]=E_1+E_2+E_3+\cdots+E_k+\cdots+E_{n-1}$,
unde $E_k=[\sqrt[4]{k^4}]+[\sqrt[4]{k^4+1}]+\cdots+[\sqrt[4]{(k+1)^4-1}]=$
$=k((k+1)^4-k^4)=k(4k^3+6k^2+4k+1)$.

Avem $S_n=\sum_{k=1}^{n-1}E_k=\sum_{k=1}^{n-1}k(4k^3+6k^2+4k+1)=$

$$=4\sum_{k=1}^{n-1}k^4+6\sum_{k=1}^{n-1}k^3+4\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k=$$

$$=\frac{4(n-1)n(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30}+\frac{6n^2(n-1)^2}{4}+$$
$$+\frac{4(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)(24n^3+9n^2-n-1)}{30}.$$

(S-a utilizat egalitatea $\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$,
ca și celelalte bine cunoscute.)

Aurel Doboșan, Arhimede, 2003

43*. a) Pentru $0\le k\le n\Rightarrow n^2+2k<(n+1)^2\Rightarrow[\sqrt{n^2+2k}]=n$.
Pentru $n+1\le k\le 2n+1\Rightarrow(n+1)^2<n^2+2k\le(n+2)^2\Rightarrow$
$\Rightarrow[\sqrt{n^2+2k}]=n+1$. Prin urmare:

$$\sum_{k=0}^{2n+1}[\sqrt{n^2+2k}]=\sum_{k=0}^{n}[\sqrt{n^2+2k}]+\sum_{k=n+1}^{2n+1}[\sqrt{n^2+2k}]=$$
$$=(n+1)n+(n+1)(n+1)=(n+1)(2n+1);$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie $S = [\sqrt{1}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{5}] + \cdots + \left[\sqrt{(2n+1)^2 - 2}\right] =$
$= (1+1)(2+1) + (3+1)(23+1) + \cdots + ((2n-1)+1)(2(2n-1)+1)$
$= \sum_{k=1}^{n} 2k(4k-1) = \frac{n(n+1)(8n+1)}{3}.$

Nicolae Alb, O.L. Cluj, 2014

44*. Notăm cu S_n suma din stânga. Se procedează prin inducție.
Pentru $n = 2 \Rightarrow 2^{[\sqrt{2}]} + 2^{[\sqrt{3}]} = 2^2$. Presupunând egalitatea adevărată pentru n, demonstrăm pentru $n+1$, adică:
$2^{[\sqrt{2}]} + 2^{[\sqrt{3}]} + \cdots + 2^{\left[\sqrt{(n+1)^2-1}\right]} = 2^{n+1}(2n-1).$
Avem $S_{n+1} = S_n + 2^{[\sqrt{n^2}]} + 2^{[\sqrt{n^2+1}]} + \cdots + 2^{\left[\sqrt{(n+1)^2-1}\right]} =$
$= 2^n(2n-3) + (2n+1)2^n = 2^{n+1}[2(n+1)-3] = 2^{n+1}(2n-1).$

45*. Evident $\left[k\sqrt{k^2+1}\right] = k^2$, deci $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{22} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$
Avem $a_n = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{23} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} =$
$= 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow 1 < a_n < 2 - \frac{1}{4} \Rightarrow [a_n] = 1.$

G.M. nr. 5/2013

46**. Calculăm $a + b = \sum_{k=1}^{4n^2-1} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{4n^2-1} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = 2n - 1.$
Introducem suma:
$C = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt{4n^2-2}}.$
Observăm că suma a are $2n^2$ termeni și suma b are $2n^2 - 1$ termeni, iar C are $2n^2$. Calculăm:
$A + C = \sum_{k=1}^{4n^2} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sum_{k=1}^{4n^2} \sqrt{k} - \sqrt{k-1} = 2n$ și $a > b, a < c$
$2b < a + b < 2a \Leftrightarrow 2b < 2n - 1 < 2a \Leftrightarrow b < n - \frac{1}{2} < a$ (*).
$2a < 2n < 2c \Leftrightarrow a < n < c \Rightarrow n - 1 < n - \frac{1}{2} < a < n \Rightarrow [a] = n - 1.$
Considerăm suma $d = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt{4n^2}}$
care are același număr de termeni ca b și $d < b$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $b+d=\sum_{k=2}^{4n^2-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=2}^{4n^2-1}\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=2n-\sqrt{2}$ și

$2d<b+d<2b\Rightarrow 2n-\sqrt{2}<2b\Rightarrow$ din $(*)\Rightarrow$

$\Rightarrow n-\frac{\sqrt{2}}{2}<b<n-\frac{1}{2}\Rightarrow n-1<b<n\Rightarrow [b]=n-1.$

Prin urmare $[a]=[b]=n-1.$

Gh. Andrei

47*. Avem $\left[\sqrt[3]{k^3}\right]=\left[\sqrt[3]{k^3+1}\right]=\cdots=\left[\sqrt[3]{(k+1)^3-1}\right]=k.$

$\sum_{i=0}^{3k(k+1)}\left[\sqrt[3]{k^3+i}\right]=[3k(k+1)+1]k=3k^2+k$, deci

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{3k(k+1)}\left[\sqrt[3]{k^3+i}\right]\right)=\sum_{k=1}^{n-1}3k^2+3k+k=$$

$$=3\sum_{k=1}^{n-1}k^3+3\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{(n-1)n^2(3n+1)}{4}.$$

48.** Avem $k<\sqrt{k(k+1)}<\frac{2k+1}{2}=k+\frac{1}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sum_{k=n}^{n+2m}k<\sum_{k=n}^{n+2m}\sqrt{k(k+1)}<\sum_{k=n}^{n+2m}k+(2m+1)\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2m+1)n+m(2m+1)<\sum_{k=n}^{n+2m}\sqrt{k(k+1)}<(2m+1)n+m(2m+1)+$$

$$+(2m+1)\frac{1}{2}\Rightarrow n+m<\frac{\sum_{k=n}^{n}\sqrt{k(k+1)}}{2m+1}<n+m+\frac{1}{2}<n+m+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\frac{\sum_{k=n}^{n+2m}\sqrt{k(k+1)}}{2m+1}\right]=n+m.$$

49.** a) Se arată prin inducție că $a<b_n<a+1,\forall n\geq 1\Rightarrow [b_n]=a,$ $\forall\, n\geq 1.$

b) Din punctul a) rezultă $\left[\sqrt{k(k+1)+\sqrt{k(k+1)}}\right]=k$ sau se deduce direct că $k^2\leq k(k+1)+\sqrt{k(k+1)}<(k+1)^2.$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^3}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 = \frac{n(2n^2+9n+13)}{6}$.

Dacă $n > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^3}{k(k+1)+\sqrt{k(k+1)}+n} =$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^3}{k+n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^3}{k+1} = \frac{n(2n^2+9n+13)}{6}$.

Așadar, numai $x = 1$ este soluție a ecuației.

Anca Popescu, O.L. Argeș, 2003

∮ 3. Sume elementare cu radicali (III)

50**. Trebuie să arătăm că $n \leq nE_n < n+1, E_n \geq 1 \Rightarrow nE_n \geq n$.

Așadar prin inducție avem $E_n < 1 + \frac{1}{n}, \forall\, n \geq 2$.

Pentru $n = 2 \Rightarrow E_2 < \sqrt{2} < 1 + \frac{1}{2}$ ... și pentru $E_n < 1 + \frac{1}{n}$, atunci:

$$E_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + E_n} < \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1} < 1 + \frac{1}{n+1}.$$

O.L. București, 2012

51**. Avem $\left[\sqrt{k} + \frac{1}{2}\right] = h \Leftrightarrow h \leq \frac{1}{2} + \sqrt{k} < h+1 \Leftrightarrow (h-1)h + 1 \leq$

$\leq h(h+1)$, deci putem scrie:

$$\sum_{k=1}^{n^2+n} \left[\sqrt{k} + \frac{1}{2}\right] = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=(h-1)h+1}^{h(h+1)} \left[\sqrt{k} + \frac{1}{2}\right] = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=(h-1)h+1}^{h(h+1)} h =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} (h(h+1) - (h-1)h)h = \sum_{h=1}^{n} 2h^2 = 2\sum_{h=1}^{n} h^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

Pal Dalyay

52**. Dacă notăm: $\left[\frac{\sqrt{1+8k}-1}{2}\right] = p \Leftrightarrow p < \frac{\sqrt{1+8k}-1}{2} < p+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{p(p+1)}{2} \leq k < \frac{(p+1)(p+2)}{2}$, atunci

$$S_n = \sum p = \sum_{p=1}^{n-1} \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2} - \frac{p(p+1)}{2}\right) + n =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \sum_{p=1}^{n-1} p(p+1) + n = \left(\sum_{p=1}^{n-1}(p^2+p)\right) + n = \sum_{p=1}^{n-1} p^2 + \sum_{p=1}^{n-1} p + n =$$

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n^2+2)}{3}.$$

Dorin Andricu, Titu Andreescu, G.M. nr. 2-3/1982

53. Din inegalitatea:

$$\sqrt{k} < \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2} < \sqrt{k+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n^2-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sum_{k=1}^{n^2-1}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{n^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

De unde rezultă că:

$$S-1 < 2n-2 < S-\frac{1}{n} \text{ sau } 2n-2+\frac{1}{n} < S < 2n-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [S] = 2n-2, \forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

Ion Cucurezeanu

54.** Din inegalitatea dintre media aritmetică și cea pătrată rezultă:

$$n < a_3 < \sqrt{n}\sqrt{n+\frac{1}{n!}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k!}} = \sqrt{n}\sqrt{n+\frac{1}{n!}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}} =$$

$$= \sqrt{n}\sqrt{n+1} < n+1 \Rightarrow [a_n] = n.$$

Florin Rotaru, R.T.M., 2015

55.** a) Pentru $1 \le k \le 4n^2 \Rightarrow \sqrt{4n^4} < \sqrt{4n^4+k} < \sqrt{4n^4+4n^2+1} =$

$= 2n^2+1 \Rightarrow \left[\sqrt{4n^4+k}\right] = 2n^2.$

Pentru $4n^2+1 \le k \le 8n^2 \Rightarrow 2n^2+1 = \sqrt{4n^4+4n^2+1} \le \sqrt{4n^4+k} <$

$< \sqrt{4n^4+8n^2+4} = 2n^2+2 \Rightarrow \left[\sqrt{4n^4+k}\right] = 2n^2+1.$

Așadar rezultă că:

$$\sum_{k=1}^{4n^2}[a_k] + \sum_{4n^2+1}^{8n^2}[a_k] = 4n^2(2n^2) + 4n^2(2n^2+1) = 4n^2(4n^2+1)$$

care nu poate fi pătrat perfect.

Scanned with OKEN Scanner

b) $a=\sum_{k=1}^{2013}[a_k]=\sum_{k=1}^{4n^2}[a_k]+\sum_{k=4n^2+1}^{2013}[a_k]=4n^2(2n^2+1)+$
$+(2013-4n^2)(2n^2+1)=2n^2\cdot 2013+2013-4n^2=2n^2(2013-2)+$
$+2013=2n^2\cdot 2011+2013\Rightarrow a-2013=2n^2\cdot 2011\Rightarrow n=20.$

O.L. Cluj 2013, Gorcea Violin

56**. a) Avem $\left[\sqrt{k^2}\right]+\left[\sqrt{k^2+1}+\cdots+\sqrt{k^2+2k}\right]=k(2k+1)$ și din

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\sqrt{k^2}\right]+\left[\sqrt{k^2+1}+\cdots+\sqrt{k^2+2k}\right]+\left[\sqrt{n^2}\right]+$$

$$+\left[\sqrt{n^2+1}+\cdots+\sqrt{n^2+2n}\right]=\sum_{k=1}^{n-1}k(2k+1)+n(n+1)=$$

$$=2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k+n(n+1)=\frac{n(4n^4+3n+5)}{6}.$$

b) Fie $m=\left[\sqrt{n}\right]$.

Atunci: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right]=\sum_{k=1}^{m^2-1}\left[\sqrt{k}\right]+m(n-m^2+1)$,

unde $m\left(n-(m^2-1)\right)$ reprezintă seria de termeni cu partea întreagă egală cu m care sunt în număr de $n-(m^2-1)$. Într-adevăr:
$m\le\sqrt{n}<m+1\Rightarrow m^2\le n<(m+1)^2$.

Prin urmare: $S_n=\frac{m(m-1)(nm+1)}{6}+m(n-m^2+1)=$

$$=m(n+1)-\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}=$$

$$=\left[\sqrt{n}\right](n+1)-\frac{\left[\sqrt{n}\right]\left(\left[\sqrt{n}\right]+1\right)\left(2\left[\sqrt{n}\right]+1\right)}{6},\text{ unde } m=\left[\sqrt{n}\right].$$

Coreea, 1997

c) Se utilizează punctul b).

Avem $\frac{\left[\sqrt{n}\right]\left(6n+6-\left(\left[\sqrt{n}\right]+1\right)\left[2\left[\sqrt{n}\right]+1\right]\right)}{6}$.

Se impune ca $\left[\sqrt{n}\right]=6$ și cea mai mare valoare a lui n este $n=48$, atunci $S_n=203=7\cdot 29$. Dacă $n=47$, atunci $S_n=177$, număr prim.

57. Din inegalitatea: $\frac{1}{3\sqrt[3]{(k+1)^2}}<\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}<\frac{1}{3\sqrt[3]{k^2}}$,

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{k=1}^{n^3-1}\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}}<3\left(\sum_{k=1}^{n^3-1}\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}\right)<\sum_{k=1}^{n^3-1}\frac{1}{3\sqrt[3]{k^2}},$$

$$S-1<3(n-1)<S-\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\Rightarrow 3n-3<3n-3+\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}<S<3n-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow [S]=3n-3.$$

58. Evident $S_n>n$ și deci $\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}}<\frac{1+\frac{1}{k}+k}{k+1}=1+\frac{1}{k(k+1)}\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_n<\sum_{k=1}^{n}1+\frac{1}{k(k+1)}=n+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=n+1-\frac{1}{n+1}<$$

$$<n+1\Rightarrow [S_n]=n.$$

59. Arătăm mai întâi că $1-\frac{k}{k(k+1)}<\sqrt[k+1]{\frac{k}{k+1}}<1$ (1).

Se aplică inegalitatea lui Bernoulli și deci: $\sqrt[k+1]{\frac{k}{k+1}}=\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}=$

$$=\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}>1-\frac{1}{(k+1)^2}>1-\frac{1}{k(k+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>1-\frac{1}{k(k+1)}.$$

Inegalitatea din stânga este evidentă. Însumând în (1) rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k(k+1)}\right)<\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k+1]{\frac{k}{k+1}}<n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n-1<n-1+\frac{1}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k+1]{\frac{k}{k+1}}<n\Rightarrow\left[\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k+1]{\frac{k}{k+1}}\right]=n-1.$$

Lucian Tuțescu, Jurnalul de matematică

60. Avem $\sqrt[2k+1]{\frac{2k}{2k-1}}>1$, deci $\sum_{k=1}^{n}\sqrt[2k+1]{\frac{2k}{2k-1}}>n$ (1),

dar $\sqrt[2k+1]{\frac{2k}{2k-1}}=\sqrt[2k+1]{\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{2k}\cdot\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)}\leq$

Scanned with OKEN Scanner

$$\leq \frac{1+1+\cdots+1+1+\frac{1}{2k-1}}{2k+1} = 1+\frac{1}{(2k+1)(2k-1)} =$$

$$= 1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right], \text{deci}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[2k+1]{\frac{2k}{2k-1}} < n+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) < n+1 \ (2).$$

Din (1) și (2) rezultă că $[S_n] = n$.

Gigel Buth, R.M.T., 2007

61**. Evident $n \leq a_n$ și aplicând inegalitatea lui Bernoulli $(1+a)^{\alpha} < 1+\alpha a, \alpha \in (0,1), a > 0$ se obține

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2k+2}} < 1+\frac{1}{2k(k+1)} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2k+2}} < n+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= n+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) < n+1 \Rightarrow [a_n] = n.$$

Concursul „Cristian Calude", 2010

62*. Observăm că $\frac{3}{4} \leq \frac{k}{k+1} < 1, \forall\, k \geq 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{\frac{k}{k+1}} < 1 \Rightarrow (n-2)\frac{\sqrt{3}}{2} < \sum_{k=3}^{n}\sqrt{\frac{k}{k+1}} < n-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1} < n-2+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n-1 < \frac{n\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{6} < S_n < n+\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{6}-2 < n.$$

Întrucât $-1 < \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{6}-2 < 0$ și $-1 < \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{6}-\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n-1 < F_n < n \Rightarrow [F_n] = n-1.$

Gh. Andrei

63. Evident fiecare termen al sumei este strict mai mare decât 1, deci $S_n > n$. Aplicând inegalitatea lui Bernoulli obținem:

$$\sqrt[a_k]{\frac{a_k}{a_{k-1}}} = \sqrt[a_k]{\frac{a_{k-1}+r}{a_{k-1}}} = \left(1+\frac{r}{a_{k-1}}\right)^{\frac{1}{a_k}} < 1+\frac{r}{a_{k-1}a_k} =$$

Scanned with OKEN Scanner

$= 1 + \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k a_{k-1}} = 1 + \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}.$

Însumând rezultă $S_n < n + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n\mp 1}} < n + 1 \Rightarrow [S_n] = n.$

64*. Soluția 1

Notăm cu S_n suma din [...]. Pentru $k \leq 2n$ avem inegalitățile:

$n + \frac{k}{2n+1} < \sqrt{n^2 + k} < n + \frac{k}{2n};$

care se pot verifica prin calcul direct. Prin însumare rezultă:

$2n^2 + n < S < 2n^2 + n + \frac{1}{2} < 2n^2 + n + 1 \Rightarrow [S_n] = 2n^2 + n.$

Soluția 2

În membrul stâng sunt $2n$ termeni și suma oricăror doi termeni egali depărtați de extremi verifică inegalitatea:

$2n + 1 \leq \sqrt{n^2 + k} + \sqrt{n^2 + 2n - (k-1)} < 2n + 1 + \frac{1}{n}, k = \overline{1,n}.$

Prin însumare rezultă: $n(2n+1) \leq S_n < n(2n+1) + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2n^2 + n \leq S_n < 2n^2 + n + 1 \Rightarrow [S_n] = 2n^2 + n.$

George Oboroceanu

65**. Pentru $x > 0 \Rightarrow 1 - \frac{x}{2} < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, de unde rezultă $n - 1 =$

$= n - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} < \frac{1}{\sqrt{1+a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+a_n}} < n,$

deci $[E] = n - 1.$

Doina Ionescu, Aurelian Ionescu, R.M.T., 2013

66**. Pentru orice $k \in [m^2 + 1, (m+1)^2] \Rightarrow [\sqrt{k-1}] = m$, deci

$$\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) = \sqrt{(m+1)^2} - \sqrt{m^2} = 1.$$

Prin urmare, $\sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - \left(\sqrt{k-1}\right)}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} =$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} \frac{n-m}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sum_{m=0}^{n-1} (n-m) \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} (n-m) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}, \text{ deci } [S] = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Matematica v scole, 1979

Scanned with OKEN Scanner

67**. Avem $n-\frac{k+1}{2n}<\sqrt{n^2-k}<n-\frac{k}{2n},(\forall)\ k=\overline{1,n}$ (1)

şi $n+\frac{k-1}{2n}<\sqrt{n^2+k}<n+\frac{k}{2n},(\forall)\ k=\overline{1,n}$ (2)

care verifică relaţia prin ridicare la pătrat.

Din (1) şi (2) deducem: $2n-\frac{1}{n}<\sqrt{n^2-k}+\sqrt{n^2+k}<2n$ de unde

prin însumare avem: $2n^2-1<\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{n^2-k}+\sqrt{n^2+k}\right)<2n^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2n^2-1<\sum_{k=-n}^{n}\left(\sqrt{n^2+k}-n\right)<2n^2\Leftrightarrow 2n^2+n-1<$$

$$<\sum_{k=-n}^{n}\sqrt{n^2+k}<2n^2+n\Rightarrow\left[\sum_{k=-n}^{n}\sqrt{n^2+k}\right]=2n^2+n-1.$$

M.O. Drîmbe

68. Deducem că:

$\left[\sqrt{4k^2-2k}\right]=2k-1$ deoarece $2k-1\le\sqrt{4k^2-2k}<2k$ (*);

$\left\{\sqrt{4k^2-2k}\right\}=\sqrt{4k^2-2k}-\left[\sqrt{4k^2-2k}\right]=\sqrt{4k^2-2k}-(2k-1)$, deci

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{4k^2-2k}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4k^2-2k}-(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k-1+\sqrt{4k^2-2k}}.$$

Utilizând (*)rezultă că: $\frac{n}{3}<\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{4k^2-2k}\right\}\le\frac{n}{2}$, de unde rezultă că:

$$2\le\frac{n}{\sum\left\{\sqrt{4k^2-2k}\right\}}<3.$$

Călin Burduşel, O.L. Argeş, 2006

69. Evident $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{\frac{1}{k^4+k^2+1}}>\sum_{k=1}^{n}1=n$ şi $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{\frac{1}{k^4+k^2+1}}=$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)\underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{k^4+k^2}\right)^{\frac{1}{k^4+k^2+1}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)1+1+\cdots+1}{k^4+k^2+1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{k^4+k^2+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right)=$$

$$=n+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n^2+n+1}\right]<n+\frac{1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, suma este cuprinsă între n și $n+\frac{1}{2}$ de unde rezultă egalitatea.

Mihaly Bencze

70**. Avem: $n+\frac{2k-1}{4n}<\sqrt{n^2+k}<n+\frac{k}{2n}$ $(*)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2+\frac{2k-1}{2}+\left(\frac{2k-1}{4n}\right)^2<n^2+k<n^2+k+\left(\frac{k}{2n}\right)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\frac{2k-1}{4n}\right)^2<\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\left(\frac{k}{2n}\right)^2$. Prin însumare, în $(*)$ rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n}n+\frac{2k-1}{4n}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2+k}<\sum_{k=1}^{n}\left(n+\frac{k}{2n}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+\frac{n}{4}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2+k}<n^2+\frac{n+1}{4}.$$

Utilizând proprietatea (u) sau (v) rezultă: $\left[\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2+k}\right]=n^2+\left[\frac{n}{4}\right]$.

M.O. Drîmbe

71***. Avem: $2n+\frac{16k-1}{64n}<\sqrt{4n^2+k}<2n+\frac{k}{4n}$ $(1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4n^2+\frac{16k-1}{16}+\left(\frac{16k-1}{64n}\right)^2<4n^2+k<4n^2+k+1+\left(\frac{k}{4n}\right)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{16}\left(\frac{16k-1}{64n}\right)^2<\frac{1}{16}<\frac{1}{16}+\left(\frac{k}{4n}\right)^2$.

Însumând în (1) rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(2n+\frac{16k-1}{64n}\right)<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4n^2+k}<\sum_{k=1}^{n}\left(2n+\frac{k}{4n}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n^2+\frac{1}{64n}(8n(n+1)-n)<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4n^2+k}<2n^2+\frac{1}{4n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n^2+\frac{8}{n}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4n^2+k}<2n^2+\frac{n+1}{8}\Rightarrow\left[\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4n^2+k}\right]=2n^2+\left[\frac{n}{8}\right],$$

unde s-a utilizat proprietatea cunoscută.

Dacă $\frac{k}{n}\le x<\frac{k+1}{n}$, unde $k\in\mathbb{Z}$ și $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $[x]=\left[\frac{k}{n}\right]$.

M.O. Drîmbe

Scanned with OKEN Scanner

72*.** Dacă $k \in \mathbb{N}^*$ cu $n^3 \le k \le (n+1)^3 - 1 \Rightarrow \left[\sqrt[3]{k}\right] = n$, care are loc pentru $3n^2 + 3n + 1$ numere naturale consecutive.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ cel mai mare număr natural pentru care $n^3 \le m < (n+1)^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt[3]{k}\right] = \sum_{k=1}^{n^3-1}\left[\sqrt[3]{k}\right] + \sum_{k=1}^{m}\left[\sqrt[3]{k}\right] = \sum_{k=1}^{n-1} k(3k^2+3k+1) + n(m-n^3+1) =$$

$$= 3\frac{n^2(n-1)^2}{4} + 3\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + n(p+1),$$ unde s-a notat $m - n^3 = p$, cu $0 \le p < 3n^2 + 3n + 1$. Ecuaţia devine:

$$n^3 + 2n^2 + n - 4p - 4 = 0, \text{ unde } p = \frac{n^3 + 2n^2 + n - 4}{4} \in \mathbb{N},$$

$0 \le p \le 3n^2 + 3n + 1 \Rightarrow n(n+1)(n-1) - 8 < 0 \Rightarrow n \le 11$ şi din $p \in \mathbb{N}$ rezultă $(m = n^3 + p), n \in \{1,3,4,5,7,8,9,11\} \Rightarrow$

$\Rightarrow p \in \{0,11,24,44,111,161,224,345\} \Rightarrow$

$\Rightarrow m \in \{11,38,88,169,454,673,963,1126\}$.

Cardinal 2000-2001

73.** Evident pentru $n = 1$ este adevărată egalitatea. Vom proceda prin inducţie. Avem: $\left[\sqrt{n^2+p}\right] = n, p \in \{1,2,\ldots,2n\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\sqrt{n^2+p}\right\} = \sqrt{n^2+p} - n < \sqrt{n^2 + p + \left(\frac{p}{2n}\right)^2} - n = \frac{p}{2n}.$$

De remarcat că:

$$\sum_{k=n^2+1}^{n^2+2n}\{\sqrt{k}\} < \sum_{p=1}^{2n}\frac{p}{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{p=1}^{2n} p = \frac{1}{2}\cdot\frac{2n(2n+1)}{2} = \frac{2n+1}{2},$$

prin urmare rezultă:

$$\sum_{k=1}^{(n+1)^2}\{\sqrt{k}\} = \sum_{k=1}^{n^2}\{\sqrt{k}\} + \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2}\{\sqrt{k}\} \le \frac{n^2-1}{2} + \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2}\{\sqrt{k}\} <$$

$$< \frac{n^2-1}{2} + \frac{2n+1}{2} = \frac{(n+1)^2-1}{2}.$$

Aşadar inegalitatea este adevărată.

Rusia, 1998/1999, A. Hrubrov

74.** Avem $n + 1 - \frac{2k+1}{4(n+1)} < \sqrt{(n+1)^2 - k} < n + 1 - \frac{k}{2(n+1)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (n+1)^2 - \frac{2k+1}{2} + \left(\frac{2k+1}{4(n+1)}\right)^2 < (n+1)^2 - k < (n+1)^2 - k +$$

$+\left(\frac{k}{2(n+1)}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\right)^2 < \frac{1}{2} < \left(\frac{k}{2(n+1)}\right)^2.$

Prin însumare rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n}\left((n+1)-\frac{2k+1}{4(n+1)}\right) < \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(n+1)^2-k} < \sum_{k=1}^{n}\left(n+1-\frac{k}{2(n+1)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n+1)-\frac{1}{4(n+1)}\cdot(n(n+1)+n) < \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(n+1)^2-k} < n(n+1)-$$

$$-\frac{1}{2(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow n^2+\frac{3n-1}{4} < \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(n+1)^2-k} < n^2+\frac{3n}{4}$$

și utilizând proprietatea (u) rezultă: $\left[\sum\sqrt{(n+1)^2-k}\right] = n^2+\left[\frac{3n-1}{4}\right]$.

M.O. Drîmbe

75*.** Soluția 1

Avem $S_{2m} = m$ și $S_{2m+1} = \frac{-(2m+1)}{2} - \frac{1}{2} = -(m+1)$.

Notăm cu $S_n = \sum_{k=1}^{n^2}(-1)^k\left[\sqrt{k}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Calculăm $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2}(-1)^k\left[\sqrt{k}\right] =$

$= (-1)^{n^2+1}n + (-1)^{n^2+2}n + \cdots + (-1)^{(n+1)^2-1}n + (-1)^{(n+1)^2}(n+1) =$

$= (-1)^{(n+1)^2}(n+1) = (-1)^{n+1}(n+1), \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (1).

Demonstrăm prin inducție că $S_{2m} = m, S_{2m+1} = -(m+1), \forall m \in \mathbb{N}^*$.

Etapa de verificare este încheiată. Fie $S_{2m} = m, S_{2m+1} = -(m+1)$.

Dacă $n = 2m \Rightarrow n+1 = 2m+1$ și deci:

$S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1}(n+1) = m - 2m - 1 = -(m+1)$.

Iar, dacă $n = 2m+1 \Rightarrow n+1 = 2m+2$ atunci din:

$S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1}(n+1) = -(m+1) + 2m + 2 = m+1$,

afirmația este adevărată.

Soluția 2

Avem $\sum_{k=1}^{n^2}(-1)^k\left[\sqrt{k}\right] = \sum_{k=1}^{n^2-1}(-1)^k\left[\sqrt{k}\right] + (-1)^{n^2}n =$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=y^2}^{(y+1)^2-1}(-1)^k\left[\sqrt{k}\right] + (-1)^n n = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=y^2}^{(y+1)^2-1}(-1)^k\left[\sqrt{k}\right] + (-1)^n n =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=y^2}^{(y+1)^2-1} (-1)^k y + (-1)^n n = \sum_{j=1}^{n-1} y \sum_{i=0}^{2j} (-1)^{j^2+i} + (-1)^n n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} y(-1)^{j^2} \sum_{i=0}^{2j} (-1)^i + (-1)^n n = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^y y + (-1)^n n =$$

$$= \begin{cases} -1+2-3+4 \ldots -(2m-1)+2m, \text{dacă } n = 2m, m \in \mathbb{N}^* \\ -m \qquad\qquad\qquad\qquad\quad , \text{dacă } n = 2m-1, n \in \mathbb{N}^* \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} m \text{ , dacă } n = 2m \\ -m \text{ , dacă } n = 2m-1 \end{cases} = (-1)^n \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Concurs Cehia și Concurs Grecia

76***. Avem $\sqrt{(m+n-1)^2-(m+n-1)-1+\sqrt{(m+n)^2-(m+n)-1}} <$

$$< \sqrt{(m+n-1)^2-(m+n-1)-1+\sqrt{(m+n)^2}} =$$

$= \sqrt{(m+n-1)^2} = m+n-1$ și „din aproape în aproape" rezultă: $E_{m,n} < m+1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$; cum șirul $(E_{m,n})_{n\geq 1}$ este strict crescător, rezultă:

$$m < E_{m1} < E_{m,n} \Rightarrow m < \sqrt{(m+1)^2-(m+1)-1} =$$

$= \sqrt{m^2+m+1}, m-1 \geq 0 \Rightarrow m < E_{m,n} < m+1 \Rightarrow [E_{m,n}] = m.$

Gh. Eckstein (enunț parțial)

77***. a) Utilizăm inegalitatea: $\frac{2}{3}n\sqrt{n+1} < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2n}{3} < \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{\sqrt{n+1}} < \frac{2\sqrt{n(n+1)}}{3} < \frac{2n+1}{3} \Rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right] = \left[\frac{2n}{3}\right];$$

(S-a utilizat proprietatea $\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}, \forall\, k \in \mathbb{Z}$ și $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x] = \left[\frac{k}{n}\right]$ vezi capitolul proprietăți.)

b) Putem utiliza rezultatul unui exercițiu anterior sau:

$$2n+1 < \sqrt{n^2+k} + \sqrt{(n+1)^2-k} < \sqrt{4n^2+4n+2} < 2n+1+\frac{1}{4n} \quad (1).$$

Pentru prima inegalitate se ridică la pătrat, iar pentru a doua se utilizează inegalitatea: $a+b \leq \sqrt{2(a)^2+b^2}, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, iar ultima inegalitate prin ridicare la pătrat. Însumând în (1) rezultă:

Scanned with OKEN Scanner

$$(2n+1)n < \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{n^2+k}+\sqrt{(n+1)^2-k}\right) < n(2n+1)+\frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow 2n^2+n < \sum_{k=1}^{2n}\sqrt{n^2+k} < 2n^2+n+\frac{1}{4} \quad (2).$$

Dar suma S din enunț se mai scrie:

$$S=\sum_{k=1}^{n^2}\sqrt{k}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i^2+1}^{(i+1)^2-1}\sqrt{k}+\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{2i}\sqrt{i^2+j}+\frac{n(n+1)}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S>\sum_{i=1}^{n-1}i(2i+1)+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{3}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$=\frac{n(2n^2+1)}{3} \text{ și } S<\sum_{i=1}^{n-1}\left(i(2i+1)+\frac{1}{4}\right)+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(2n^2+1)}{3}+\frac{n-1}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2n^2+1}{3}<\frac{S}{n}<\frac{2n^2+2}{3}\Rightarrow\left[\frac{S}{n}\right]=\left[\frac{2n^2+1}{3}\right].$$

M.O. Drîmbe

78*.** Vom utiliza rezultatele din problemele precedente.

Avem $n^2+\frac{3n-1}{4}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(n+1)^2-k}<n^2+\frac{3n}{4}$

și $n^2+\frac{n}{4}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2+k}<n^2+\frac{n+1}{4}.$

Scăzând, rezultă: $\frac{n-1}{2}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(n+1)^2-k}-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2+k}<\frac{n}{2}$

și utilizând proprietatea (u) rezultă:

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(n+1)^2-k}-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2+k}<\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

M.O. Drîmbe

79*.** Avem

$[\sqrt{4k^2+3}]=2k,\ [4k^2+8k+5]=2k+2,[\sqrt{4k^2+4k+3}]=$
$=2k+1,[4k^2+12k+11]=2k+3.$

Suma devine:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+2k+2)(2k+1+2k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k+2)(4k+4)}=\frac{n}{16(n+1)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

80*.** Fie $\left[\sqrt{k}+\frac{1}{2}\right]=h \Rightarrow h \leq \sqrt{k}+\frac{1}{2}<h+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h^2-h+\frac{1}{h} \leq k<h^2+h+\frac{1}{h} \Leftrightarrow h(h-1)+1 \leq k \leq h(h-1)$

și fie $m \in \mathbb{N}$ pentru care $m(m+1)+1 \leq n \leq (m+1)(m+2)$.

Avem $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left[\sqrt{k}+\frac{1}{2}\right]}=\sum_{k=1}^{m(m+1)} \frac{1}{\left[\sqrt{k}+\frac{1}{2}\right]}+\sum_{k=m(m+1)+1}^{n} \frac{1}{\left[\sqrt{k}+\frac{1}{2}\right]}=$

$=\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=h(h-1)+1}^{h(h+1)} \frac{1}{\left[\sqrt{k}+\frac{1}{2}\right]}+\sum_{k=m(m+1)+1}^{n} \frac{1}{m+1}=$

$=\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=h(h-1)+1}^{h(h+1)} \frac{1}{h}+\frac{n+m(m+1)}{m+1}=\sum_{h=1}^{m} \frac{h(h+1)-h(h-1)}{h}+$

$+\frac{n}{m+1}-m=2m+\frac{n}{m+1}-m=m+\frac{n}{m+1}$, dar, cum $m(m+1)+1 \leq$

$\leq n \leq (m+1)(m+2)$ $(*)$, se deduce că $\left[\frac{\sqrt{4n-3}-1}{2}\right]=m$. Într-adevăr,

$m \leq \frac{\sqrt{4n-3}-1}{2}<m+1 \Leftrightarrow (2m+1)^2 \leq 4n-3<(2m+3)^2$,

$m(m+1)+1 \leq n \leq (m+1)(m+2)$ în acord cu $(*)$.

Mihaly Bencze

81.** Avem $E_{m,n}=A_m+B_n$ și $A_m>\sqrt[3]{m^3-m}>m-\frac{1}{3}$ și

$B_n>\sqrt{n^2-n}>n-\frac{2}{3} \Rightarrow A_m+B_n>m+n-1$.

Dacă suprimăm m din ultimul radical a lui A_m și n din ultimul radical a lui B_n rezultă: $E_{m,n}=A_m+B_n<m+n \Rightarrow [E_{m,n}]=m+n-1$.

Matematica v scole

82.** Notăm $A=\{x_1\}+\{x_2\}+\cdots+\{x_n\} \in \mathbb{N} \Rightarrow [x_1][x_2]\ldots[x_n]=\frac{1}{A^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A=1 \Rightarrow [x_1][x_2]\ldots[x_n]=1 \Rightarrow [x_k]=1, k=\overline{1,n} \Rightarrow$

$\Rightarrow S=\sum_{k=1}^{n} x_k=\sum_{k=1}^{n}[x_0]+\sum_{k=1}^{n}\{x_k\}=n+1$.

Concursul „Sfera", 2012

Scanned with OKEN Scanner

83**. Utilizăm inegalitatea Cauchy-Buniakovsky Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

pentru $a_i = 1$ și $b_i = \sqrt{[x_i] + \{x_{i+1}\}}$ cu $\{x_{n+1}\} = \{x_1\}$

și obținem $E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)\left(\sum_{i=1}^{n}([x_i] + \{x_{i+1}\})\right) =$

$= n \cdot n = n^2 \Rightarrow E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq n$ (1) $\Rightarrow \max E(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n$ (2), cu egalitate în (1) dacă $\frac{[x_1] + \{x_2\}}{1} = \frac{[x_2] + \{x_3\}}{1} = \cdots = \frac{[x_n] + \{x_1\}}{1} = \frac{n}{n} = 1$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1.$

Concurs „Petru Moroșanu", Trident 2007-2008

84*. Utilizăm inegalitatea:

$\frac{3}{2}\sqrt[3]{(k+1)^2 - k^2} < \frac{1}{\sqrt[3]{k}} < \frac{3}{2}\sqrt[3]{k^2 - (k-1)^2}, \forall\, k \geq 2$. Însumând obținem:

$$\frac{3n-1}{2} < \frac{1 + \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n^2+1)^2} - \sqrt[3]{2^2}\right)}{n} < \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}}{n} < \frac{1 + \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{n^2 - 1}\right)}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3n-1}{2} < \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right) < \frac{3n}{2} \Rightarrow \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right] = \left[\frac{3n-1}{2}\right].$$ S-a utilizat proprietatea: dacă $\frac{k}{n} \leq E < \frac{k+1}{n} \Rightarrow [E] = \left[\frac{k}{n}\right]$.

M.O. Drîmbe

ϕ 4. Sume fără radicali

85. Fie k par, $k = 2j, j \in \mathbb{N} \Rightarrow a_k = j^2, b_k = j \Rightarrow \frac{a_k}{b_k} = j$, iar dacă $k = 2j+1$, $j \in \mathbb{N}$, avem: $a_k = \left[\frac{4j^2 + 4j + 1}{4}\right] = j^2 + j \Rightarrow b_k = j \Rightarrow \frac{a_k}{b_k} = j + 1.$

Prin urmare, suma este:

$1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 1004 + 1004 + 1005 = 1004 \cdot 1006.$

86. Utilizăm identitatea lui Hermite $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] + [x]$, deci

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right] = \sum_{k \geq 0}\left[\frac{n}{2^k}\right] - \left[\frac{n}{2^{k+1}}\right] = n - \left[\frac{n}{2^{m+1}}\right] = n$$

pentru m suficient de mare.

Scanned with OKEN Scanner

87. Avem $\left[\frac{k^2}{k+1}\right] = \left[\frac{k^2-1+1}{k+1}\right] = \left[k-1+\frac{1}{k+1}\right] = k-1$, deci

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}(k-1) = \sum_{k=2}^{n}(k-1)2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k\cdot 2^k.$$

Se știe că $\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2}$. În cazul dat:

$S_n = (n-1)2^{n+1} - n\cdot 2^n + 2 = n\cdot 2^n - 2\cdot 2^n + 2 = 2^n(n-2)+2$ și

$$[2^{-n-1}S_n] = \left[\frac{2^n(n-2)+2}{2^{n+1}}\right] = \left[\frac{n}{2}-1+\frac{1}{2^n}\right] = \left[\frac{n}{2}-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right] = \frac{n}{2}-1$$

pentru n par.

Mihaly Bencze, Octogon vol.24 (1)

88*. Evident, dacă $a \in \mathbb{Z}$, egalitatea este adevărată. Reciproc, procedăm prin reducere la absurd. Să presupunem că $\exists\, a \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ pentru care are loc egalitatea, dar atunci se știe că $[a]+[-a] = -1, \forall\, a \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$, $(*)$ și avem:

$[a]+[2a]+\cdots+[na] = \frac{[na](n+1)}{2}$ (1) $[-a]+[-2a]+\cdots+[-na] =$

$= \frac{[-na](n+1)}{2}$ (2) și prin adunare membru cu membru $n = \frac{n+1}{2}$,

absurd. Așadar, $a \in \mathbb{Z}$.

O.L. Hunedoara, G.M. nr. 10/2011

89. Analog ca la exercițiul precedent.

M. Bencze

90. Soluția 1

Împărțind numerele $m, m+1, \ldots, m+n-1$ la n, există $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ astfel ca $n|m+k$, atunci $\left[\frac{m+p}{n}\right] = \frac{m+k}{n}$ pentru $p = k, k+1, \ldots, n-1$ și $\left[\frac{m+p}{n}\right] = \frac{m+k}{n} - 1$ pentru $p = 0,1,\ldots,k-1$. Deci suma S cerută este:

$$S = \underbrace{\left[\frac{m}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{m+k-1}{n}\right]}_{k \text{ termeni}} + \underbrace{\left[\frac{m+k}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{m+n-1}{n}\right]}_{n-k \text{ termeni}} =$$

$$= \left(\frac{m+k}{n}-1\right)k + \frac{m+k}{n}(n-k) = m.$$

Soluția 2

Notăm $\frac{m}{n} = x$ și obținem identitatea lui Hermite:

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right] = \left[n\cdot\frac{m}{n}\right] = [m] = m.$$

Scanned with OKEN Scanner

91. Evident $m \geq 2, n \geq 2$. Arătăm că pentru orice $k \geq 2$,
$k-1 < \dfrac{k^n+1}{k^{n-1}+1} < k$ (care se verifică cu uşurinţă), prin urmare:
$\left[\dfrac{k^n+1}{k^{n-1}+1}\right] = k-1$. Aşadar $\displaystyle\sum_{k=2}^{m}\left[\frac{k^n+1}{k^{n-1}+1}\right] = \sum_{k=2}^{m}(k-1) = \frac{m(m-1)}{2}$.

Mugurel Szörös, G.M. nr. 5/1989

92. Avem: $k^2-1 < \dfrac{k^{n+1}+1}{k^{n-1}+1} < k^2-1 \Rightarrow k^2-2 < k^{n-1}$ şi $k^2 > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\dfrac{k^{n+1}+1}{k^{n-1}+1}\right] = k^2-1 \Rightarrow S(m,n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{m}(k^2-1) = \sum_{k=2}^{m} -(m-1) =$
$= \displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 - m = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - m = \frac{m(m-1)(2m+5)}{6}$.

Olimpiadă Austria, 1995

93. Utilizând identitatea lui Hermite $\left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x]-[x]$ rezultă:
$S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{x}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right] = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{x}{2^k}\right] - \left[\frac{x}{2^{k+1}}\right] = [x] - \left[\frac{x}{2^{n-1}}\right]$.
Dacă $x > 0$, atunci pentru n suficient de mare suma este egală cu $[x]$. Dacă $x < 0$, atunci pentru n suficient de mare $-1 < \dfrac{x}{2^{n-1}} < 0$, deci suma este:
$S = [x]-1$.

94*. Utilizăm identitatea lui Hermite $\left[x+\dfrac{1}{2}\right] = [2x]-[x]$, deci
$\left[2^k x+\dfrac{1}{2}\right] = [2^{k+1}x]-[2^k x]$, de unde rezultă
$S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[2^k x+\frac{1}{2}\right] = \sum_{k=1}^{n}[2^{k+1}x]-[2^k x] = [2^{n+1}x]-[2x]$.

95. Pentru $n = 4k$ sau $4k+1 \Rightarrow m = 2k$, deci
$\displaystyle\sum_{p=1}^{m}\left[\frac{p}{2}\right] = 0+2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+2(k-1)+k = k^2 \equiv \left[\frac{n}{4}\right]^2$.

Cristinel Mortici, O.L. Dâmbovița, 2012

96*. Avem $k-1 < \dfrac{k^2}{k+1} < k \Rightarrow \left[\dfrac{k^2}{k+1}\right] = k-1$.

Scanned with OKEN Scanner

$$S=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}\left[\frac{k^2}{k+1}\right]=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}(k-1)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k-\sum_{k=1}^{q}2^{k-1}\equiv\frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot 2^{n+2}-(n+1)\cdot 2^{n+1}+2}{(2-1)^2}-\frac{2^n-1}{2-1}=$$

$$=n\cdot 2^{n+1}-(n+1)\cdot 2^n+1-2^n+1=n\cdot 2^n-2^{n+1}+2.$$

$$\left(\text{Se utilizează relația } \sum_{k=1}^{n}k\cdot a^k=\frac{n\cdot a^{n+2}-(n+1)\cdot a^{n+1}+a}{(a-1)^2}.\right)$$

97. $S_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{k}{2}\right]=0+1+1+2+2+\cdots+(n-1)+(n-1)=$

$=n(n-1)$; $S_{2n}=S_{2n-1}+\left[\frac{2n}{2}\right]=n(n-1)+n=n^2$, prin urmare suma este pătrat perfect dacă n este par.

H.M.M.T., 2002

98. Avem $\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1}=\operatorname{arctg}(k+1)-\operatorname{arctg}k\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1}=\operatorname{arctg}(n+1)-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\left[\operatorname{arctg}(n+1)-\frac{\pi}{4}\right]=0,$$

deoarece $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}(n+1)<\frac{\pi}{2}$.

Mihaly Bencze

99*.** Avem $[x_1^2]+[x_2^2]+\cdots+[x_n^2]+1+2+\cdots+n=\frac{n(n+3)}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow[x_1^2]+[x_2^2]+\cdots+[x_n^2]=\frac{n(n+3)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=n.$$

Dar, cum $x_k\geq 1\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}[x_k]^2\geq n$, cu egalitate dacă $[x_k]^2=1,\forall\, k=\overline{1,n}\Rightarrow$

$\Rightarrow x_k\in[1,\sqrt{2})$. Așadar $[a,b)=[1,\sqrt{2})$.

Nicolae Alb, O.L., 2011

100.** Utilizăm proprietatea. Dacă $a,b\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ și $a+b\in\mathbb{Z}$ atunci $\{a\}+\{b\}=1$ (vezi capitolul proprietăți).

Dar cum: $k\frac{n-1}{n}+(n-k)\frac{n-1}{n}=n-1$ (1) și

$k\frac{n+1}{n}+(n-l)\frac{n+1}{n}=n+1,\forall\, k=\overline{1,n}$ (2). Atunci:

Scanned with OKEN Scanner

$\left\{k\frac{n-1}{n}\right\}+\left\{(n-k)\frac{n-1}{n}\right\}=1$ și $\left\{k\frac{n+1}{n}\right\}+\left\{(n-k)\frac{n+1}{n}\right\}=1$,
$\forall\, k=\overline{1,n}$.

Din (1) rezultă $A=\sum_{k=1}^{1003}\left\{k\frac{2006}{2007}\right\}+\sum_{k=1}^{1003}(2007-k)\frac{2006}{2007}=$

$=\sum_{k=1}^{1003}\left\{k\frac{2006}{2007}\right\}+\left\{(2007-k)\frac{2006}{2007}\right\}=1003\Rightarrow[A]=1003$

și din (2) rezultă $B=\sum_{k=1}^{1003}\left\{k\frac{2008}{2007}\right\}+\sum_{k=1}^{1003}(2007-k)\frac{2005}{2007}=1003\Rightarrow$

$\Rightarrow[B]=[A]=1003$.

Petre Bătinețu, Concurs „Cristian Calude", 2008

101**. a) Deoarece $\left[a+\frac{19}{100}\right]\le\left[a+\frac{20}{100}\right]\le\cdots\le\left[a+\frac{91}{100}\right]$ și cum

$a+\frac{91}{100}-a-\frac{19}{100}=\frac{72}{100}<1\Rightarrow\left[a+\frac{19}{100}\right]-\left[a+\frac{19}{100}\right]\in\{0,1\}$.

Avem 73 de termeni și cum 584 : 73 = 8 rezultă că

$\left[a+\frac{k}{100}\right]=8, k=\overline{19,91}, 8\le a+\frac{91}{100}<9\Rightarrow 709\le 100a<809,$

$8\le a+\frac{19}{100}<9\Rightarrow 781\le 100a<881\Rightarrow[100a]\in\{781,782,\ldots,808\}$;

b) Deoarece 556 nu este divizibil la 73, rezultă că un număr de termeni au partea întreagă 7 și cealaltă parte, partea 8, adică $p7+q8=$ $=556$ și

$p+q=73\Rightarrow p=28$ și $q=45$, deci $\left[b+\frac{47}{100}\right]=\left[b+\frac{48}{100}\right]=$

$=\cdots=\left[b+\left[\frac{91}{100}\right]\right]=8$, deci avem $b+\frac{46}{100}<8$ și $b+\frac{47}{100}\ge 8\Rightarrow$

$\Rightarrow 753\le 100b<754\Rightarrow[100b]=753$.

A.I.M.E., 1991

102**. a) $\left\{\frac{2}{2011}\right\}+\left\{2\cdot\frac{2}{2011}\right\}+\left\{3\cdot\frac{2}{2011}\right\}+\cdots+\left\{2010\cdot\frac{2}{2011}\right\}=$

$=\left\{\frac{2}{2011}\right\}+\left\{2\cdot\frac{2}{2011}\right\}+\cdots+\left\{1005\cdot\frac{2}{2011}\right\}+\left\{1+\frac{1}{2011}\right\}+\left\{1+\frac{3}{2011}\right\}+$

$+\cdots+\left\{1+\frac{2009}{2011}\right\}=\frac{2}{2011}+\frac{4}{2011}+\cdots+\frac{2010}{2011}+\frac{1}{2011}+1+\frac{3}{2011}+$

$+\cdots+\frac{2009}{2011}=\frac{2010\cdot 2011}{2\cdot 2011}=1005$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru $k \in \{1,2,\ldots 2011\}$, conform teoremei împărțirii cu rest avem $k_p = 2011c_k + r_k, 0 < r_k \leq 2010$. Atunci $\left\{\frac{k_p}{2011}\right\} = \left\{c_k + \frac{r_k}{2011}\right\} = \left\{\frac{r_k}{2011}\right\}$. Arătăm că oricare ar fi $l, s \in \{1,2,\ldots 2010\}, l \neq s$, numerele lp și sp dau resturi diferite la împărțirea cu 2011. Avem $lp = 2011c_l + r_l$, $0 < r_l \leq 2010$ și $sp = 2011c_l + r_l, 0 < r_l \leq 2010$. Scădem cele două relații și obținem: $p(l-s) = 2011(c_l - c_s) + r_l - r_s$. Dacă $r_l = r_s$, atunci $p(l-s) = 2011(c_l - c_s)$. Dar cum $(p, 2011) = 1 \Rightarrow 2011$ divide pe $l-s$. Deoarece $l, s \in \{1,2,\ldots 2010\}$ și $l \neq s \Rightarrow 0 < |l-s| \leq 2009$, adică 2011 divide un număr din mulțimea $\{1,2,\ldots 2009\}$, absurd!

În concluzie $\left\{\frac{p}{2011}\right\} + \left\{2 \cdot \frac{p}{2011}\right\} + \left\{3 \cdot \frac{p}{2011}\right\} + \cdots + \left\{2010 \cdot \frac{p}{2011}\right\} =$

$= \left\{\frac{r_1}{2011}\right\} + \left\{\frac{r_2}{2011}\right\} + \cdots + \left\{\frac{r_{2010}}{2011}\right\} = \frac{1}{2011} + \frac{2}{2011} + \cdots + \frac{2010}{2011} = 1005.$

M. Piticari, V. Cerbu, Concursul „Nicolae Păun", 2011

103*.** Notăm $b_i = \{a_i\} \in [0,1)$ și $k_i = [a_i], i = \overline{0, n-1}$. Pentru $x = 0$ rezultă $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = 0 \Rightarrow [x] + [x + b_1] + \cdots + [x + b_{n-1}] = [cx]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(*)$. Putem presupune că $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{n-1} < 1$ și pentru $x = 1$ și $x = -1$ rezultă $[c] = n$ și $[-c] = -n \Rightarrow c = n$.

Pentru $x = -b_1$ rezultă $-1 = [-nb_1] \Rightarrow b_1 \leq \frac{1}{n}$.

Pentru $x = -b_2$ rezultă $-2 = [-nb_2] \Rightarrow b_2 \leq \frac{2}{n}$ și $b_k \leq \frac{k}{n}, \forall\, k = \overline{1, n-1}$.

Pentru $x = \frac{1}{n}$ în $(*) \Rightarrow \left[\frac{1}{n} + b_{n-1}\right] = 1 \Rightarrow b_{n-1} \geq \frac{n-1}{n}$ și în concluzie $b_{n-1} = \frac{n-1}{n}$. Luând succesiv $x = \frac{2}{n}, x = \frac{3}{n}, \ldots, x = \frac{n-1}{n}$ în $(*)$, obținem $b_i = \frac{i}{n}, \forall\, i = \overline{1, n-1}$. În concluzie, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este o mulțime de forma: $\left\{k_1 + \frac{1}{n}, k_2 + \frac{1}{n}, \ldots, k_{n-1} + \frac{n-1}{n}\right\}$ cu $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = 0$, cu $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1, n-1}$, iar $c = n$.

Iulian Georgescu, Paul Georgescu, R.M. nr. 1/2005

104*.** Calculăm $S_n(x) - S_{n-1}(x) = \left[\frac{x+0}{n}\right] + \left[\frac{x+1}{n}\right] + \left[\frac{x+n-1}{n}\right] =$

$= \left[\frac{x}{n}\right] + \left[\frac{x}{n} + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}\right] = \left[n \cdot \frac{x}{n}\right] = [x]$

dar cum $S_1(x) = [x]$ rezultă

$S_n(x) = (S_n(x) - S_{n-1}(x)) + (S_{n-1}(x) - S_{n-2}(x)) + \cdots + (S_1(x) - S_2(x)) +$
$+S_1(x) = n[x]$, deci $S_n(x) = n[x]$.

Concurs Croația

105. Evident pentru $p = 3$ egalitatea este verificată.
Considerăm deci $p > 3, p$ –prim, deci $p \in \{4n+1, 4n+3\}$. Dacă $p = 4n+1$, atunci în membrul stâng termenii sunt nuli sau egali cu 1.
De exemplu:

$$\left[\frac{4}{p}\right] = 0 \text{ și } \left[\frac{2(p-1)}{p}\right] = \left[\frac{8n}{4n+1}\right] = 1.$$

Pentru a determina numărul termenilor nuli este suficient ca în termenul general $\left[\frac{4k}{p}\right] = \left[\frac{2 \cdot 2k}{p}\right]$ să luăm $4k < p \Rightarrow k < \frac{p}{4}$ (cum p este mai mare ca 3) $\Rightarrow k = \left[\frac{p}{4}\right] < \frac{p}{4}$. Deci numărul maxim de termeni nuli sunt $k = \left[\frac{p}{4}\right]$, iar numărul termenilor egali cu 1, sunt:

$$\frac{p-1}{2} - \left[\frac{p}{4}\right] = \begin{cases} n, & \text{dacă } p = 4n+1 \\ n+1, & \text{dacă } p = 4n+3 \end{cases}$$

Dar $\left[\frac{p+1}{4}\right] = \begin{cases} n, & \text{dacă } p = 4n+1 \\ n+1, & \text{dacă } p = 4n+3 \end{cases}$

106*.** Evident că $0 < \frac{4k}{2n+1} < 2, \forall\, k = \overline{1,n} \Rightarrow \left[\frac{4k}{2n+1}\right] \in \{0,1\}$.

Dacă $0 < \frac{4k}{2n+1} < 1 \Rightarrow \left[\frac{4k}{2n+1}\right] = 0 \Rightarrow 1 < k < \frac{2n+1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 \le k \le \left[\frac{2n+1}{4}\right] = \left[\frac{n}{2}\right]$. Prin urmare sunt $\left[\frac{n}{2}\right]$ termeni nuli, iar suma și restul $n - \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ sunt egali cu 1.

Așadar $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{4k}{2n+1}\right] = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{4k}{2n+1}\right] + \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} \left[\frac{4k}{2n+1}\right] = 0 + \left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) 1 =$
$= \left[\frac{n+1}{2}\right]$ (s-a utilizat faptul că $\left[\frac{2n+1}{4}\right] \equiv \left[\frac{n}{2}\right]$ care se verifică imediat).

107*.** Se consideră cazurile n par și n impar.
Cazul $n = 2p, p \in \mathbb{N}^*$.

$$S_{2p} = \sum_{k=1}^{2p} \left[\frac{k^2}{2}\right] = \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{(2k-1)^2}{2}\right] + \left[\frac{(2k)^2}{2}\right] =$$

Scanned with OKEN Scanner

$= \sum_{k=1}^{p}(4k^2-2k) = \frac{p(p+1)(4p-1)}{3}$ și expresia din dreapta

$S'_{2p} = \frac{p(p+1)(4p-1)}{3} \Rightarrow S_{2p} = S'_{2p}$.

Cazul $n = 2p+1$.

$S_{2p+1} = S_{2p} + \left[\frac{(2p+1)^2}{2}\right] = \frac{p(p+1)(4p-1)}{3} + 2p^2 + 2p =$

$= \frac{p(p+1)(4p+5)}{3} = S'_{2p+1}$.

Ovidiu Pop

108. Soluția 1

Dacă $m \le n$, egalitatea este evidentă.

Dacă $m > n \Rightarrow m = ng + r, q \in \mathbb{N}^*$ și $0 \le r \le n-1 \Rightarrow \frac{m}{n} = q + \frac{r}{n}$,

$0 \le \frac{r}{n} < 1 \Rightarrow \left[\frac{m}{n}\right] = q$. Deci:

$$\left[\frac{1}{n}\right]+\left[\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{1}{n}\right]+\left[\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{n}\right]+$$
$$+\left[\frac{n+1}{n}\right]+\left[\frac{n+2}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{2n}{n}\right]+\left[\frac{n(q-1)+1}{n}\right]+$$
$$+\left[\frac{n(q-2)+2}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{nq}{n}\right]+\left[\frac{nq+1}{n}\right]+\left[\frac{nq+r}{n}\right] = \Bigg\} q \text{ linii}$$

$$= 0+0+\cdots+0+1+$$
$$1+1+\ldots+1+2+$$
$$2+2+\ldots+2+3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(q-1)+(q-1)+\cdots+(q-1)+q \Bigg\} q \text{ linii}$$

$\underbrace{q+q+\cdots+q}_{r} = (n-1)(1+2+\cdots q-1)+1+2+\cdots+q+rq =$

$= n\cdot\frac{q(q-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} + (m-nq)q = -\frac{n}{2}q^2 + \frac{2m-n+2}{2}q =$

$= \left[\frac{m}{n}\right]\left(1+m-\frac{n}{2}\left(1+\left[\frac{m}{n}\right]\right)\right)$.

Soluția 2 Inducția după m.

Gh. Szöllasy, R.M.T. nr. 1/1984

109**. Se observă că $p_{k+1} - p_k \ge 2, \forall\, k \ge 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2S_n = \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{p_2\cdot p_3} + \cdots + \frac{2}{p_n\cdot p_{n+1}} \le \frac{1}{3} + \frac{p_3-p_2}{p_2\cdot p_3} + \frac{p_4-p_3}{p_3\cdot p_4} +$

Scanned with OKEN Scanner

$$+\cdots+\frac{p_{n+1}-p_n}{p_n\cdot p_{n+1}}=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3}\right)+\left(\frac{1}{p_3}-\frac{1}{p_4}\right)+\left(\frac{1}{p_{n-1}}-\frac{1}{p_n}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{p_n}-\frac{1}{p_{n+1}}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_{n+1}}<\frac{1}{3}+\frac{1}{p_2}=\frac{2}{3}\Rightarrow 2S_n<\frac{2}{3}\Rightarrow S_n<\frac{1}{3},$$

dar, cum $S_n\geq S_3=\frac{11}{42}>\frac{1}{4},\forall\, n\geq 3\Rightarrow\frac{1}{4}<S_n<\frac{1}{3},\forall\, n\geq 3$ și

$3<12S_n<4\Rightarrow[12S_n]=3,\forall\, n\geq 3.$

Pentru $n=1, n=2\Rightarrow[12S_n]=2$ și pentru $n\geq 3\Rightarrow[12S_n]=3.$

Florian Dumitrel, Concursul „Nicolae Coculescu", 2009

110***. Folosind identitatea lui Hermite pentru $x\to\frac{x}{n^{m+1}}$ rezultă:

$$\left[\frac{x}{n^m}\right]=\left[\frac{x}{n^{m+1}}\right]+\left[\frac{x+n^m}{n^{m+1}}\right]+\cdots+\left[x+\frac{(n-1)n^m}{n^{m-1}}\right]\Rightarrow\left[\frac{x}{n^m}\right]=\left[\frac{x}{n^{m+1}}\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{x+jn^m}{n^{m+1}}\right]=S_m\,.\text{ Dăm valori lui } m \text{ de la } 0,1,\ldots,k,\ldots\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{m=0}^{\infty}S_m=[x]-\left[\frac{x}{n}\right]+\left[\frac{x}{n}\right]-\left[\frac{x}{n^2}\right]+\cdots+\left[\frac{x}{n^k}\right]-\left[\frac{x}{n^{k+1}}\right]+\cdots=[x]$$

Gabriel Dospinescu, Arhimede 01.10.2001

111. Avem $\frac{1}{mn+n}=\frac{1}{n(m+1)}\leq\frac{1}{mn+k}<\frac{1}{mn},1\leq k\leq n.$

Însumând după k rezultă: $\frac{1}{m+1}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{mn+k}<\frac{1}{m}$ înmulțind cu

$$m(m+1)\Rightarrow\left[m(m+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{mn+k}\right]=m.$$

112***. Scriind egalitatea $a_n=2+a_{n-1}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right]\equiv 2+\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right]\quad(1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n-1}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right]\quad(2).$$

Utilizând inegalitatea $\left[\frac{n}{k}\right]\geq\left[\frac{n-1}{k}\right],2\leq k\leq n-1$ (3), prin însumare

rezultă $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n-1}\right]\geq\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right]$ (4).

Dacă n este compus, adică $n=pq,p,q\in\mathbb{N}^*-\{1\}\Rightarrow\left[\frac{n}{p}\right]=q>\left[\frac{n-1}{p}\right]=$

$=q-1$ și deci inegalitatea (4) este strictă, ceea ce contrazice (2).

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, fie n un n umăr prim, atunci pentru orice $2 \leq k < n$ avem $n = kt + r$ cu $r \in \mathbb{N}, 0 < r \leq t$.

Prin urmare avem $\left[\frac{n}{k}\right] = t = \left[\frac{n-1}{k}\right]$ și deci (1)și (2)sunt adevărate deoarece (3) devine egalitate.

O.N. R. Moldova, 1997, Iugoslavia,1988

113**. Pornim de la inegalitatea $ln\frac{k+1}{k} < \frac{1}{k} < ln\frac{k}{k-1}, \forall\, k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

și prin însumare de la $k \in \overline{n, [n_e p]}$: $ln\frac{[n_e p]+1}{n} < \sum_{k=n}^{[n_e p]} \frac{1}{k} < ln\frac{[n_e p]}{n-1}$;

vom arăta că $p < ln\frac{[n_e p]+1}{n}$ și $ln\frac{[n_e p]}{n+1} < p+1$. Într-adevăr, avem

$p < ln\frac{[n_e p]+1}{n} \Leftrightarrow n_e p < [n_e p] + 1$ și $ln\frac{[n_e p]}{n-1} < p+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [n_e p] < (n-1)e^{p+1} \Leftrightarrow n_e p < (n-1)e^{p+1} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n-1} < e.$

M.O. Drîmbe

114. Prin inducție după k. Pentru $k = 1$ fie $n = 2^a$ și atunci $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \cdots = 2^{a-1} + \cdots + 2 + 1 = 2^a - 1 = n - 1$. Presupunem proprietatea adevărată pentru k, adică din $n_k = 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k}$ avem $\sum_{S \geq 1} \left[\frac{n_k}{2^s}\right] = n_k - k$. Să o demonstrăm pentru $k+1$.

Fie $n_{k+1} = n_k + 2^a$ cu $n_k < 2^a$.

Avem $\sum_{S \geq 1} \left[\frac{n_{k+1}}{2^s}\right] = \sum_{S \geq 1} \left[\frac{2^a + n_a}{2^s}\right] = 2^{a-1} + \cdots + 2 + 1 + \sum_{S \geq 1} \left[\frac{n_k}{2^s}\right] =$

$= 2^a - 1 + n_k - k = n_{k+1} - (k+1).$

Olimpiadă Australia, 1988

115. <u>Soluția 1</u>

Fie n impar, $n = 2m + 1$, atunci $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$. Suma din stânga se mai scrie:

$\sum_{k=1}^{m} \left([k] + \left[k + \frac{1}{2}\right]\right) = \sum_{k=1}^{m} [2k] = \sum_{k=1}^{m} 2k = 2\frac{m(m+1)}{2} = m(m+1) =$

$= \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2}$ (din $n = 2m+1$),

dar $\left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{2m+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{2m+2}{2}\right] = \left[m + \frac{1}{2}\right] \cdot [m+1] = m(m+1).$

Fie n par, $n = 2m$, atunci suma se mai scrie:

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left(\left[\frac{2k}{2}\right]+\left[\frac{2k+1}{2}\right]\right)+\left[\frac{2m}{2}\right]=\sum_{k=1}^{m-1}2k+m=\frac{2m(m-1)}{2}+m=$$

$=m^2=\left(\frac{n}{2}\right)^2$, dar $\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{2m}{2}\right]\cdot\left[\frac{2m+1}{2}\right]=m^2$.

Prin urmare identitatea se verifică.

Dragoș Popescu

116. Evident $n=3m+r, r\in\{0,1,2\}$. Dacă $n=3m$, atunci suma se mai scrie:

$$S=\sum_{k=1}^{m-1}\left(\left[\frac{3k}{3}\right]+\left[\frac{3k+1}{3}\right]\right)+\left[\frac{3k+2}{3}\right]+\left[\frac{3m}{3}\right]=3\sum_{k=1}^{m-1}k+m=$$

$$=\frac{3m\cdot(m-1)}{2}+m=\frac{m\cdot(3m-1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{3}\cdot(n-1)=\frac{n(n-1)}{6}.$$

Dacă $n=3m+1$, atunci

$$S=\sum_{k=1}^{m-1}\left(\left[\frac{3k}{3}\right]+\left[\frac{3k+1}{3}\right]+\left[\frac{3k+2}{3}\right]\right)+\left[\frac{3m}{3}\right]+\left[\frac{3m+1}{3}\right]=$$

$$=\frac{3m\cdot(3m-1)}{2}+2m=\frac{m\cdot(3m+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{6}.$$

Dacă $n=3m+2$, atunci $S=\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{3k}{3}\right]+\left[\frac{3k+1}{3}\right]+\left[\frac{3k+2}{3}\right]=3\sum_{k=1}^{m}k=$

$$=\frac{3m\cdot(m+1)}{2}=\frac{(n-2)(n+1)}{6}.$$

Gh. Andrei, 2003

117. Utilizăm proprietățile din Capitolul I, adică dacă:

$$\begin{cases}n_1\equiv r_1\\ n_2\equiv r_2\end{cases}\Rightarrow\left\{\frac{n_1+n_2}{m}\right\}=\left\{\frac{r_1+r_2}{m}\right\},\left\{\frac{n_1\cdot n_2}{m}\right\}=\left\{\frac{r_1\cdot r_2}{m}\right\}.$$

a) Orice pătrat perfect împărțit la 3 dă restul 0 sau 1, adică $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ avem $n^2\equiv 1\pmod 3$ sau $n^2\equiv 0\pmod 3$.

Dacă $n^2\equiv 0\pmod 3$ cum $\left\{\frac{1}{3}\right\}+\left\{\frac{2}{3}\right\}+\left\{\frac{3}{3}\right\}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+0=1$ atunci S_n se împarte în grupe de câte trei termeni, deci $S_n=\frac{n^2}{3}$.

Dacă $n^2\equiv 1\pmod 3$, atunci cum $\left\{\frac{n^2}{3}\right\}=\frac{1}{3}$ rezultă $S_n=\frac{n^2-1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{n^2}{3}$.

b) Din punctul a) rezultă $\sum_{k=1}^{n^2}\left\{\frac{k^2}{3}\right\}=\frac{n^2}{3}$, atunci:

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{k=1}^{n^2}\left[\frac{k}{3}\right]=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n^2}k^2-\sum_{k=1}^{n^2}\left\{\frac{k^2}{3}\right\}=\frac{n^2(n^2+1)}{6}-\frac{n^2}{3}=\frac{n^2(n^2-1)}{6}.$$

Israel, 2008

118. Vom utiliza identitatea $\left[\frac{k^3}{p}\right]+\left[\frac{(p-k)^3}{p}\right]=p^2-3pk+3k^2-1.$

Într-adevăr $\left[\frac{k^3}{p}\right]+\left[\frac{(p-k)^3}{p}\right]=\frac{k^3}{p}+\frac{(p-k)^3}{p}-\left(\left\{\frac{k^3}{p}\right\}+\left\{\frac{(p-k)^3}{p}\right\}\right)=$
$=p^2-3pk+3k^2-1$, deoarece în ultima paranteză utilizăm relația:
$\{x\}+\{-x\}=1, \forall\, x\notin\mathbb{Z}$. Prin urmare $S=\sum_{k=1}^{p-1}(p^2-3pk+3k^2-1)=$

$$=p^2(p-1)-3p\frac{p(p-1)}{2}+3\frac{p(p-1)(2p-1)}{6}-(p-1)\equiv$$
$$\equiv\frac{(p-2)(p^2-1)}{4}.$$

Germania, 2002

119. Avem pentru orice $k\in\{1,2,\dots,p-1\}, p^2\nmid k^p$ și

$$\frac{k^p}{p^2}+\frac{(p-k)^p}{p^2}=\frac{k^p}{p^2}+\frac{1}{p}\left(M^p+C_p^{p-1}k^{p-1}-C_p^k k^p\right)=$$
$$=\frac{k^p}{p^2}+\frac{1}{p}(M^p+p^2k^{p-1}-k^p)\in\mathbb{Z}$$ de unde rezultă în baza proprietăților cunoscute $\left\{\frac{k^p}{p^2}\right\}+\left\{\frac{(p-k)^p}{p^2}\right\}=1$. Prin urmare, avem:

$$p-1=\sum_{k=1}^{p-1}\left\{\frac{k^p}{p^2}\right\}+\left\{\frac{(p-k)^p}{p^2}\right\}=2\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{k^p}{p^2}\right\}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{k^p}{p^2}\right\}=\frac{p-1}{2}.$$

M.O. Drîmbe

120. Avem pentru fiecare $k=\overline{1,p-1}, a^k=pq_k+r_k, 1\le r_k\le p-1$, unde $r_i\neq r_j, \forall\, i\neq j$. Într-adevăr, dacă $r_i=r_j$ pentru $1\le i<j\le p-1\Rightarrow$
$\Rightarrow a^i=pq_i+r_i,\ a^j=pq_j+r_j\Rightarrow a^i-a^j=p(q_i-q_j)\Rightarrow p\mid a^i(a^{j-i}-1)$, absurd. Prin urmare, $\{r_1,r_2,\dots r_{p-1}\}=\{1,2,3,\dots,p-1\}$. Avem:

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left[\frac{a^k}{p}\right]=\sum_{k=1}^{p-1}q_k=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{a^k}{p}-\frac{r_k}{p}=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}a^k-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}r_k=\frac{1}{p}\cdot\frac{a^p-a}{(a-1)}-\frac{p-1}{2}.$$

M.O. Drîmbe

121*.** Fie $a,b\in\mathbb{R}$. Avem $[a]\le a<[a]+1, -[a]-1<-a\le-[a]$.
Adunând cu $[b]\le b<[b]+1\Rightarrow\ [b]-[a]-1<b-a<[b]-[a]+1\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow [b]-[a]-1 \le [b-a] \le [b]-[a]$. Atunci $[x_k]-[x_{k-1}]-1 \le$
$\le [x_k - x_{k-1}] \le [x_k]-[x_{k-1}] \Rightarrow 0 \le [x_k - x_{k-1}] \le 1, \forall\, k = 2,3,\dots,n.$
Ca urmare, $0 \le S \le n-1$. Arătăm că mulțimea valorilor lui S este $\{0,1,2,\dots,n-1\}$. Valoarea maximă $S_{max} \equiv n-1$ se obține, de exemplu, pentru $x_k = k, k = \overline{1,n}$. Suma $S = p$, unde $0 \le p \le n-2$, se obține, de exemplu pentru:

$$x_k = \begin{cases} k + \dfrac{1}{k+1}, & 1 \le k < n-1 = p \\ k, & n-p \le k \le n \end{cases}.$$

O.N., 2014

122. Soluția 1
Inducție după m. Pentru $m = 1$:
$$\left\{\frac{1}{n}\right\} + \left\{\frac{2}{n}\right\} + \dots + \left\{\frac{n-1}{n}\right\} + \left\{\frac{n}{n}\right\} = \frac{1+2+\dots+n-1}{n} = \frac{n-1}{2}.$$
Presupunând adevărată pentru m rezultă pentru $m+1$:
$$\left\{\frac{m+1}{n}\right\} + \left\{\frac{m+2}{n}\right\} + \dots + \left\{\frac{m+n-1}{n}\right\} + \left\{\frac{m+n}{n}\right\} =$$
$$= \left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{m+1}{n}\right\} + \dots + \left\{\frac{m+n-1}{n}\right\} = \frac{n-1}{2}.$$
Soluția 2
$$\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{m+1}{n}\right\} + \dots + \left\{\frac{m+n-1}{n}\right\} = \frac{m}{n} + \frac{m+1}{n} + \dots + \frac{m+n-1}{n} =$$
$$= \left(\left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{m+1}{n}\right] + \dots + \left[\frac{m+n-1}{n}\right]\right) = n\frac{m}{n} + \frac{n-1}{2} -$$
$$-\left(\left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{m}{n} + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[\frac{m}{n} + \frac{n-1}{n}\right]\right) = m + \frac{n-1}{2} - \left[n\frac{m}{n}\right] = \frac{n-1}{2}.$$
Se aplică identitatea lui Hermite pentru ultima sumă.

123.** Avem identitatea $\left\{\frac{km}{n}\right\} + \left\{\frac{(n-k)m}{n}\right\} = \frac{km}{n} + \frac{(n-k)m}{n} -$
$$-\left[\frac{km}{n}\right] - \left[\frac{(n-k)m}{n}\right] = m - \left[\frac{km}{n}\right] - \left[\frac{(n-k)m}{n}\right] \in \mathbb{N}$$
și cum $\left\{\frac{km}{n}\right\} + \left\{\frac{(n-k)m}{n}\right\} \in [0,2) \Rightarrow \left\{\frac{km}{n}\right\} + \left\{\frac{(n-k)m}{n}\right\} \in \{0,1\}.$
Dacă $\left\{\frac{km}{n}\right\} + \left\{\frac{(n-k)m}{n}\right\} = 0 \Rightarrow \left\{\frac{km}{n}\right\} = \left\{\frac{(n-k)m}{n}\right\} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow n|km, k \in \{1,2,\dots,n-1\}$ și cum $(m,n) = 1 \Rightarrow n|k$, absurd.
Așadar, avem numai $\left\{\frac{km}{n}\right\} + \left\{\frac{(n-k)m}{n}\right\} = 1$, deci $S = \frac{n-1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție alternativă

Cum $(m,n)=1$, rezultă că numerele $m, 2m, \ldots, (n-1)m$ dau resturi diferite la împărțirea la n și $\left\{\frac{km}{n}\right\}=\frac{r_k}{n}$. Însumând rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{km}{n}\right\}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{r_k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-1}r_k=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n-1)\equiv\frac{n-1}{2};$$

b) Din $\left\{\frac{km}{n}\right\}=\frac{r_k}{n}, k=\overline{1,n-1} \Rightarrow p_n=\prod_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{km}{n}\right\}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{r_k}{n}=$

$$=\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}=\frac{n!}{n^n}.$$

Soluție alternativă

Vom utiliza identitatea lui Gauss.

Avem $\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{km}{n}\right\}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{km}{n}-\left[\frac{km}{n}\right]=\frac{m}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}-\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right]=$

$$=\frac{m(n-1)}{2}-\frac{(m-1)(n-1)}{2}=\frac{n-1}{2}.$$

124**. Din $[x]>x-1, \forall x\in\mathbb{R}$, deducem că:

$$S_n>\frac{a_1+a_2}{a_3}+\frac{a_2+a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_n+a_1}{a_2}-n=$$

$$=\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_2}{a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_2}\right)+\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_1}{a_2}\right)-n\geq$$

$$\geq n\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_3}\cdot\frac{a_2}{a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_2}}+n\sqrt[n]{\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdot\ldots\cdot\frac{a_1}{a_2}}-n=$$

$=n+n-n=n\Rightarrow S_n=n$ și cum $S_n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow S_n\geq n+1$.

Pentru a arăta că valoarea minimă a sumei S_n este $n+1$, trebuie să arătăm că există numere pozitive pentru care $S_n=n+1$.

Într-adevăr fie $a_1=n^2-(2n-3)$, iar următoarele $n-1$ numere le considerăm consecutive $a_2=n^2-(n-2), a_3=n^2-(n-3), \ldots,$ $a_{n-1}=n^2-1, a_n=n^2$ atunci avem:

$$\left[\frac{a_1+a_2}{a_3}\right]=\left[\frac{2n^2-3n+5}{n^2-n+3}\right]=\left[1+\frac{n^2-2n+2}{n^2-n+3}\right]=1$$

și pentru penultimul termen avem:

$$\left[\frac{a_{n-1}+a_n}{a_1}\right]=\left[\frac{2n^2-1}{n^2-2n+3}\right]=\left[2+\frac{4n-7}{n^2-n+3}\right]=2$$

iar pentru ultimul putem scrie:

Scanned with OKEN Scanner

$$\left[\frac{a_n + a_1}{a_2}\right] = \left[\frac{n^2 + n^2 - (2n-3)}{n^2 - (n-2)}\right] = \left[\frac{2n^2 - 2n + 3}{n^2 - n + 2}\right] = 1 \Rightarrow S_n = n + 1.$$

O.L. Suceava, 2013

125.** Pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $\gamma(n)$ numărul divizorilor săi naturali.

Avem identitatea $\left[\frac{2011}{1}\right] + \left[\frac{2011}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{2011}{2011}\right] =$

$= \gamma(1) + \gamma(2) + \cdots + \gamma(2011).$

Într-adevăr, dacă $k \in \{1,2,\ldots,2011\} \Rightarrow$ numărul k are $\left[\frac{2011}{k}\right]$ multipli de k în mulțimea $A = \{1,2,\ldots,2011\}$ anume $k, 2k, \ldots, mk$, deci membrul stâng este numărul divizorilor numerelor din mulțimea A, deci este egal cu membrul drept.

Observăm că dacă $n = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$ este descompus în factori primi, atunci $\gamma(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$. Prin urmare $\gamma(n)$ este impar $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sunt pare $\Leftrightarrow n$ este pătrat perfect.

În A sunt 44 de pătrate perfecte: $1^2, 2^2, \ldots 44^2$, deoarece $45^2 = 2025 >$ > 2011.

Prin urmare, $\gamma(1) + \gamma(2) + \cdots + \gamma(2011)$ este număr par, fiind o sumă în care 44 de termeni sunt impari, ceilalți $2011 - 44 = 1967$ fiind pari.

Adrian Zaharnic, G.M. nr. 2/2012

126*.** Observăm că $2^0 \equiv 1 \pmod{25}, 2^{10} \equiv 1024 = -1 \pmod{25}$ și prin urmare $2^{n+10} = 2^{10} \cdot 2^n \equiv -2^n \pmod{25}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să arătăm mai întâi că:

$$\left\{\frac{2^n}{25}\right\} + \left\{\frac{2^{n+10}}{25}\right\} = -1.$$

Într-adevăr, din $2^{n+10} \equiv -2^n \pmod{25}$ rezultă

$\left\{\frac{2^{n+10}}{25}\right\} = \left\{\frac{-2^n}{25}\right\}$ și atunci $\left\{\frac{2^n}{25}\right\} + \left\{\frac{2^{n+10}}{25}\right\} = \left\{\frac{2^n}{25}\right\} + \left\{\frac{-2^n}{25}\right\} = -1.$

$$\left[\frac{2^n}{25}\right] + \left[\frac{2^{n+10}}{25}\right] = \frac{2^n}{25} + \frac{2^{n+10}}{25} - \left(\left\{\frac{2^n}{25}\right\} + \left\{\frac{2^{n+10}}{25}\right\}\right) = \frac{2n + 2^{n+10}}{25} + 1.$$

Împărțim suma în serii de 20 termeni și putem scrie suma de 2000 termeni

$$S = \frac{1}{25}\sum_{k=2}^{2001}\left[\frac{2^k}{2^5}\right] = \frac{1}{25}\sum_{m=0}^{99}\sum_{y=0}^{19}\left(\frac{2^{2+y+20m}}{25}\right) =$$

$$= \frac{1}{25}\sum_{m=0}^{99}\left(\sum_{i=0}^{9}\left[\frac{2^{2+i+20m}}{25}\right] + \sum_{i=0}^{19}\left[\frac{2^{2+i+20m+10}}{25}\right]\right) =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \frac{1}{25}\sum_{m=0}^{99}\left(\sum_{i=0}^{9}\left(\frac{2^{2+i+20m}+2^{2+i+20m+10}}{25}+1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{25}\sum_{m=0}^{99}2^{20m}\sum_{i=0}^{9}\frac{2^2 2^i 1025}{25}+10 = \frac{1}{25}\sum_{m=0}^{99}(2^{20m}\cdot p+10) =$$

$$= \frac{p}{25}\sum_{m=0}^{99}2^{2011}+\frac{1000}{25} = \frac{p(2^{2000}-1)}{25}+40\text{, unde } p\in\mathbb{N} \text{ și}$$

$\frac{2^{2000}-1}{25}\in\mathbb{N}$ și unde $p=\sum_{i=0}^{9}\frac{2^9\cdot 2^i\cdot 1025}{25}\in\mathbb{N}$.

Olimpiadă Austria, 2001

127. În funcție de restul împărțirii lui k la 3 distingem cazurile:

a) $k=3p\Rightarrow\left[\frac{3^k}{13}\right]=\frac{3^k-1}{13}$;

b) $k=3p+1\Rightarrow\left[\frac{3^k}{13}\right]=\frac{3^k-3}{13}$;

c) $k=3p+2\Rightarrow\left[\frac{3^k}{13}\right]=\frac{3^k-9}{13}$.

Rezultă $\sum_{k=1}^{2019}\left[\frac{3^k}{13}\right]=\sum_{p=0}^{672}\left(\left[\frac{3^{3p+1}}{13}\right]+\left[\frac{3^{3p+2}}{13}\right]+\left[\frac{3^{3p+3}}{13}\right]\right)=$

$$= \sum_{p=0}^{672}\frac{(3^{3p+1}-3)+(3^{3p+2}-9)+(3^{3p+3}-1)}{13} =$$

$$= \sum_{k=1}^{2019}\frac{3^k}{13}-673 = \frac{3^{2020}-3}{26}-673.$$

128. Avem $\sum_{k=0}^{1000}\left[\frac{2^k}{3}\right]=\sum_{k=1}^{1000}\left[\frac{2^k}{3}\right]=\sum_{k=1}^{500}\left(\left[\frac{2^{2k-1}}{3}\right]+\left[\frac{2^{2k}}{3}\right]\right)=$

$$= \sum_{k=1}^{500}\left(\frac{2^{2k-1}}{3}+\frac{2^{2k}}{3}-\left\{\frac{2^{2k-1}}{3}\right\}-\left\{\frac{2^{2k}}{3}\right\}\right)=\sum_{k=1}^{500}(2^{2k-1}-1)$$

întrucât $2^{2n-1}\equiv 2\pmod 3$ și $2^{2n}\equiv 1\pmod 3$ și în baza unei proprietăți din Capitolul I, rezultă:

$\left\{\frac{2^{2n-1}}{3}\right\}=\left\{\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}$ și $\left\{\frac{2^{2n}}{3}\right\}=\left\{\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}\Rightarrow\left\{\frac{2^{n-1}}{3}\right\}+\left\{\frac{2^{2n}}{3}\right\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1,$

Scanned with OKEN Scanner

deci $S=\sum_{k=1}^{500}(2^{2k-1}-1)=\frac{2^{1001}-2}{3}-500.$

Rusia, 2000

129. Avem $\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{2^k}{3}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2^{k-1}}{3}\right]+\left[\frac{2^{2k}}{3}\right]\right)=$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{2k-1}}{3}+\frac{2^{2k}}{3}-\left\{\frac{2^{2k-1}}{3}\right\}-\left\{\frac{2^{2k}}{3}\right\}\right)=\sum_{k=1}^{n}(2^{2k-1}-1)$, deoarece

$\begin{cases}2^{2n-1}\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)\\ 2^{2n}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left\{\frac{2^{2p-1}}{3}\right\}=\left\{\frac{2}{3}\right\}\\ \left\{\frac{2^{p}}{3}\right\}=\left\{\frac{1}{3}\right\}\end{cases}\Rightarrow\left\{\frac{2^{2p-1}}{3}\right\}+\left\{\frac{2^{p}}{3}\right\}=\left\{\frac{2}{3}\right\}+\left\{\frac{1}{3}\right\}=1,$

deci $\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2^{2k-1}}{3}\right\}+\left\{\frac{2^{2k}}{3}\right\}=\sum_{k=1}^{n}1=n$ și, prin urmare,

$\sum_{k=1}^{n}(2^{2k-1}-1)=\frac{2^{2n+1}-2}{3}-n.$

Belarus, 2003

130. Considerăm n par și n impar.

Fie $n=2m$, atunci $S_n=S_{2m}=\sum_{k=0}^{2m}\left[\frac{2^k}{3}\right]=\sum_{k=1}^{2m}\left[\frac{2^k}{3}\right]=\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{2^{2k-1}}{3}\right]+\left[\frac{2^k}{3}\right]=$

$=\sum_{k=1}^{m}\frac{2^{2k-1}}{3}+\frac{2^k}{3}-\left(\left\{\frac{2^{2k-1}}{3}\right\}-\left\{\frac{2^{2k}}{3}\right\}\right)=\sum_{k=1}^{m}(2^{2k-1}-1)=$

$=\frac{2^{2n+1}-2}{3}-m=\frac{2^{n+1}-2}{3}-\frac{n}{2}$, întrucât $\left\{\frac{2^{2k}}{3}\right\}+\left\{\frac{2^{2k-1}}{3}\right\}=1.$

Într-adevăr $2^{2k}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$ și $2^{2k-1}\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$ și în baza unei proprietăți din Capitolul I, avem: $\left\{\frac{2^{2k}}{3}\right\}=\left\{\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$ și $\left\{\frac{2^{2k-1}}{3}\right\}=\left\{\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}.$

Fie $n=2m+1$, atunci $S_{2m+1}=S_m+\left[\frac{2^{2m+1}}{3}\right]=\frac{2^{2m+1}-2}{3}-m+\frac{2}{3}=$

$=\frac{2^{2m+1}}{3}-m=\frac{2^{n+1}}{3}-\frac{n-1}{2}$, întrucât $2^{2m+1}\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)\Rightarrow\left\{\frac{2^{m+1}}{3}\right\}=$

$=\left\{\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}.$

A.C. Golovanov (Rusia)

Scanned with OKEN Scanner

131. Avem $\left[k\frac{q}{p}\right]+\left[(p-k)\frac{q}{p}\right]=\left[k\frac{q}{p}\right]+q+\left[-k\frac{q}{p}\right]=q-1$ (deoarece $[a]+[-a]=-1, \forall a \notin \mathbb{Z}$) și cum în suma dată avem $\frac{p-1}{2}$ perechi de forma de mai sus, rezultă că suma dată este $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Evident rezultă și egalitatea $\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+$ $+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ (Identitatea lui Gauss).

132. Evident rezultă că $(n,p)=1$ și deci se aplică identitatea cunoscută și prin urmare: $S=\frac{(n-1)(p-1)}{2}$.

133*. Soluția 1

Avem $\frac{ka}{b}+\frac{(b-k)a}{b}=a\in\mathbb{N}\Rightarrow\left\{\frac{ka}{b}\right\}+\left\{\frac{(b-k)a}{b}\right\}\in\{0,1\}$ (1).

Distingem cazurile:

a) b impar, atunci $N(a,b)$ are un număr par de termeni, deci $N(a,b)\in\mathbb{Z}$ (în baza lui (1));

b) b par, atunci $N(a,b)$ are un număr impar de termeni și prin grupare a câte doi termeni având sume număr întreg rămâne termenul din mijloc $\left\{\frac{\left(\frac{b}{2}\right)a}{b}\right\}=\left\{\frac{a}{2}\right\}$, deci $\left\{\frac{a}{2}\right\}\in\mathbb{Z}\Rightarrow a$ par și b impar $\Rightarrow N(a,b)\in\mathbb{Z}$.

Sóluția 2

$N(a,b)=\sum_{k=1}^{b-1}\left\{\frac{ka}{b}\right\}=\sum_{k=1}^{b-1}\frac{ka}{b}-\left[\frac{ka}{b}\right]$ și deci $N(a,b)$ este întreg dacă

$\sum_{k=1}^{b-1}\frac{ka}{b}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b(b-1)}{2}=\frac{a(b-1)}{2}\in\mathbb{N}^*$ dacă a este par sau b impar.

Concursul „Laurențiu Panaitopol", 2013

134*. Numerele $a+b, 2a+b, \ldots, na+b$ dau resturi diferite la împărțirea la „n". Și cum sunt „n", vor fi resturile $0,1,2,\ldots,n-1$, $\left\{\frac{ia+b}{n}\right\}=\frac{r_i}{n}$.

Deci $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{n}=\frac{0+1+2+\cdots+n-1}{n}=\frac{n-1}{2}$.

Viitorii olimpici, G.M. nr. 9/2013

Scanned with OKEN Scanner

135*. $ak+b \equiv mq_m + r, ak+b \equiv r \pmod m, r \in \{0,1,2,\dots,m-1\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\frac{ak+b}{m}\right\} = \left\{\frac{r}{m}\right\} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+m} \left\{\frac{ak+b}{m}\right\} = \sum_{r=0}^{m-1} \left\{\frac{r}{m}\right\} = \left\{\frac{1}{m}\right\} + \left\{\frac{2}{m}\right\} +$$

$$+ \cdots + \left\{\frac{m-1}{m}\right\} = \frac{m-1}{2}.$$

Concurs Serbia

136*. Se știe că (vezi exercițiul precedent):

$S_n = \frac{(m-1)(n-1)}{2} + m$ și $S_m = \frac{(m-1)(n-1)}{2} + n.$

Așadar $S_n - S_m = m - n > 0 \Rightarrow S_n > S_m$.

Moscova, 1972

137. a) Fie $1 \le k \le p-1$ și cum $p \times ak \Rightarrow ak = pq_k + r_k$ cu $r_k \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\frac{ak}{p}\right\} = \frac{r_k}{p}.$$

Dacă $j \neq k \Rightarrow r_j \neq r_k$, atunci $\sum_{k=1}^{p-1} \left\{\frac{ak}{p}\right\} = \frac{1}{p}(1+2+\cdots+p-1) = \frac{p-1}{2}$;

b) $\sum_{k=1}^{p-1} \left\{\frac{qk}{p}\right\} = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{qk}{p} - \sum_{k=1}^{p-1} \left\{\frac{qk}{p}\right\} = \frac{q(1+2+\cdots+p-1)}{p} - \frac{p-1}{2} =$

$= \frac{(p-1)(q-1)}{2}$ și, la fel $\sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{pl}{q}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$, de unde rezultă concluzia. (Rezultă ca un caz particular al altui exercițiu – 142.)

Mihai Chiș, R.M.I., 2009

138. Avem $S = \left[\frac{-q}{p}\right] + \left[\frac{-9q}{p}\right] + \cdots + \left[-\frac{(p-2)^2 q}{p}\right] + \left[\frac{4q}{p}\right] + \left[\frac{16q}{p}\right] + \cdots +$

$+ \left[-\frac{(p-1)^2 q}{p}\right] = S_1 + S_2$ unde S_1 și S_2 conțin fiecare câte $\frac{p-1}{2}$ termeni.

Vom grupa termenii egali depărtați de extremi și se va ține seama de relația $[-x] + [x] = -1, \forall\, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Avem $\left[\frac{-q}{p}\right] + \left[\frac{(p^2-2p+1)q}{p}\right] = \left[\frac{-q}{p}\right] + \left[\frac{q}{p}\right] + p - 2q = -1 + pq - 2q =$

$= -1 + q(p-2)$ deci $\left[\frac{-q}{p}\right] + \left[\frac{(p^2-2p+1)q}{p}\right] = -1 + q(p-2)$ și

$\left[\frac{-9q}{p}\right] + \left[\frac{(p-3)^2 q}{p}\right] = -1 + q(p-6)$

Scanned with OKEN Scanner

.....

$$\left[-\frac{(p-2)^2q}{p}\right]+\left[\frac{4q}{p}\right]=-1+q(p-2(p-2)).$$

Avem $S=(-1)\dfrac{p-1}{2}+pq-q\dfrac{(2-2p-4)}{2}\cdot\dfrac{p-1}{2}=\dfrac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Dorin Andrica, Concursul „Al. Muller", 2015

139. Dacă $(n,m)=1$, atunci $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right]=\frac{nm-n-m+1}{2}$.

Dacă $(n,m)=d\Rightarrow n=dv, m=du$, unde $(u,v)=1$ atunci suma

$$S=\sum_{k=0}^{d\cdot u-1}\left[\frac{k\cdot d\cdot v}{d\cdot u}\right].$$

Fie $k=i\cdot u+j$, unde $0\le i\le d-1$ și $0\le j\le u-1$ și atunci

$$S=\sum_{k=0}^{d\cdot u-1}\left[-\frac{k\cdot d\cdot v}{d\cdot u}\right]=\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{j=0}^{u-1}\left[\frac{(i\cdot u+j)v}{u}\right]=\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{j=0}^{u-1}\left(i\cdot v+\left[\frac{j\cdot v}{u}\right]\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{d-1}\left(i\cdot v\cdot u+\sum_{j=0}^{u-1}\left[\frac{j\cdot v}{u}\right]\right)=\sum_{i=0}^{d-1}\left(i\cdot v\cdot u+\frac{v\cdot u-v-u+1}{2}\right)=$$

$$=v\cdot u\cdot\frac{d(d-1)}{2}+d\cdot\frac{v\cdot u-v-u+1}{2}=\frac{d^2\cdot v\cdot u-d\cdot v-d\cdot u+d}{2}=$$

$$=\frac{m\cdot n-n-m+(n,m)}{2}.$$

Taiwan, 1998

140. Vom utiliza rezultatul precedent

$$S=\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\frac{k\cdot n}{m}\right\}=\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{k\cdot n}{m}-\left[\frac{k\cdot n}{m}\right]\right)=\frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}k-\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{k\cdot n}{m}\right]=\ldots=$$

$$=\frac{n}{m}\cdot\frac{m(m-1)}{2}-\frac{n\cdot m-n-m+(n,m)}{2}=\frac{m-(n,m)}{2},$$

unde $d=(n,m), m,n\in\mathbb{N}^*$. (În legătură cu celelalte probleme anterioare.)

Japonia, 1995

141*.** Avem $n=mq+r, 0\le r\le m-1$, $q\in\mathbb{N}$ și observăm că

$$\left[\frac{n+i}{m}\right]=\left[q+\frac{r+i}{m}\right]=\begin{cases}q, & \left[\dfrac{r+i}{m}\right]=0\\ q+1, & \left[\dfrac{r+i}{m}\right]=1\end{cases}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar $\left[\frac{r+i}{m}\right]=0 \Leftrightarrow i=\{0,1,2,,\ldots,m-r-1\}$ și $\left[\frac{r+i}{m}\right]=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow i=\{m-r,m-r+1,\ldots,m-1\}$ și deci $\left[\frac{n+i}{m}\right] \in \{q,q+1\}$.

Dacă notăm cu S suma din membrul stâng rezultă:

$S=(m-r)q^2+r(q+1)^2=mq^2+2rq+r$ (1). Calculăm:

$$\left[\frac{n^2+m-1}{m}\right]=\left[\frac{(mq+r)^2+m-1}{m}\right]=mq^2+2qr+1+\left[\frac{r^2-1}{m}\right] \text{ (2).}$$

Prin urmare din (1) și (2) rezultă că trebuie arătat că:

$$r=1+\left[\frac{r^2-1}{m}\right]+\left[\frac{r(m-r)}{m}\right] \Leftrightarrow r=1+\left[\frac{r^2-1}{m}\right]+r+\left[\frac{-r^2}{m}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0=1+\left[\frac{r^2-1}{m}\right]+\left[\frac{-r^2}{m}\right] \text{ (3). Distingem cazurile: a) } m/r^2 \text{ și b) } m \times r^2.$$

În cazul a), avem $r^2=mh, h \in \mathbb{N}^*$ și (3) devine

$1+\left[h-\frac{1}{m}\right]+[-h]=1+h-1-h=0$. În cazul b) $m \times r^2$ rezultă că:

$\left[\frac{r^2-1}{m}\right]=\left[\frac{r^2}{m}\right]$ (s-au utilizat P_{15} și P_{25} din Cap. I)

devine $1+\left[\frac{r^2-1}{m}\right]+\left[-\frac{r^2}{m}\right]=1+\left[\frac{r^2}{m}\right]-\left[\frac{r^2}{m}\right]-1=0$

($[-x]+[x]=-1, \forall\, x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$). Prin urmare prima egalitate este adevărată. Pentru a doua egalitate avem:

$$m\left\{\frac{n}{m}\right\}\left\{\frac{-n}{m}\right\}=m\left\{\frac{mq+r}{m}\right\}\left\{\frac{-mq-r}{m}\right\}=m\left\{\frac{r}{m}\right\}\left\{\frac{-r}{m}\right\}=m\frac{r}{m}\left\{1-\frac{r}{m}\right\}=$$

$$=r\left\{\frac{m-r}{m}\right\}=r\left(\frac{m-r}{m}\right), \text{ deci } \left[m\left\{\frac{n}{m}\right\}\left\{\frac{-n}{m}\right\}\right]=\left[r\left(\frac{m-r}{m}\right)\right].$$

Dragoș Popescu, M.O. Drîmbe

142. Fie $M=\left\{km-hm \middle| k \in 1,2,3,\ldots,\frac{n-1}{2}\right\}$ și $h \in \left\{1,2,3,\ldots,\frac{m-1}{2}\right\}$.

Elementele lui M sunt distincte, nenule și $|M|=\frac{(m-1)(n-1)}{4}$.

Numărul elementelor pozitive ($km>hn$) se obține fixând k și găsind $\left\{h \in 1,2,\ldots,\left[\frac{km}{n}\right]\right\}$, adică $\left[\frac{km}{n}\right]$ elemente pentru k fixat. În total:

$\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{km}{n}\right]$ elemente pozitive. Analog se obțin $\sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}}\left[\frac{kn}{m}\right]$ elemente negative.

Landau

Scanned with OKEN Scanner

143*. a) $\frac{k^n}{p}+\frac{(p-k)^n}{p}\in\mathbb{N}$ deoarece $(p-k)^n\equiv(-k)^n\pmod p\Rightarrow$

$\Rightarrow k^n+(p-k)^n=0\pmod p$ (n impar) $\Rightarrow \frac{k^n}{p}+\frac{(p-k)^n}{p}\in\mathbb{N}$, dar cum $\frac{k^n}{p},\frac{(p-k)^n}{p}$ sunt numere întregi pentru $k\in\{1,2,3,\dots,p-1\}$ rezultă că $\left\{\frac{k^n}{p}\right\}+\left\{\frac{(p-k)^n}{p}\right\}=1$. Dacă în suma dată formăm $\frac{p-1}{2}$ perechi de forma $\left\{\frac{k^n}{p}\right\}+\left\{\frac{(p-k)^n}{p}\right\}$, obținem $\sum_{k=1}^{p-1}\left\{\frac{k^n}{p}\right\}=\frac{p-1}{2}$.

b) Analog, $\left\{\frac{k^n}{m}\right\}+\left\{\frac{(p-k)^n}{m}\right\}\in\mathbb{N}$. Atunci rezultă două posibilități:

1) $\frac{k^n}{m},\frac{(m-k)^n}{m}$ sunt numere naturale, și atunci:

$\left\{\frac{k^n}{m}\right\}+\left\{\frac{(p-k)^n}{m}\right\}=0$ sau

2) $\frac{k^n}{m},\frac{(m-k)^n}{m}$ nu sunt numere naturale, caz în care:

$\left\{\frac{k^n}{m}\right\}+\left\{\frac{(p-k)^n}{m}\right\}=1$.

Pentru egalitatea din enunț este necesar și suficient ca

$\forall\, k\in\{1,2,\dots,n-1\},\frac{k^n}{m}\notin\mathbb{N}$, fapt care este posibil dacă și numai dacă $m=p_1,p_2,\dots,p_e$ (m liber de pătrate) cu $p_1<p_2<\dots<p_e$ – numere prime.

Dacă $m=p_1,p_2,\dots,p_e$ și prin absurd $\frac{k^n}{m}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{k^n}{m}=p_i|k$, fals,

$(k<m)\Rightarrow\frac{k^n}{m}=\frac{p^{n(\alpha-1)}N_1^n}{p^{\alpha-1}N_1}=p^{(n-1)(\alpha-1)}N_1^{A-1}\in\mathbb{N}$.

Concursul „Alexandru Papiu-Ilarian", 2014

144*. Se verifică $S_3=3,S_4=10,S_5=23$ care sunt pătrate perfecte. Vom arăta că $9S_n$ nu este pătrat, de unde rezultă că nici S_n nu este pătrat perfect, $\forall\, n\geq 3$.

Avem $9S_n=9\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^3}{9}\right]=9\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^3}{9}-\left\{\frac{k^3}{9}\right\}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}9\left\{\frac{k^3}{9}\right\}$

Scanned with OKEN Scanner

$\left(\text{din relația } n \equiv r \pmod m \Leftrightarrow r = m\left\{\frac{n}{m}\right\}\right) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \sum_{k=1}^{n} k^3 \pmod 9.$

Avem termeni pentru care $(3p-2)^3 \equiv 1 \pmod 9$ și $(3p-1)^3 \equiv 8 \pmod 9$ și $(3p^3) \equiv 0 \pmod 9$ numărul termenilor pentru care $(3p-2)^3 \equiv$ $\equiv 1 \pmod 9$ este egal cu $\left[\frac{n+2}{3}\right]$ și al termenilor pentru care $(3p-1)^3 \equiv$ $\equiv 8 \pmod 9$ este $\frac{n+1}{3}$.

Atunci suma $9S_n = \left[\frac{n(n+1)}{3}\right]^2 - \left[\frac{n+2}{3}\right] \cdot 1 - 8\left[\frac{n+1}{3}\right]$.

Vom arăta că $\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)^2 < 9S_n < \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \Rightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)^2 <$

$< \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left[\frac{n+2}{3}\right] - 8\left[\frac{n+1}{3}\right] < \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

care este adevărată, deoarece:

$\left[\frac{n+2}{3}\right] + 8\left[\frac{n+1}{3}\right] < \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)^2 = n^2 + n - 1.$

Pentru ultima inegalitate avem:

$\left[\frac{n+2}{3}\right] + 8\left[\frac{n+1}{3}\right] \leq \frac{n+2}{3} + \frac{8n+8}{3} = 3n + \frac{10}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{n+2}{3}\right] + 8\left[\frac{n+1}{3}\right] \leq \left[3n + \frac{10}{3}\right] = 3n + 3 < n^2 + n - 1, \forall\, n \geq 4.$

Așadar, $9S_n$ fiind cuprins între două pătrate consecutive nu poate fi pătrat perfect și prin urmare nici S_n nu poate fi pătrat perfect.

H.M.M.T./2002

145***. Utilizând identitatea lui Hermite, avem:

$\sum_{i=0}^{k-1}\left[x + \frac{i}{k}\right] = [kx]$. Avem $\sum_{k=1}^{n}[kx] = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\left[x + \frac{i}{k}\right]\right) =$

$= n[x] + \sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{k-1}\left[x + \frac{i}{k}\right] = n[x] + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{k}\left[x + \frac{i}{k+1}\right]\right).$

S.W. Williams (S.U.A. 1966), Mathematical Montey, 1996

146. Pentru mulțimea A avem:

a) $\left[\frac{a}{b}\right] \leq \frac{a+x}{b} < \left[\frac{a}{b}\right] + 1 \Rightarrow b\left[\frac{a}{b}\right] - a \leq x \leq b\left[\frac{a}{b}\right] + b - a - 1$

deci card $A = b$. Pentru mulțimea B, avem:

Scanned with OKEN Scanner

$\left[\frac{a}{b}\right]+1 \leq \frac{a+x}{b}<\left[\frac{a}{b}\right]+2 \Rightarrow b\left[\frac{a}{b}\right]-a+b \leq x<b\left[\frac{a}{b}\right]+2b-a \Rightarrow$

$\Rightarrow b\left[\frac{a}{b}\right]+b-a \leq x \leq b\left[\frac{a}{b}\right]+2b-a-1 \Rightarrow \operatorname{card} B=b.$

Observăm că dacă $x \in B \Rightarrow x-b \in A$ şi reciproc. Din $\left[\frac{a}{b}\right] \leq \frac{a}{b}<\left[\frac{a}{b}\right]+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b\left[\frac{a}{b}\right] \leq a<b\left[\frac{a}{b}\right]+b \Rightarrow b\left[\frac{a}{b}\right] \leq a \leq b\left[\frac{a}{b}\right]+b-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b\left[\frac{a}{b}\right]-a \leq 0<b\left[\frac{a}{b}\right]+b-a-1 \Rightarrow 0 \in A$ şi analog $b-1 \in B$.

Prin urmare rezultă că primul element al mulţimii B este succesorul ultimului element al mulţimii A şi deci $A \cap B=Q$ şi $\operatorname{card} A=\operatorname{card} B=b$.

b) $\sum_{k=0}^{b-1}\left[\frac{a+k}{b}\right]=\sum_{\substack{k \in A \cup B \\ 0 \leq k \leq b-1}}\left[\frac{a+k}{b}\right]=\sum_{\substack{k \in A \\ a>k \geq 0}}\left[\frac{a+k}{b}\right]+\sum_{\substack{k \in B \\ k \leq b-1}}\left[\frac{a+k}{b}\right]=$

$=\left(b\left[\frac{a}{b}\right]+b-a\right)\left[\frac{a}{b}\right]+\left(a-b\left[\frac{a}{b}\right]\right)\left(\left[\frac{a}{b}\right]+1\right)=a.$ Aşadar, $\sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{a+k}{b}\right]=a.$

147.*** Fie $p_1, p_2, \ldots, p_k$ numerele prime $2 \leq p_i \leq n, i=\overline{1,k}$. Pentru fiecare $1 \leq i \leq k$ considerăm mulţimea: $A_i=\{x \mid 1 \leq x \leq n$ şi x se divide cu $p_i\}$, avem $A_i \cap A_j=\{x \mid 1 \leq x \leq n$ şi x se divide cu $p_i p_j\}$, pentru $i \neq j$,

$A_i \cap A_j \cap A_k=\{x \mid 1 \leq x \leq n$ şi x se divide cu $p_i p_j p_k\}$, pentru $i<j<k$.

Deoarece $\bigcup_{i=1}^{k} A_i=\{2,3, \ldots n\}$, iar $\operatorname{card} A_i=\left[\frac{n}{p_i}\right], \operatorname{card}\left(A_i \cap A_j\right)=\left[\frac{n}{p_i p_j}\right] \ldots$

Aplicând principiul includerii şi excluderii, are loc egalitatea din problemă.

Marcel Ţena, R.M.T. nr. 2/1985

148***. Pentru $k \in\{1,2, \ldots, n-1\}$ rezultă din teorema împărţirii cu rest că există q_k, r_k astfel încât $m \cdot k=q_k \cdot n+r_k \quad 0 \leq r_k \leq n-1$. Nu putem avea $r_k=0$, pentru că atunci $n / mk \Rightarrow n / k,(m, n)=1$. Contradicţie, deci $1 \leq r_k \leq n-1$. Toate resturile $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ sunt distincte. Într-adevăr, dacă $r_k=r_j$ pentru $1 \leq j<k \leq n-1$ atunci $n / m(k-j) \Rightarrow n /(k-j)$, contradicţie.

Prin urmare $\{r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}\}=\{1,2, \ldots, n-1\}$ (*) şi $\left[\frac{mk}{n}\right]=q_k$.

Cum m par şi n impar, atunci din $mk=nq_k+r_k$ deducem că q_k şi r_k au aceeaşi paritate şi deci $(-1)^{q_k}=(-1)^{r_k}$. Din cele de mai sus rezultă:

$\frac{1}{2n}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{q_k}\left\{\frac{r_k}{n}\right\}$, deoarece $\left\{\frac{mk}{n}\right\}=\left\{\frac{r_k}{n}\right\}$ şi $(-1)^{q_k}=(-1)^{r_k}$

Scanned with OKEN Scanner

și din (*) rezultă că suma devine:

$$\frac{1}{2n}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{q_k}\left\{\frac{r_k}{n}\right\}=\frac{1}{2n}+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\left\{\frac{j}{n}\right\}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}+\frac{2}{n}-\frac{3}{n}+\frac{4}{n}-\frac{5}{n}-$$

$$-\cdots-\frac{2q-1}{n}+\frac{2q}{n}, \text{ unde } n=2q+1. \text{ Rezultă că suma cerută este:}$$

$$\frac{1}{2n}+q\frac{1}{n}=\frac{2q+1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}. \text{ Suma este independentă de } m \text{ și } n.$$

Bogdan Enescu, Baraj, 2006

149***. Procedăm prin inducție. Notăm cu S_n suma din stânga:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(2(-1)^{k-1}\cdot\left[\frac{n}{k}\right]+(-1)^{\left[\frac{n}{k}\right]}\right).$$

Pentru $n=1\Rightarrow S_1=2\left[\frac{1}{1}\right]+(-1)^{\left[\frac{1}{1}\right]}=1.$

Presupunând că $S_n=n\Rightarrow S_{n+1}=n+1$. Pentru această implicație este suficient să arătăm că $S_n-S_{n-1}=1, \forall\, n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ și vom ține seama de proprietățile din Cap. I. Avem: $S_n-S_{n-1}=$

$$=\sum_{k=1}^{n}2(-1)^{k-1}\left[\frac{n}{k}\right]+(-1)^{\left[\frac{n}{k}\right]}-\left(\sum_{k=1}^{n-1}2(-1)^{k-1}\left[\frac{n-1}{k}\right]+(-1)^{\left[\frac{n-1}{k}\right]}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}2(-1)^{k-1}\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)+(-1)^{\left[\frac{n}{k}\right]}-(-1)^{\left[\frac{n-1}{k}\right]}+(-1)^{\left[\frac{n-1}{n}\right]},$$

dar pentru $k\vdots n\Rightarrow\left[\frac{k}{n}\right]-\left[\frac{k-1}{n}\right]=1$ în celelalte cazuri diferența este nulă,

deci $S_n-S_{n-1}=\sum_{k\vdots n}2(-1)^{k-1}+(-1)^{\left[\frac{n}{k}\right]}-(-1)^{\left[\frac{n-1}{k}\right]}+1$ (*),

dar $(-1)^{\left[\frac{n-1}{k}\right]}=(-1)^{\left[\frac{n}{k}\right]+1}=(-1)^{\left[\frac{n+k-1}{k}\right]}=(-1)^{\left[\frac{n}{k}\right]}$ și (*) devine

$$S_n-S_{n-1}=\sum_{k\vdots n}\left(2(-1)^{k-1}+2(-1)^{\left[\frac{n}{k}\right]}\right)+1=2\sum_{k\vdots n}\left((-1)^{\left[\frac{n}{k}\right]}-(-1)^k\right)+1.$$

Când k parcurge divizorii lui n, $\frac{n}{k}$ parcurge aceiași divizori în sens invers,

deci $\sum_{k\vdots n}(-1)^{\left[\frac{n}{k}\right]}-(-1)^k=0\Rightarrow S_n-S_{n-1}=1\Rightarrow S_n=S_{n-1}+1.$

M.O. Drîmbe

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 15 | Inegalităţi

§ 1.

1. Fie $k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k < 30.$

Să se arate că: $k + \left[\frac{k}{6}\right] + \left[\frac{k}{10}\right] + \left[\frac{k}{15}\right] \geq \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{3}\right] + \left[\frac{k}{5}\right].$

2. Să se arate că: $[nx] - n[x] \leq n - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ şi $\forall n \in \mathbb{N}.$

3. Dacă $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $[ax + by] = [bx + ay]$, arătaţi că

$$\min(|a - b|, |x - y|) < 1.$$

4. Să se arate că: $[n\pi] + [ne] + [nc] \geq 5n - 2, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$

5. Să se arate că: $\sum_{k=1}^{n} [k\pi] + [k\pi^2] + [k\pi^3] \geq \frac{n(43n + 39)}{2}.$

6. Arătaţi că: $\left[\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\right] + 1 \leq \left[x^2 + \frac{1}{x^2}\right], \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$

7. Să se arate că, pentru orice $x \geq 1$, avem: $2 \leq \frac{x}{[x]} + \frac{[x]}{x} < \frac{5}{2}.$

8. Să se arate că, pentru orice $x, y \geq 0$, avem:

$$[x] + [y] = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq [x^2] + [y^2] \leq 3 \\ 1 \leq [x^2 + y^2] \leq 4 \end{cases}.$$

9. Să se arate că, pentru orice $x, y \geq 0$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$[x] + [y] = n \Rightarrow \left[\frac{n^2 + 1}{2}\right] \leq [x^2] + [y^2] \leq n^2 + 2n.$$

10. Se consideră numerele reale x, y, z care satisfac relaţiile: $|x| \leq \{y\} \leq [z]$.

a) Demonstraţi că $x + z \geq 0$;

b) Dacă $x + z = 0$, determinaţi x, y, z.

11. Să se arate că:

$$\sqrt{[x]\{y\}} + \sqrt{[y]\{z\}} + \sqrt{[z]\{x\}} \leq \frac{x + y + z}{2}, \forall x, y, z \in [0, \infty).$$

12. Să se arate că:

a) $\sqrt{x[y]} + \sqrt{y[x]} < [x] + [y] + 1, \forall x, y \geq 0;$

b) $\sqrt{[x][y]} + \sqrt{\{x\}\{y\}} \leq \sqrt{xy}, \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+.$

13. Să se arate că, pentru orice $x, y \geq 0$, avem:

$$[-x][y + 1] \leq [-xy] < [(-x + 1)][y].$$

Scanned with OKEN Scanner

14. Demonstrați că orice $a, b, c \in \left[1+\sqrt{2}, \infty\right)$ avem:

$$[abc] - 1 > [a] + [b] + [c].$$

15. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\left[\frac{n}{n+1} - x^2\right] < \left[x^2 + \frac{n+2}{n+1}\right], \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ și } \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

16. Fie $a, b, c, a', b', c' \in [0, \infty)$. Să se demonstreze că:

$$[aa' + bb' + cc'] \geq [a][a'] + [b][b'] + [c][c'].$$

17. Să se arate că, pentru orice $m, k \in \mathbb{Z}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$, dacă:

$$m + \frac{k}{n} < E < m + \frac{k+1}{n} \Rightarrow [E] = m + \left[\frac{k}{n}\right].$$

18. Să se arate că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$0 \leq nx - \frac{[x] + [3x] + [5x] + \cdots + [(2n-1)x]}{n} < 1.$$

19. Să se arate că, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\frac{[nx]}{n} \leq \frac{[mx]}{m}, \forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n | m.$$

20. Fie $0 < a < b < 1, \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ și $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $0 < \{n\alpha\} < b - a$. Arătați că există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $\{m\alpha\} \in (a, b)$.

§ 2.

21. Să se arate că: $[\alpha + \beta] \leq [2\alpha] + [2\beta] \leq [\alpha + \beta] + 1, \forall\, \alpha, \beta \in [0,1)$.

22. Fie $x, y \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Demonstrați că:

$$2 + [xy] \leq [x+2][y+2] \leq [(x+2)(y+2)].$$

23. Să se demonstreze inegalitatea:

$$[a-1][a^2+a] + [a][a^2-1] + [a+1][a^2-a] \geq 3[a][a-1][a+1],$$

$\forall\, a \in [1, \infty)$.

24. Să se demonstreze că:

$$\sqrt{a^2 + [b]^2 + \{c\}^2} + \sqrt{b^2 + [c]^2 + \{a\}^2} + \sqrt{c^2 + [a]^2 + \{b\}^2} \geq \geq \frac{2}{\sqrt{3}}(a + b + c),$$

$\forall\, a, b, c \geq 0$.

25.** Să se arate că, pentru orice $x \in [0,1)$, avem: $[6x] - [3x] - 2[2x] \geq 0$.

26. Să se arate că orice $a, b, x > 0, a \geq 2b > 0$, avem:

$$a\{x\} + 2b\left\{\frac{1}{x}\right\} < a + b.$$

Scanned with OKEN Scanner

27*. Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}, x > \frac{1}{2}, 2x \notin \mathbb{N}$ și $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, are loc inegalitatea: $\frac{a}{b[2x]} + \frac{b}{a\{2x\}} \geq \frac{2}{x}$.

28**. Să se arate că:

$$\frac{x^2}{\sqrt{[y]\{z\}}} + \frac{y^2}{\sqrt{[z]\{x\}}} + \frac{z^2}{\sqrt{[x]\{y\}}} \geq 2(x+y+z), \forall x, y, z \in (1, \infty) - \mathbb{Z}.$$

29. Demonstrați că oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}, x \geq 1, x \notin \mathbb{N}$, are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} \geq \frac{7}{2x}.$$

30. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ atunci:

$$\frac{1-n}{n} \leq \{nx\} - \{x\} \leq \frac{n-1}{n}, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

31. Pentru $n, m \in \mathbb{Z}$ este îndeplinită inegalitatea $m < \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$. Demonstrați că inegalitatea este echivalentă cu inegalitatea $m + \frac{1}{2} < \sqrt{n}$.

32*. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]^2 < n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] < \left(\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] + 1\right)^2, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

33. Demonstrați că pentru orice m, n numere naturale are loc inegalitatea:

$$[m\sqrt{7}][n\sqrt{2}] < [nm\sqrt{14}].$$

34**. Să se arate că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem:

$$[2x + 2y] + [y] \geq [x + y] + [x] + [2y].$$

35***. Să se arate că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem:

$$[x + y] + [x] + [y] \leq [2x] + [2y] \leq [x + y] + [x] + [y] + 1.$$

36***. Să se arate că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, avem:

$(n-1)[x+y] + [x] + [y] \leq [nx] + [ny] \leq (n-1)[x+y+1] + [x] + [y]$

sau sub forma:

$$(n-1)[x+y] \leq [nx] - [x] + [ny] - [y] \leq (n-1)[x+y+1].$$

§ 3.

37**. Fie $a, b \in \mathbb{R}_+$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\left[\sqrt{a - [\sqrt{a}]^2}\right]\left[\sqrt{b - [\sqrt{b}]^2}\right] \leq [\sqrt{ab}] - [\sqrt{a}][\sqrt{b}].$$

38***. Să se arate că, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem: $1 \leq [\alpha^2 n] - [\alpha[\alpha n]] \leq [\alpha]$,

unde $\alpha = \frac{1 + \sqrt{4p+1}}{2}, p \in \mathbb{N}, \sqrt{4p+1} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Scanned with OKEN Scanner

39. Să se demonstreze inegalitatea: $\{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

40. Să se arate că: $\left\{\sqrt{4n^2+n}\right\} < \frac{1}{4}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

41*.** Să se demonstreze că inegalitatea $\{2^n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2}$ are loc pentru o infinitate de valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$.

42*.** Să se arate că printre orice două numere naturale consecutive nenule, există un număr natural d, astfel încât pentru orice număr natural nenul n est adevărată inegalitatea: $n\sqrt{d}\{n\sqrt{d}\} > \frac{5}{2}$.

43.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a + b = 1$.
Să se arate că $|[x + a] + [x + b] - [2x]| \leq 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

44. a) Să se demonstreze inegalitatea pentru $x \in (1, \infty)$:

$$\left(\frac{x+\{x\}}{[x]} - \frac{[x]}{x+\{x\}}\right) + \left(\frac{x+[x]}{\{x\}} - \frac{\{x\}}{x+[x]}\right) > 5;$$

b) Să se arate că:

$$\frac{[x]^2}{7[x]^2 + (2\{x\} + [x])^2} + \frac{\{x\}^2}{7\{x\}^2 + (2[x] + \{x\})^2} \leq \frac{1}{8}, \text{ oricare ar fi } x > 0.$$

45*.** Să se arate că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem: $[6x] + [x] \geq [3x] + 2[x]$.

46.** Să se găsească $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\{\sqrt{n}\} + \{\sqrt[3]{n}\} \geq \frac{2}{n}$.

47*.** Să se demonstreze că: $\frac{x+\{x\}}{[x]^2 + 2\{x\}^2} + \frac{x+[x]}{\{x\}^2 + 2[x]^2} < \frac{4}{x}, \forall\, x > 0$.

48. Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Să se arate că:

a) $m[x] + [(n-m)x] \geq (m+1)[x] + [(n-m-1)x]$, $\forall\, m = \overline{0, n-1}$ și $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) $[nx] \geq [x] + [(n-1)x] \geq 2[x] + [(n-2)x] \geq \cdots \geq (n-1)[x] + [x] = n[x], \forall\, x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$;

c) Să se afle $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele întregi $n[x], [(n-2)x] + [2x], [(n-3)x] + [3x], \ldots, [x] + [(n-1)x], [nx]$ să fie numere consecutive.

49*.** Să se demonstreze că inegalitatea:

$$\frac{[x]}{2x+\{x\}} + \frac{[x]\{x\}}{3x^2} + \frac{\{x\}}{2x+[x]} \leq \frac{1}{2}, \forall\, x > 0.$$

50.** Fie $x_k \in [0, \infty), k = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ cu $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$ și

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{[x_1] + \{x_2\}} + \sqrt{[x_2] + \{x_3\}} + \cdots + \sqrt{[x_{n-1}] + \{x_n\}} + \sqrt{[x_n] + \{x_1\}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine maximul expresiei E și valorile pentru care se obține maximul.

51**. Să se arate că:

$$[x](x-y)+[y](y-z)+[z](z-x)+([x]-\{z\})(\{x\}-\{z\})+$$
$$+([y]-\{x\})(\{y\}-\{x\})+([z]-\{y\})(\{z\}-\{y\})\geq 0, \forall\, x,y,z\in\mathbb{R}.$$

52***. Să se arate că, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$, avem:

$$-3\leq [x]+[y]+[z]-2\left(\left[\frac{x+y}{2}\right]+\left[\frac{y+z}{2}\right]+\left[\frac{z+x}{2}\right]+3\left[\frac{x+y+z}{3}\right]\right)\leq 3.$$

53**. Să se arate că, pentru orice $a,b,c\in\mathbb{R}$, avem:

$$a(b-[c])+b(c-[a])+c(a-[b])\leq [a](c-[b])+[b](a-[c])+$$
$$+[c](b-[a])\Leftrightarrow \text{atunci } a,b\in\mathbb{Z} \text{ sau } b,c\in\mathbb{Z} \text{ sau } c,a\in\mathbb{Z}.$$

54***. Să se arate că pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$, avem:

$$[5x]+[5y]\geq [3x+y]+[3y+x]+[x]+[y].$$

55. Demonstrați că inegalitatea:

$$[nx]+[ny]+[kx+ky]\leq [(n+k)x]+\,+[(n+k)y]$$

are loc pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$, dacă și numai dacă $n=k, n,k\in\mathbb{N}^*$.

56***. Să se demonstreze că:

$$[5x]+[5y]\geq [3x+y]+[3y+x], \forall\, x,y\in\mathbb{R}_+.$$

57***. Să se arate că, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$ și orice $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, avem:

$$[nx]+[ny]+[nz]\geq (n-2)[x+y+z]+2([x]+[y]+[z]).$$

58***. a) Să se arate că, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$, avem:

$$[4x]+[4y]+[4z]\geq [x+y+z]+[x+y]+[y+z]+[z+x]+$$
$$+[x]+[y]+[z];$$

b) Reciproc, dacă:

$$[x]+[y]+[z]+[x+y]+[y+z]+[z+x]+[x+y+z]\leq$$
$$\leq [ax]+[bx]+[cz]$$

atunci $a=b=c=4$.

59***. Să se arate că, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$, avem:

a) $[4x]+[4y]\geq [2x+y]+[2y+x]+[x]+[y]$;

b) $[5x]+[5y]\geq [2x+y]+[2y+x]+[2x]+[2y]$;

c) $[6x]+[6y]\geq [2x+y]+[2y+x]+[3x]+[3y]$.

60***. Fie p,q,r numere naturale prime, diferite două câte două și $k\in\mathbb{N}$, $0\leq k<pqr$. Să se arate: $k+\left[\frac{k}{pq}\right]+\left[\frac{k}{pr}\right]+\left[\frac{k}{rq}\right]\geq\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{q}\right]+\left[\frac{k}{r}\right]$.

61***. Să se arate că, pentru orice p,q,r numere prime oricare două distincte cu $k\in\mathbb{N}$, avem:

$$n+\left[\frac{n}{pq}\right]+\left[\frac{n}{pr}\right]+\left[\frac{n}{rq}\right]\geq\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{q}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]+k\left[\frac{n}{pqr}\right],$$

$\forall\, n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow 0\leq k\leq (p-1)(q-1)(n-1)+1$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 4.

62*. Să se arate că:

$$\left[\sqrt{1}\right]^2+\left[\sqrt{2}\right]^2+\cdots+\left[\sqrt{n^2-1}\right]^2\geq\frac{n^2(n-1)(4n+1)^2}{36(n+1)},\forall\, n\in\mathbb{N}^*,n\geq 2.$$

63**. Fie $x\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. Arătați că:

$$\left[\sqrt{x}\right]+\left[\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right]+\cdots+\left[\sqrt{x+\frac{n-1}{n}}\right]\leq\sqrt{n[nx]}.$$

64*. Să se arate că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$ și oricare a fi $a>0$ avem inegalitatea:

a) $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}[ka]}<\frac{(n+1)a}{2}$;

b) $\sum_{k=1}^{n}[1+ka]\geq n+\frac{n(n+1)}{2}[a]$.

65**. Să se arate că, pentru oricare $n\in\mathbb{N},n\geq 3$ și orice $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$, avem: $[4(a_1+a_2+\cdots+a_n)]\geq[2a_1+a_2]+[2a_2+a_3]+[2a_3+a_4]+$
$+\cdots+[2a_{n-1}+a_n]+[2a_n+a_1]+[a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n]\leq$
$\leq 4[a_1+a_2+\cdots+a_n]$.

66**. Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ și orice $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ avem:

a) $[na_1]+[na_2]+\cdots+[na_n]\geq[a_1+a_2+\cdots+a_n]+$
$+(n-1)([a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n])$;

b) $n([a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n])\leq[a_1+a_2+\cdots+a_n]+$
$+(n-1)([a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n])\leq n[a_1+a_2+\cdots+a_n]$.

67**. Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și orice $x\in\mathbb{R}$, avem:

$$2\sum_{k=1}^{n}[kx]\geq(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{[kx]}{k}.$$

68**. Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, avem:

$$n^2<\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\left[\frac{n}{k}\right]\right]<2n^2.$$

69**. Determinați valorile lui $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care:

$$\left[\sqrt{9n^2+1}\right]+\left[\sqrt{9n^2+2}\right]+\cdots+\left[\sqrt{9n^2+24n+15}\right]\leq 144n+43.$$

Scanned with OKEN Scanner

70. Să se arate că oricare $x_k \in \mathbb{R}$, $x = \overline{1,n}$ și oricare $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea:

$$[x_1]^2 + [x_2]^2 + \cdots + [x_n]^2 + 3n > 2[x_1 + x_2 + \cdots + x_n] \geq 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

71.** Fie numerele naturale nenule cu $k \in \mathbb{N}^*$ $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ astfel încât $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1}$. Demonstrați că:

$$\left[\frac{a_2 - a_1}{k}\right] + \left[\frac{a_3 - a_2}{k}\right] + \cdots + \left[\frac{a_{n+1} - a_n}{k}\right] + (n-1) \geq \left[\frac{a_{n+1} - a_1}{k}\right].$$

72*. Să se arate că oricare $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ și oricare $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, avem:

$$\left|\left[\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right] - \frac{[a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n]}{n}\right| \leq \frac{n-1}{n}.$$

73*.** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n^2} [\sqrt{k}]}{n} \leq \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n}\right] \leq \frac{\left[\sum_{k=1}^{n^2} \sqrt{k}\right]}{n}.$$

74*.** Să se arate că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha > 1$, avem:

$$[[\alpha]x + x] \leq \sum_{k=0}^{[\alpha]} \left[x + \frac{k}{\alpha}\right] \leq [[\alpha]x] + [x] + 1 = [[\alpha]x + [x] + 1].$$

75*.** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\sum_{k=1}^{n^2} \left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right] - \sum_{k=1}^{n^2} \left[\frac{n}{k}\right] \geq n^2 - n.$$

76*. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1,1]$ și $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ atunci:

$$\left[\sum_{k=1}^{n} k x_k\right] \leq \left[\frac{n^2}{2}\right], \forall\, n \geq 2.$$

77.** Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ și $\max\{|a_i - a_j|; 1 \leq i < j \leq n\} \leq 1$. Demonstrați că:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right].$$ (În ce caz avem egalitate?)

78*. Dacă $a_i \geq 1, i = 1,2, \ldots, n$ atunci:

$$\left[\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right] + n - 1 \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

79.** Dacă p este prim și $p^k \leq n < p^{k+1}$, atunci:

$$\left[\frac{n-1}{p-1}\right] - k \leq \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^n}\right] \leq \left[\frac{n-1}{p-1}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

80**. Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $x \in \mathbb{R}_+^*$, avem:

$$[nx] > \sum_{j=1}^{n} \frac{[jx]}{j} \ln \frac{n+1}{j}.$$

81***. Dacă $x \in \mathbb{R}_+^*$ și $n \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că:

$$[nx] \geq \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \cdots + \frac{[nx]}{n}.$$

82***. Să se arate că, pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$ și orice $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, avem:

$$\left[\sqrt[n]{x}\right]^n \leq [x] \leq \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \left[\sqrt[n]{x}\right]^{n-k}.$$

83**. Fie $x \in \mathbb{R}$. Să se arate că: $\left|\sum_{k=1}^{n} \{kx\} - n\{x\}\right| < n - \ln(n+1)$.

84***. Fie $k_1, k_2, \ldots, k_n$ numere naturale ($n \geq 2$). Să se demonstreze inegalitatea: $k_1!\, k_2! \ldots, k_n! \geq \left(\left[\frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{n}\right]!\right)^n = \left(\left[\frac{k}{n}\right]!\right)^n$, unde $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$.

Scanned with OKEN Scanner

soluții 15 | Inegalități

§ 1.

1. Avem $\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k}{3}\right]+\left[\frac{k}{5}\right] \leq \frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{5}=k+\frac{k}{30}<k+1$, deci

$\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k}{3}\right]+\left[\frac{k}{5}\right] \leq k+\left[\frac{k}{30}\right] \leq k+\left[\frac{k}{10}\right]-1+\left[\frac{k}{6}\right]-1+\left[\frac{k}{15}\right]-1<$

$<k+\left[\frac{k}{10}\right]+\left[\frac{k}{6}\right]+\left[\frac{k}{15}\right] \Rightarrow 3 \leq \frac{9k}{30} \Rightarrow k \geq 10$

și pentru $k=\overline{0,9}$ se verifică direct.

2. $[nx]-n[x]=\left[nx-n[x]\right]=\left[n[x]+n\{x\}-n[x]\right]=[n\{x\}]$.

Dar cum $n\{x\}<n \Rightarrow [n\{x\}] \leq n-1$, deci $[nx]-n[x] \leq n-1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

3. Avem $[ax+by]=[bx+ay] \Rightarrow |ax+by-ay-bx|<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |(a-b)(x-y)|<1 \Rightarrow |a-b||x-y|<1 \Rightarrow \min(|a-b|,|x-y|)<1$.

Traian Duță, O.L. Brașov, 2006

4. Utilizăm inegalitatea $[x_1]+[x_2]+[x_3] \geq [x_1+x_2+x_3]-2$.

Dacă înlocuim $x_1=n\pi, x_2=ne, x_3=nc$ rezultă:

$[n\pi]+[ne]+[nc] \geq [n(\pi+e+c)]-2=[n(6{,}42\ldots)]-2 \geq 5n-2$.

Traian Ianculescu, 10825 V16 (2)/2008

5. Se aplică inegalitatea $[x_1]+[x_2]+[x_3] \geq [x_1+x_2+x_3]-2$ unde se înlocuiește $x_1=k\pi, x_2=k\pi^2, x_3=k\pi^3 \Rightarrow [k\pi]+[k\pi^2]+[k\pi^3] \geq$

$\geq [k(\pi+\pi^2+\pi^3)]-2=[k(43{,}91)]-2 \geq 43k-2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}([k\pi]+[k\pi^2]+[k\pi^3]) \geq \sum_{k=1}^{n} 43k-2=\frac{n(43n+39)}{2}.$$

Traian Ianculescu, 11834 V16 (2)/2005

6. Evident $\left[\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+1}\right]+1=2+\left[\frac{x}{x^2+1}\right]$ și dacă $x<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1}<0 \Rightarrow \left[\frac{x}{x^2+1}\right]=-1$.

$2+\left[\frac{x}{x^2+1}\right]=1 \leq \left[x^2+\frac{1}{x^2}\right]$, deoarece $x^2+\frac{1}{x^2} \geq 2 \Rightarrow \left[x^2+\frac{1}{x^2}\right] \geq 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x>0 \Rightarrow 0<\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$, deci $2+\left[\frac{x}{x^2+1}\right]=2 \leq \left[x^2+\frac{1}{x^2}\right]$, $\forall n \in \mathbb{R}$.

Ion Neață, G.M. nr. 5/2014

7. Soluția 1

Dacă notăm $\frac{x}{[x]}=y \geq 1 \Rightarrow 2 \leq y+\frac{1}{y}<\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2y \leq y^2+1<\frac{5}{2}y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-1)^2 \geq 0$ și $y^2-\frac{5}{2}y+1<0 \Leftrightarrow (y-2)\left(y-\frac{1}{2}\right)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}<y<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\frac{x}{[x]}<2 \Leftrightarrow \frac{[x]}{2} \leq x<2[x]$,

care este adevărată deoarece, $\frac{[x]}{2} \leq \frac{x}{2}<x<[x]+1 \leq 2[x]$.

Soluția 2

Se știe că $y+\frac{1}{2} \geq 2, \forall y>0$, cu egalitate pentru $y=1$, deci inegalitatea din stânga este evidentă. Notând $x=k+t, k \in \mathbb{N}^*, t \in [0,1)$ și a doua inegalitate devine:

$\frac{k+t}{k}+\frac{k}{k+t}<\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2(k+t)^2+2k^2<5k(k+t) \Leftrightarrow k^2+kt-2t^2 \geq$

$\geq 0 \Rightarrow (k+2t)(k-t) \geq 0$, care este evidentă $(k \geq 1, t \in [0,1))$.

Liliana Niculescu

8. Putem presupune $x<y$, atunci din $[x]+[y]=1$ rezultă:

$0 \leq x<1 \leq y<2 \Rightarrow x^2<1, 1 \leq y^2<4 \Rightarrow [x^2]=0$ și $1 \leq [y^2] \leq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \leq [x^2]+[y^2] \leq 3$, deci $x^2<1$, $y^2<4 \Rightarrow 1<x^2+y^2<5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \leq [x^2+y^2] \leq 4$.

Virgil Shneider

9. Notăm $[x]=p, [y]=p, q \in \mathbb{N}$ cu $p+q=n \Rightarrow$

$\Rightarrow p \leq n<p+1 \Rightarrow p^2 \leq x^2<(p+1)^2$,

$q \leq y<q+1$, $q^2 \leq y^2<(q+1)^2$,

$p^2 \leq [x^2]<(p+1)^2 \Rightarrow p^2 \leq [x^2] \leq p^2+2p$,

$q^2 \leq [y^2]<(q+1)^2 \Rightarrow q^2 \leq [y^2] \leq q^2+2q \Rightarrow$

$\Rightarrow p^2+q^2 \leq [y^2] \leq [x^2]+[y^2] \leq p^2+q^2+2(p+q)$ (*).

Vom arăta că $\left[\frac{n^2+1}{2}\right] \leq p^2+q^2$ și $p^2+q^2+2(p+q) \leq n^2+2n$.

Într-adevăr, avem $(p+q)^2+1<2p^2+2q^2+2 \Leftrightarrow 0<(p-q)^2+1$ și

$p^2+q^2+2(p+q)+1 \leq n^2+2n \Leftrightarrow (p+q)^2-2pq+2(p+q) \leq$

$\leq n^2+2n \Leftrightarrow n^2-2pq+2n \leq n^2+2n$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare (*) devine $\left[\frac{n^2+1}{2}\right] \leq [x^2]+[y^2] \leq n^2+2n.$

10. a) Dacă $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{y\}=0 \Rightarrow |x| \leq 0 \leq [z] \Rightarrow x=0 \Rightarrow z \geq [z] \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x+z \geq 0$ cu egalitate dacă $x=z=0$.
Dacă $y \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \{y\} \in (0,1) \Rightarrow |x|<1 \Rightarrow x \in (-1,1)$ și $|z| \geq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x+z>-1+1=0$.

b) Rezultă că singurul caz de egalitate $(x+z=0)$ este dacă $x=z=0, y \in \mathbb{Z}$.

Concursul „Traian Lalescu", 2014

11. Aplicând inegalitatea mediilor avem:

$$\sqrt{[x]\{y\}}+\sqrt{[y]\{z\}}+\sqrt{[z]\{x\}} \leq \frac{[x]+\{x\}+[y]+\{y\}+[z]+\{z\}}{2}=$$
$$=\frac{x+y+z}{2}.$$

Dorin Marghidanu

12. a) $\sqrt{x[y]}+\sqrt{y[x]} \leq \frac{x+[y]}{2}+\frac{y+[x]}{2}=\frac{2[x]+2[y]+\{x\}+\{y\}}{2} \leq$
$\leq \frac{2[x]+2[y]+2}{2}=[x]+[y]+1;$

b) Utilizăm inegalitatea C.B.S. și obținem:
$\left(\sqrt{[x][y]}+\sqrt{\{x\}\{y\}}\right)^2 \leq ([x]+\{x\})([y]+\{y\})=xy$, cu egalitate dacă și numai dacă $x, y \in \mathbb{Z}$.

Valer Pop, R.M.T., 2009

13. Utilizând inegalitatea $[u] \leq u<[u]+1=[u+1], \forall u \in \mathbb{R}$, avem:
$[-x] \leq -x<[-x+1] \Rightarrow -[-x] \geq x>-[-x+1]$ (1) (termeni pozitivi).
$[y+1]>y \geq [y]$ (2) de unde rezultă
$-[-x][y+1]>xy>-[-x+1][y] \Rightarrow [-x][y+1]<-xy<$
$<[-x+1][y] \Rightarrow [-x][y+1] \leq [-xy]<[-x+1][y]$.

14. Demonstrăm mai întâi că dacă $x, y \in [1+\sqrt{2}, \infty) \Rightarrow x+y+1 \leq xy \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-1)(y-1) \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}=2$. Avem: $[abc]-1 \geq [a]+[b]+[c] \Rightarrow$
$\Rightarrow abc>a+b+c-\{a\}-\{b\}-\{c\}+\{abc\}+1,$
dar $a+b+c-\{a\}-\{b\}-\{c\}+\{abc\}+1<a+b+c+1+1=$
$=a+b+1+c+1 \leq ab+c+1<abc$
(s-a aplicat rezultatul de mai sus).

Ovidiu Stăniloiu, R.M.T., 2010

15. Avem $\left[\frac{n}{n+1}-x^2\right]=\left[1-\frac{1}{n+1}-x^2\right]=1+\left[-x^2-\frac{1}{n+1}\right]$ și
$\left[x^2-\frac{n+2}{n+1}\right]=\left[1+x^2+\frac{1}{n+1}\right]=1+\left[x^2+\frac{1}{n+1}\right].$

Scanned with OKEN Scanner

$\left[\frac{n}{n+1}-x^2\right]=1+\left[-x^2-\frac{1}{n+1}\right]\leq 0<1\leq 1+\left[x^2+\frac{1}{n+1}\right]=$
$=\left[x^2+\frac{n+2}{n+1}\right]$.

16. Evident se utilizează proprietățile cunoscute și se obține:
$[aa'+bb'+cc']\geq [aa']+[bb']+[cc']\geq [a][a']+[b][b']+[c][c']$,
unde s-au utilizat inegalitățile: $[xy]\geq [x][y], \forall\, x,y\in[0,\infty)$,
$[x+y]\geq [x]+[y], \forall\, x,y\in[0,\infty)$.

17. Avem $\frac{k}{n}<E-m<\frac{k+1}{n}\Rightarrow [E-m]=\left[\frac{k}{n}\right]\Rightarrow [E]-m=\left[\frac{k}{n}\right]\Rightarrow$
$\Rightarrow [E]=\left[\frac{k}{n}\right]+m$ $\left(\text{se aplică proprietatea } \frac{k}{n}\leq x<\frac{k+1}{n}\Rightarrow [x]=\left[\frac{k}{n}\right]\right)$.

18. Avem $nx-\frac{[x]+[3x]+[5x]+\cdots+[(2n-1)x]}{n}\geq$
$\geq nx-\frac{x+3x+5x+\cdots+(2n-1)x}{n}=nx-\frac{n^2x}{n}=0$
și $nx-\frac{[x]+[3x]+[5x]+\cdots+[(2n-1)x]}{n}<nx-$
$-\frac{(x-1)+3x-1+5x-1+\cdots+(2n-1)x-1}{n}=nx-\frac{n^2x-n}{n}=1.$

M.O. Drîmbe

19. Fie $n|m\Rightarrow m=kn, k\in\mathbb{N}^*$.
Într-adevăr, $\frac{[mx]}{m}=\frac{[knx]}{nk}\geq\frac{[nx]}{n}\Leftrightarrow [knx]\geq k[nx]$
(s-a utilizat inegalitatea $[nx]\geq n[x], \forall\, n\in\mathbb{N}^*, \forall\, x\in\mathbb{R}$).
Reciproc, să presupunem că $\frac{[nx]}{n}\leq\frac{[mx]}{m}, \forall\, x\in\mathbb{R}$ și $n\nmid m$, adică
$m=nq+r, 1\leq r\leq n-1$. Atunci pentru
$x=\frac{1}{n}$, avem $\frac{[nx]}{n}=\frac{1}{n}$ și $\frac{[mx]}{n}=\frac{q}{nq+r}<\frac{1}{n}$, fals. Prin urmare, $n|m$.

20. Din $0<\{n\alpha\}<b-a\Rightarrow\frac{b}{\{n\alpha\}}-\frac{a}{\{n\alpha\}}>1\Rightarrow\exists k\in\mathbb{N}$ astfel încât
$k\in\left(\frac{a}{\{n\alpha\}},\frac{b}{\{n\alpha\}}\right)$. Dar cum $\{kn\alpha\}=kn\alpha-[kn\alpha]=$
$=kn\alpha-[k([n\alpha]+\{n\alpha\})]=kn\alpha-k[n\alpha]-[k\{n\alpha\}]=k\{n\alpha\}-[k\{n\alpha\}]$.
Din $k\in\left(\frac{a}{\{n\alpha\}},\frac{b}{\{n\alpha\}}\right)\Rightarrow 0\leq k\{n\alpha\}<b<1\Rightarrow [k\{n\alpha\}]=0$ obținem că
$\{kn\alpha\}=k\{n\alpha\}\in(a,b)$, prin urmare există $m=kn\in\mathbb{N}$ astfel încât
$\{m\alpha\}\in(a,b)$.

Vasile Zidaru, G.M. nr. 2/1989

Scanned with OKEN Scanner

§ 2.

21. Utilizăm inegalitatea:
$[x]+[y]=[x+y]\leq[2x]+[2y]\leq[x+y]+[x]+[y]+1, \forall\, x,y\in\mathbb{R}$
unde se face substituția $x\to\alpha, y\to\beta\Rightarrow[\alpha+\beta]\leq[2\alpha]+[2\beta]\leq$
$\leq[\alpha+\beta]+1.$

22. Avem $[(x+2)][y+2]\leq(x+2)(y+2)\Rightarrow[x+2][y+2]\leq$
$\leq[(x+2)(y+2)]$, iar $[x+2][y+2]>(x+1)(y+1)=$
$=xy+y+1>2+xy>2+[xy]$.

Manuela Prajea, R.M.T., 2005

23. Se utilizează inegalitatea $[xy]=[x][y]$ oricare ar fi $x,y\geq 0$.
Avem $[a-1][a(a+1)]+[a]\cdot[(a-1)(a+1)]+[a+1][a(a-1)]\geq$
$\geq[a][a-1][a+1]+[a][a-1][a+1]+[a+1][a][a-1]=$
$=3[a][a-1][a+1]$.

Nicușor Mimculete, R.G. nr. 25

24. Avem $\dfrac{x+y+z}{3}\leq\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geq\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$.
Se aplică de trei ori această inegalitate ținându-se seama că $x=[x]+\{x\}$.

Dorin Marchidan, Concursul „Danubius", 2009

25.** Vom considera toate situațiile:
$x\in\left[0,\frac{1}{6}\right];\left[\frac{1}{6},\frac{2}{6}\right);\left[\frac{2}{6},\frac{3}{6}\right);\left[\frac{3}{6},\frac{4}{6}\right);\left[\frac{4}{6},\frac{5}{6}\right);\left[\frac{5}{6},1\right)$,
din care rezultă inegalitatea cerută.

26. Vom considera situațiile: $x=1, x>1$ și $0<x<1$. Pentru $x=1$, inegalitatea este evidentă.
Fie $x>1$ și $x=k+t, k\in\mathbb{N}^*, y\in[0,1)$ și inegalitatea devine:

$$at+2b\left\{\frac{1}{k+t}\right\}=at+\frac{2b}{k+t}<at+\frac{2b}{1+t}<a+b\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(1-t)+b\left(1-\frac{2}{1+t}\right)>0\Leftrightarrow a(1-t)-b\left(1-\frac{1-t}{t+1}\right)>0.$$

$$a>\frac{b}{t+1}\Leftrightarrow t+1>\frac{b}{a}\Rightarrow t+1>1>\frac{1}{2}>\frac{b}{a}.$$

27*. Inegalitatea este echivalentă cu $\dfrac{2xa}{b[2x]}+\dfrac{2xb}{a[2x]}\geq 4$.

Într-adevăr, avem $\dfrac{a\cdot 2x}{b[2x]}+\dfrac{b\cdot 2x}{a\{2x\}}=\dfrac{a}{b}\left(1+\dfrac{\{2x\}}{[2x]}\right)+\dfrac{b}{a}\left(1+\dfrac{[2x]}{\{2x\}}\right)=$

$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\left(\frac{a\cdot 2x}{b[2x]}+\frac{b}{a}\cdot\frac{[2x]}{\{2x\}}\right)>2+2=4.$$

Ioana Masca, O.L. Brașov, 2011

Scanned with OKEN Scanner

28.** Aplicând inegalitatea mediilor rezultă:

$$\sqrt{[x]\cdot\{y\}} < \frac{[x]+\{y\}}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{[x]\cdot\{y\}}} > \frac{2x^2}{[x]+\{y\}}$$

și din inegalitatea lui Titu Andreescu rezultă:

$$\frac{x^2}{\sqrt{[y]\cdot\{z\}}}+\frac{y^2}{\sqrt{[z]\cdot\{x\}}}+\frac{z^2}{\sqrt{[x]\cdot\{y\}}} > \frac{2x^2}{[y]+\{z\}}+\frac{2y^2}{[z]+\{x\}}+\frac{2z^2}{[x]+\{y\}} \geq$$

$$\geq 2\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z} = 2(x+y+z).$$

Cristian Grecu, R.M.T., 2009

29. Fie $x = k+t, k\in\mathbb{Z}, t\in[0,1)$. Dacă $x\in(1,\infty)\cap(\mathbb{Q}-\mathbb{N})$

$$\frac{x}{[x]}+\frac{x}{\{x\}} \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{k+t}{k}+\frac{k+t}{t} = 2+\frac{k}{t}+\frac{t}{k} > 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}} > \frac{4}{x} = \frac{8}{2x} > \frac{7}{2x}.$$

G.M. nr. 4/2005

30. Cum inegalitatea se păstrează dacă se înlocuiește x cu $k+1$, vom demonstra relația pentru $x\in[0,1)$. Prin urmare există $k\in\{1,2,\dots,n\}$, pentru care $x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right) \Rightarrow \{nx\} = nx-(k-1)$ și $\{x\}=x$. Prin urmare, inegalitatea devine: $\frac{nk-2n+1}{n(n-1)} \leq x < \frac{nk-1}{n(n-1)}$ care este adevărată deoarece $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right) \subset \left[\frac{nk-2n+1}{n(n-1)},\frac{nk-1}{n(n-1)}\right)$. În partea stângă, egalitatea se realizează pentru $x\in\left\{\left\{n-\frac{1}{n}\right\}\middle| n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Gh. Iurea, R.M., 2010

31. Din $m < \left[\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right] \Rightarrow m+1 \leq \left[\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right] \leq \sqrt{n}+\frac{1}{2} \Rightarrow m+\frac{1}{2} < \sqrt{n}$,

întrucât $\{\sqrt{n}\} \neq \frac{1}{2}$, fie că $\sqrt{n}$ este întreg sau este irațional.

32*. Notând $\sqrt{n} = [\sqrt{n}]+\{\sqrt{n}\} = k+t, k\in\mathbb{N}, t\in[0,1)$, inegalitatea se mai scrie: $\left[k+t+\frac{1}{2}\right]^2 < (k+t)^2+\left[k+t+\frac{1}{2}\right] < \left(\left[k+t+\frac{1}{2}\right]+1\right)^2$.

Notând $\left[t+\frac{1}{2}\right] = \alpha\in\mathbb{N}$, ultima inegalitate devine:

$(k+\alpha)^2 < (k+t)^2+k+\alpha < (k+\alpha+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2+2k\alpha+\alpha^2 < k^2+2kt+t^2+k+\alpha < (k+\alpha)^2+2(k+\alpha)+1$ (*).

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm cazurile:

a) $0 \le t < \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 0$ și ultima inegalitate devine:

$k^2 < k^2 + k(2t+1) + t^2 < k^2 + 2k + 1$ care este adevărată;

b) $\frac{1}{2} < t < 1 \Rightarrow \alpha = 1$ și inegalitatea $(*)$ devine:

$(k+1)^2 < k^2 + k(2t+1) + t^2 + 1 < (k+2)^2$.

33. Vom utiliza următoarele rezultate:

a) $[x][y] \le [xy], \forall\, x, y \ge 0$ (vezi capitolul proprietăți);

b) Dacă $x - y \ge 1 \Rightarrow [x] > [y]$ (vezi capitolul proprietăți);

c) $\left[\sqrt{2n^2-1}\right] = \left[n\sqrt{2}\right]$ și $\left[\sqrt{7n^2-1}\right] = \left[n\sqrt{7}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Prin urmare, vom arăta că $nm\sqrt{14} - \sqrt{2n^2-1}\cdot\sqrt{7m^2-1} \ge 1$.

Într-adevăr inegalitatea se mai scrie:

$$nm\sqrt{14} - 1 \ge \sqrt{2n^2-1}\cdot\sqrt{7m^2-1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 14m^2n^2 - 2mn\sqrt{14} + 1 \ge (2n^2-1)(7m^2-1) \Leftrightarrow \left(m\sqrt{7} - n\sqrt{2}\right)^2 \ge 0$.

Utilizând b), a) și c) rezultă

$\left[nm\sqrt{14}\right] > \left[\sqrt{2n^2-1}\cdot\sqrt{7m^2-1}\right] \ge \left[\sqrt{2n^2-1}\right]\left[\sqrt{7m^2-1}\right] =$

$= \left[n\sqrt{2}\right]\left[m\sqrt{7}\right]$.

A. Golovanov, Sankt-Petersburg, 2014

34**. Dacă notăm $f(x,y) = [2x+2y] + [y] - [x+y] + [x] - [2y]$ atunci substituțiile $x \to x+p, y \to y+q$, unde $p, q \in \mathbb{Z}$ rezultă $f(x+p, y+q) = f(x,y)$ și prin urmare $f(x,y) \ge 0, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $f(x,y) \ge 0, \forall\, x, y \in [0,1)$.

Pentru $x, y \in [0,1)$, avem $f(x,y) = [2x+2y] - [x+y] - [2y]$ întrucât $[x] = [y] = 0$. Considerăm situațiile:

a) $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x,y) = [2x+2y] - [x+y] \ge 0$, deoarece $2x + 2y \ge x + y$;

b) $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow f(x,y) = [2x+2y] - [x+y] - 1$ de unde rezultă că dacă $x + y \in [0,1) \Rightarrow 2x + 2y \ge 2y \ge 1 \Rightarrow f(x,y) = [2x+2y] - 1$, iar dacă $x + y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow [x+y] = 1$ și $[2x+2y] = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y) = 2 - 1 - 1 \ge 0$.

35***. Inegalitatea nu se schimbă în urma substituțiilor $x \to x+p, y \to y+q$, unde $p, q \in \mathbb{Z}$ și prin urmare considerăm inegalitatea pentru $x, y \in [0,1)$, care capătă aspectul $[x+y] \le [2x] + [2y] < [x+y] + 1$.

Fie $2x = m + \alpha$, $2y = n + \beta$, unde $m, n \in \{0,1\}$ și $\alpha, \beta \in [0,1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $[x+y]=\left[\frac{m+n+\alpha+\beta}{2}\right]=\left[\frac{[m+n+\alpha+\beta]}{2}\right]=$

$=\left[\frac{m+n+[\alpha+\beta]}{2}\right]\leq\left[\frac{m+n+1}{2}\right]\leq m+n=[2x]+[2y].$

Ultima inegalitate se verifică direct pentru cazurile $m,n\in\{0,1\}$.

Fie $[x+y]+1=\left[\frac{m+n+\alpha+\beta}{2}\right]+1\geq\left[\frac{m+n}{2}\right]+1\geq m+n=$

$=[2x]+[2y].$

36***. Soluția 1

Inegalitățile nu se schimbă în urma substituțiilor $x\to x+p, y\to y+q$, unde $p,q\in\mathbb{Z}$ și prin urmare este suficient să demonstrăm inegalitățile pentru $x,y\in[0,1)$ și inegalitățile devin:

$(n-1)[x+y]\leq[nx]+[ny]\leq(n-1)[x+y+1].$

Notăm $nx=p+\alpha, ny=q+\beta$ unde $\alpha,\beta\in[0,1)$ și $p,q\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

$(n-1)[x+y]=(n-1)\left[\frac{p+q+\alpha+\beta}{n}\right]=(n-1)\left[\frac{[p+q+\alpha+\beta]}{n}\right]=$

$=(n-1)\left[\frac{p+q+[\alpha+\beta]}{n}\right]\leq(n-1)\left[\frac{p+q+1}{n}\right].$

Considerăm cazurile $n\mid p+q+1\Leftrightarrow p+q+1=n$ și inegalitatea devine egalitate.

Dacă $n\nmid p+q+1$, atunci $(n-1)\left[\frac{p+q+1}{n}\right]=(n-1)\left[\frac{p+q}{n}\right]\leq$

$\leq n\left[\frac{p+q}{n}\right]\leq p+q$. Pentru a doua inegalitate rezultă:

$(n-1)[x+y+1]=(n-1)[x+y]+n-1=(n-1)\left[\frac{p+q+\alpha+\beta}{n}\right]+$

$+n-1\geq(n-1)\left[\frac{p+q}{n}\right]+n-1\geq p+q$, unde $p,q\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

Pentru $p+q<n$ atunci inegalitatea devine $n-1\geq p+q$ și pentru $p+q\geq n$ rezultă $(n-1)2\geq p+q$, adevărat.

R.T. Hansen, M.O. Drîmbe

Soluția 2

Fie $x,y\in\mathbb{R}$ și $n\geq 2$.

Notăm $[x]=M, [nx]-n[x]=m$, respectiv $[y]=L, [ny]-n[y]=l\Rightarrow$

$\Rightarrow 0\leq m\leq n-1, 0\leq l\leq n-1.$

Avem $[nx]=nx+m\Rightarrow[nx]=nM+m\leq nx<nM+m+1$

și $M+\frac{m}{n}\leq x<M+\frac{m+1}{n}$.

Scanned with OKEN Scanner

Analog, $L+\frac{l}{n}\le y<L+\frac{l+1}{n}$.

Adunând aceste relaţii rezultă:

$M+L+\frac{m+l}{n}\le x+y<M+L+\frac{m+l+2}{n}\Rightarrow$

$\Rightarrow M+L\le x+y<M+L+2\Rightarrow$

$\Rightarrow [x+y]=\begin{cases} M+L, & m+l<n \\ M+L+1, & n\le m+l\le 2n-2 \end{cases}$.

Avem două cazuri:

a) $m+l<n\Rightarrow (n-1)[x+y]=(n-1)(M+L)\Rightarrow$

$\Rightarrow [nx]-[x]+[ny]-[y]=m+(n-1)M+l+(n-1)L=$

$=(n-1)(M+L)+m+l, (n-1)[x+y+1]=(n-1)(M+L)+n-1$

şi inegalităţile din enunţ sunt verificate.

b) $n\le m+l\le 2n-2\Rightarrow (n-1)[x+y]=(n-1)(M+L)+n-1\Rightarrow$

$\Rightarrow [nx]-[x]+[ny]+[y]=(n-1)(M+L)+m+l$,

$(n-1)[x+y+1]=(n-1)(M+L)+2n-2$

şi inegalităţile sunt verificate.

R.M.T., 2005

Soluţia 3

Notăm $[x]=p, [y]=q$ avem:

a) $x\in[p,p+1)\Rightarrow nx\in[np,np+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow [nx]\in\{np,np+1,np+2,\dots,np+n-1\}$;

b) $y\in[q,q+1)\Rightarrow ny\in\{nq,nq+1,nq+2,\dots,nq+n-1\}$.

Fie $x\in\left[p+\frac{k}{n},p+\frac{k+1}{n}\right), k=\overline{0,n-2}$ şi $y\in\left[q+\frac{k'}{n},q+\frac{k'+1}{n}\right)$,

$k'=\overline{0,n-2}, x+y\in\left[p+q+\frac{k+k'}{n},p+q+\frac{k+k'+2}{n}\right)$.

Considerăm cazurile:

a) $k+k'\le n-2\Rightarrow [x+y]=p+q\Rightarrow (n-1)(p+q)\le$

$\le np+k-p+nq+k'-q, 0\le k+k'\le n-2$;

b) $k+k'\ge n-1\Rightarrow (n-1)[x+y]\le (n-1)(p+q+1)\le$

$\le np+k-p+nq+k'-q$.

Din a) şi b) rezultă inegalitatea dată (se poate proceda şi prin inducţie).

§ 3.

37.** Fie $m,n,m',n'\in\mathbb{N}$ astfel încât $m^2+n^2\le a$ şi $m'^2+n'^2\le b\Rightarrow$

$\Rightarrow (m^2+n^2)(m'^2+n'^2)\le ab\Rightarrow (mm'+nn')^2+(nm'-mn')^2\le ab\Rightarrow$

$\Rightarrow (mm'+nn')^2\le\sqrt{ab}\Rightarrow mm'+nn'\le[\sqrt{ab}]$ (*).

Scanned with OKEN Scanner

Fie $n=[\sqrt{a}] \Rightarrow m=\sqrt{a-[\sqrt{a}]^2}$.

Pentru $m=\sqrt{a-[\sqrt{a}]^2}$ și $n=[\sqrt{a}] \Rightarrow m^2+n^2 \leq a$ și pentru $n'=\sqrt{b}$ și $m'=\sqrt{b-[\sqrt{b}]^2} \Rightarrow m'^2+n'^2 \leq b$. Înlocuind în (*) rezultă:

$\left[\sqrt{a-[\sqrt{a}]^2}\right] \cdot \left[\sqrt{b-[\sqrt{b}]^2}\right]+[\sqrt{a}][\sqrt{b}] \leq [\sqrt{ab}]$ de unde rezultă inegalitatea din enunț.

Marius Drăgan

Soluția 2

Utilizând inegalitatea C.B.S. avem:

$$\left[\sqrt{a-[\sqrt{a}]^2}\right] \cdot \left[\sqrt{b-[\sqrt{b}]^2}\right]+[\sqrt{a}][\sqrt{b}] \leq$$

$$\leq \sqrt{a-[\sqrt{a}]^2} \cdot \sqrt{b-[\sqrt{b}]^2}+[\sqrt{a}][\sqrt{b}] \leq$$

$$\leq \sqrt{\left(a-[\sqrt{a}]^2+[\sqrt{a}]^2\right)+\left(b-[\sqrt{b}]^2+[\sqrt{b}]^2\right)} \leq [\sqrt{ab}]$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{a-[\sqrt{a}]^2}\right] \cdot \left[\sqrt{b-[\sqrt{b}]^2}\right]+[\sqrt{a}][\sqrt{b}] \leq [\sqrt{ab}].$$

Liviu Bordeianu

38*.** Evident α este rădăcină a ecuației $x^2-x-p=0$, adică $\alpha^2-\alpha-p=0 \Rightarrow \alpha^2=\alpha+p \Rightarrow [\alpha^2 n]=[n\alpha]+pn$ și

$$[\alpha[\alpha n]]=\left[\left(1+\frac{p}{\alpha}\right)[\alpha n]\right]=[\alpha n]+\left[\frac{p}{\alpha}[\alpha n]\right],$$

deci $[\alpha^2 n]-[\alpha[\alpha n]]=pn-\left[\frac{p}{\alpha}[n\alpha]\right]$.

Avem $n\alpha-1<[\alpha n]<\alpha n \Leftrightarrow (\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q})$,

$$pn-\frac{p}{\alpha}<\frac{p}{\alpha}[\alpha n]<pn \Rightarrow pn+\left[-\frac{p}{\alpha}\right] \leq \left[\frac{p}{\alpha}[\alpha n]\right]<pn \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pn+\left[-\frac{p}{\alpha}\right] \leq \left[\frac{p}{\alpha}[\alpha n]\right] \leq pn-1.$$

Avem $[\alpha^2 n]-[\alpha[\alpha n]]=pn-\left[\frac{p}{\alpha}[n\alpha]\right] \geq 1$ și $[\alpha^2 n]-[\alpha[\alpha n]]=$

$$=pn-\left[\frac{p}{\alpha}[n\alpha]\right] \leq -\left[-\frac{p}{\alpha}\right]=-[1-\alpha]=-1-[-\alpha]=[\alpha].$$

Scanned with OKEN Scanner

S-a utilizat relația $[-x]=\begin{cases}-[x] & , \quad x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-1, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$

Peter J. Ferraro

39. Avem $[n\sqrt{2}]<n\sqrt{2}$ (întrucât $n\sqrt{2}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$) $\Rightarrow [n\sqrt{2}]^2+1\le 2n^2\Rightarrow$
$\Rightarrow 1\le 2n^2-[n\sqrt{2}]^2=(n\sqrt{2}+[n\sqrt{2}])(n\sqrt{2}-[n\sqrt{2}])<2n\sqrt{2}\{n\sqrt{2}\}.$

Fragment I.M.O., 1979

40. Din $2n<\sqrt{4n^2+n}<2n+\frac{1}{4}\Rightarrow\left[\sqrt{4n^2+n}\right]=2n$. Avem:

$$\sqrt{4n^2+n}<2n+\frac{1}{4}=\left[\sqrt{4n^2+n}\right]+\frac{1}{4}\Rightarrow\sqrt{4n^2+n}-\left[\sqrt{4n^2+n}\right]<\frac{1}{4}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left\{\sqrt{4n^2+n}\right\}<\frac{1}{4}.$$

Olimpiadă Ungaria, 2003

41*.** Scriem pe $\sqrt{2}$ în baza 2, adică:
$\sqrt{2}=1\cdot 2^0+b_1\cdot 2^{-1}+b_2\cdot 2^{-2}+\cdots+b_k\cdot 2^{-k}+\cdots=\left(\overline{1,b_1b_2\ldots b_k\ldots}\right)_2$,
unde $b_k\in\{0,1\}$ $(*)$.
Întrucât $\sqrt{2}$ este irațional, rezultă că în scrierea lui $\sqrt{2}$ $(*)$ se află o infinitate de cifre 1 și partea fracționară $\{2^k\sqrt{2}\}=\left(\overline{0,b_kb_{k+1}\ldots}\right)_2$, deci

$$\{2^n\sqrt{2}\}=\left(\overline{0,b_nb_{n+1}\ldots}\right)_2>(0,1)_2=\frac{1}{2}.$$

Fragment I.M.O., 1985

42*.** Fie 20 de numere naturale consecutive. Dintre acestea există un număr natural $d\equiv 15(\text{mod }20)$. Vom arăta că d verifică cerința din enunț.
Din $d\equiv 15(\text{mod }20)\Rightarrow d\equiv 3(\text{mod }4)$, deci d nu poate fi pătrat perfect.
Prin urmare există $m\in\mathbb{N}^*$ astfel încât:
$m<n\sqrt{d}<m+1\Leftrightarrow[n\sqrt{d}]=m$ (1) sau $\{n\sqrt{d}\}=n\sqrt{d}-m$.
Din (1) rezultă $m^2<dn^2<(m+1)^2$. Vom arăta că $dn^2\ge m^2+5$.
Deoarece resturile pătrate (mod 5) sunt 0,1,4 iar $d\equiv 0$ (mod 5) rezultă că $dn^2\notin\{m^2+2,m^2+3\}$. Dar cum $d\equiv 3(\text{mod }4)$ există un divizor p a lui d astfel încât $p\equiv 3(\text{mod }4)$.
Deoarece resturile pătrate (mod 4) sunt 0 și 1 obținem că
$dn^2\in\{m^2+1,m^2+4\}$ și cum $dn^2>m^2\Rightarrow dn^2>m^2+5$, deci

$$n\sqrt{d}\{n\sqrt{d}\}=n\sqrt{d}(n\sqrt{d})-m=(n\sqrt{d})^2-m(n\sqrt{d})\ge$$
$$\ge m^2+5-m\sqrt{m^2+5}>m^2+5-\frac{m^2+(m^2+5)}{2}=\frac{5}{2}.$$

Olimpiada Balcanică de matematică (propusă de Serbia)

Scanned with OKEN Scanner

43.** Avem $\begin{matrix} x+a-1<[x+a]\leq x+a \\ x+b-1<[x+b]\leq x+b \end{matrix} \Rightarrow 2x-1\leq[x+a]+[x+b]\leq$
$\leq 2x+1 \Rightarrow [2x]+\{2x\}-1<[x+a]+[x+b]\leq[2x]+\{2x\}+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \{2x\}-1<[x+a]+[x+b]-[2x]\leq\{2x\}+1$ $(*)$.
Dar $[x+a]+[x+b]-[2x]\in\mathbb{Z}$, prin urmare din $(*)$ rezultă
$-1<[x+a]+[x+b]-[2x]\leq 1 \Rightarrow |[x+a]+[x+b]-[2x]|\leq 1$.

Mihaly Bencze, O.L., 1997

44.** a) Fie $x=k+t, k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ și $t\in(0,1)$. Ecuația devine:

$$\left(\frac{k+2t}{k}-\frac{k}{k+2t}\right)+\left(\frac{2k+t}{t}-\frac{t}{2k+t}\right)=\left(\frac{k+2t}{k}+\frac{2k+t}{t}\right)-$$
$$-\left(\frac{k}{k+2t}+\frac{t}{2k+t}\right)=2+2\left(\frac{t}{k}+\frac{k}{t}\right)-\left(\frac{k}{k+2t}+\frac{t}{2k+t}\right)>$$
$$>6-\left(\frac{k}{k+2t}+\frac{t}{2k+t}\right)>6-\left(\frac{k}{k+t}+\frac{t}{k+t}\right)=6-1=5;$$

b) Notăm $[x]=k\in\mathbb{N}$ și $\{x\}=t\in[0,1)$. Inegalitatea devine:

$$\frac{k^2}{7k^2+(k+2t)^2}+\frac{t^2}{7t^2+(t+2k)^2}<\frac{1}{8}, \forall\, k,t\in\mathbb{R}_+.$$

După eliminarea numitorilor și reducerea termenilor asemenea, inegalitatea se reduce la $2k^3t+2t^3k\geq 2k^2t^2$ care este evident adevărată, cu egalitate pentru $k=0$ și $t=0$. Rezultă că inegalitatea este strictă și adevărată oricare ar fi $k\in\mathbb{N}$ și $t\in[0,1)$.

Nicușor Zlotu, R.M. nr. 1/2017

45*.** <u>Soluția 1</u>
Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[6x]+[x]-[3x]-2[2x]$ și vom arăta că f este periodică cu $T=1$ și $f(x)\geq 0$.
Într-adevăr, $f(x+1)=[6x+6]+[x+1]-[3x+3]-2[2x+2]=$
$=[6x]+[x]+7-[3x]-2[2x]-3-4=f(x)$.
Și prin urmare este suficient să arătăm că $f(x)\geq 0, \forall\, x\in[0,1]$; evident $f(0)=f(1)=0$.
Punând $6x=k+t, k\in\{0,1,2,\ldots,5\}, t\in[0,1)$ obținem:

$$f(x)=[k+t]-\left[\frac{k+t}{2}\right]-2\left[\frac{k+t}{3}\right]+\left[\frac{k+t}{6}\right]=$$
$$=k-\left[\frac{k+t}{2}\right]-2\left[\frac{k+t}{3}\right]=k-\left[\frac{k}{2}\right]-2\left[\frac{k}{3}\right]\geq 0, \forall\, k\in\{0,1,2,3,4,5\}.$$

S-a utilizat proprietatea $\left[\frac{k+[x]}{n}\right]=\left[\frac{k+x}{n}\right], \forall\, k\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{R}$.

<u>Soluția 2</u>
Fie $x=[x]+\{x\}=k+t, t\in[0,1)$ și atunci:
$[6x]+[x]-[3x]-2[2x]=[6t]-[3t]-2[2t]\geq 0, \forall\, t\in[0,1)$,
în baza exercițiului precedent.

Scanned with OKEN Scanner

46**. $\{\sqrt{n}\}+\{\sqrt[3]{n}\}=\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}-[\sqrt{n}]-[\sqrt[3]{n}]$.

Demonstrăm că $\sqrt{n}-[\sqrt{n}]\geq\frac{1}{n}$. Este suficient pentru $n=k^2+1$.

$\sqrt{k^2+r}-\left[\sqrt{k^2+r}\right]\geq\sqrt{k^2+1}-k, 0<r<2k.$

$\sqrt{k^2+1}-k\geq\frac{1}{k^2-1}\Rightarrow(k^2+1)^3\geq(k^3+k+1)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^3(k-2)+2k(k-1)\geq 0$ (A) dacă $k\geq 2$.

Analog $\sqrt[3]{n}-[\sqrt[3]{n}]\geq\frac{1}{n}$. Pentru $n=k^2$ sau $n=k^6$ este falsă.

47***. Fie $x=[x]+\{x\}=k+t, k\in\mathbb{N}, t\in[0,1)$, atunci inegalitatea se mai scrie:

$$\frac{k+2t}{k^2+2t^2}+\frac{2k+t}{2k^2+t^2}<\frac{4}{k+t}\Leftrightarrow\frac{(k+2t)(k+t)}{k^2+2t^2}+\frac{(2k+t)(k+t)}{2k^2+t^2}<4.$$

Dar, cum $\frac{(k+2t)(k+t)}{k^2+2t^2}=1+\frac{3kt}{k^2+2t^2}\leq 1+\frac{3kt}{k^2+t^2+t^2}\leq$

$\leq 1+\frac{3kt}{2kt+t^2}=1+\frac{3k}{2k+t}$ (1) și analog $\frac{(2k+t)(k+t)}{2k^2+t^2}<\frac{3t}{k+2t}$ (2).

Din (1) și (2) rezultă că $\frac{(k+2t)(k+t)}{k^2+2t^2}+\frac{(2k+t)(k+t)}{2k^2+t^2}<$

$<2+3\left(\frac{k}{2k+t}+\frac{t}{k+2t}\right)<2+3\cdot\frac{2}{3}=4$, deoarece

$3\left(\frac{k}{2k+t}+\frac{t}{k+2t}\right)<2.$

48. a) Cu notația: $x=[x]+\{x\}=k+t, k\in\mathbb{Z}, t\in[0,1)$ inegalitatea devine $mk+[(n-m)(k+t)]\geq(m+1)k+[(n-m-1)(k+t)]\Rightarrow$

$\Rightarrow mk+(n-m)k+[(n-m)t]\geq(m+1)k+[(n-m-1)(k+t)]\Rightarrow$

$\Rightarrow[(n-m)t]\geq[(n-m-1)t]$, care este adevărată oricare ar fi $t\in[0,1)$, deoarece $(n-m)t\geq(n-m-1)t, \forall\, t\geq 0$;

b) Se poate aplica în mod repetat punctul a) sau inegalitatea $[x+y]\geq[x]+[y]$, adică: $[nx]=[x+(n-1)x]\geq[x]+[(n-1)x]\geq$

$\geq 2[x]+[(n-2)x]\geq(n-2)[x]+[2x]\geq(n-1)[x]+[x]=n[x]$;

c) Trebuie să avem:

$nk<(n-2)k+[2(k+t)]<\cdots<k+[(n-1)(k+t)]<[n(k+t)]$,

de unde rezultă că numerele $0, [2t], [3t], \ldots, [nt]$ trebuie să fie consecutive.

Prin urmare $[2t]=1, [3t]=2, [nt]=n-1\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\leq t<1, \frac{2}{3}\leq t<1, \ldots, \frac{n-1}{n}\leq t<1\Rightarrow t\in\left[\frac{n-1}{n}, 1\right)$ adică

$x\in\left[k+\frac{n-1}{n}, k+1\right)$.

Vasile Popa, Galați

Scanned with OKEN Scanner

49***. Inegalitatea se mai scrie:

$$\frac{x[x]}{2x+\{x\}}+\frac{[x]\{x\}}{3x}+\frac{x\{x\}}{2x+[x]}\le\frac{x}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x[x]}{x+[x]+2\{x\}}+\frac{[x]\{x\}}{2x+[x]+\{x\}}+\frac{x\{x\}}{x+\{x\}+2[x]}\le\frac{x+[x]+\{x\}}{4}.$$

Dacă notăm $a=x,[x]=b\in\mathbb{N}$ și $\{x\}=c\in[0,1)$ atunci inegalitatea devine

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{a+b+c}{4}.$$

Pentru aceasta vom folosi inegalitatea dintre medii:

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\le\frac{x+y}{2}\Rightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),$$

deci $\frac{1}{(a+c)+(b+c)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=1\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{ab}{a+b+2c}\le\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)\ (1).$$

Analog $\frac{bc}{b+c+2a}\le\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{c+a}\right)$ și

$$\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{ca}{4}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{a+b}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le$$

$$\le\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)+\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{c+a}\right)+\frac{ca}{4}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{a+b}\right)\le$$

$$\le\frac{1}{4}\left[\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ba+ca}{b+c}+\frac{cb+ca}{a+b}\right]=\frac{a+b+c}{4}.$$

Egalitatea se realizează pentru $x\in[0,1)\cup\{\mathbb{N}^*\}$.

50**. Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz rezultă

$$\left(1\cdot\sqrt{[x_1]+\{x_2\}}+1\cdot\sqrt{[x_2]+\{x_3\}}+\cdots+1\cdot\sqrt{[x_n]+\{x_1\}}\right)^2\le$$

$$\le\left((1^2+1^2+\cdots+1^2)([x_1]+[x_2]+\cdots+[x_n]+\{x_1\}+\{x_2\}+\cdots+\{x_n\})\right)$$

$\le n(x_1+x_2+\cdots+x_n)\le n^2$, deci $E_{max}=n$ maximul se obține pentru

$$\frac{[x_1]+\{x_2\}}{1}=\frac{[x_2]+\{x_3\}}{1}+\cdots=\frac{[x_n]+\{x_1\}}{1}=$$

$$=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=1\Rightarrow[x_1]+\{x_2\}=1\Rightarrow[x_1]=1\text{ și }\{x_2\}=0$$

ș.a.m.d. adică pentru $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$.

Gh. Alexe

Scanned with OKEN Scanner

51**. Utilizăm inegalitatea $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ unde
$x=[x]+\{x\}=a+\alpha, y=[y]+\{y\}=b+\beta, z=[z]+\{z\}=c+\gamma \Rightarrow$
$\Rightarrow (a+\alpha)^2+(b+\beta)^2+(c+\gamma)^2 \geq (a+\alpha)(b+\beta)+(a+\alpha)(c+\gamma)+$
$+(b+\beta)(c+\gamma) \Rightarrow a^2+b^2+c^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2a\alpha+2b\beta+2c\gamma \geq$
$\geq ab+\alpha\beta+a\beta+b\alpha+ac+\alpha\gamma+a\gamma+\alpha c+bc+\beta\gamma+b\gamma+c\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha+$
$+2a\alpha+2b\beta+2c\gamma-a\beta-b\alpha-a\gamma-\alpha c-b\gamma-c\beta \geq 0.$
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha+$
$+(a-b)(\alpha-\beta)+(b-c)(\beta-\gamma)+(c-a)(\gamma-\alpha) \geq 0$
ori egalitatea dată este tocmai ceea ce am obținut.

Gh. Huțanu, R.M.G., 28

52***. Notăm

$$f(x,y,z)=[x]+[y]+[z]-2\left(\left[\frac{x+y}{2}\right]+\left[\frac{y+z}{2}\right]+\left[\frac{z+x}{2}\right]\right)+$$
$$+3\left[\frac{x+y+z}{3}\right].$$

Ținând seama că $t=[t]+\{t\}=k+t, k\in\mathbb{Z}, t\in[0,1)$ și avem
$x=m+\alpha,\ y=n+\beta,\ z=p+\gamma$, unde $m,n,p\in\mathbb{Z}$ și $\alpha,\beta,\gamma\in[0,1)$.
Dacă m,n,p au aceeași paritate atunci:

$$f=m+n+p-2\left(\frac{m+n}{2}+\frac{n+p}{2}+\frac{p+m}{2}+\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right]+\left[\frac{\beta+\gamma}{2}\right]+\left[\frac{\gamma+\alpha}{2}\right]\right)+$$
$$+3\left[\frac{m+n+p+\alpha+\beta+\gamma}{3}\right],$$
$$f=3\left[\frac{m+n+p+[\alpha+\beta+\gamma]}{3}\right]-(m+n+p)\ (1)$$

și prin urmare din (1) rezultă

$$f\geq 3\left[\frac{m+n+p}{3}\right]-(m+n+p)\geq 3\cdot\frac{m+n+p-3}{3}-(m+n+p)=-3,$$
$$f\leq 3\left[\frac{m+n+p+2}{3}\right]-(m+n+p)\leq 3\frac{m+n+p+2}{3}-(m+n+p)=2$$

și deci $-3\leq f\leq 3$.
Cazul p are altă paritate decât a numerelor m și n se tratează analog.

53**. Inegalitatea se mai scrie sub formă simetrică
$a(b-[c])+b(c-[a])+c(a-[b])+[a]([b]-c)+[b]([c]-a)+$
$+[c]([a]-b)\leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ab-[a]b-a[b]+[a][b]+bc-[b]c-b[c]+[b][c]+$
$+ac-[c]a-c[a]+[c][a]\leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-[a])(b-[b])+(b-[b])(c-[c])+(c-[c])(a-[a])\leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{a\}\cdot\{b\}+\{b\}\cdot\{c\}+\{c\}\cdot\{a\}\leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{a\}=\{b\}=0$ sau $\{b\}=\{c\}=0$ sau $\{c\}=\{a\}=0 \Leftrightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Leftrightarrow a, b \in \mathbb{Z}$ sau $b, c \in \mathbb{Z}$ sau $c, a \in \mathbb{Z}$.

Titu Andreescu

54***. Inegalitatea nu se schimbă dacă facem substituțiile $x \to x + k$, $y \to y + h$, unde $k, h \in \mathbb{Z}$ și prin urmare, rezultă că este suficient să demonstrăm inegalitatea pentru $x, y \in [0,1)$.

Punând $5x = n + \alpha, 5y = m + \beta$, unde $m, n \in \{0,1,2,3,4\}$ și $\alpha, \beta \in [0,1)$, atunci inegalitatea devine:

$[5x] + [5y] \geq [3x + y] + [3y + x]$ (întrucât $[x] = [y] = 0$) $\Leftrightarrow$

avem $[3x + y] + [3y + x] = \left[\frac{3n + m + 3\alpha + \beta}{5}\right] + \left[\frac{3m + n + 3\beta + \alpha}{5}\right] =$

$= \left[\frac{3n + m + [3\alpha + \beta]}{5}\right] + \left[\frac{3m + n + [3\beta + \alpha]}{5}\right] \leq$

$\leq \left[\frac{3n + m + 3}{5}\right] + \left[\frac{3m + n + 3}{5}\right]$

$\left(\text{s-a utilizat proprietatea } \left[\frac{k + [x]}{n}\right] = \left[\frac{k + x}{n}\right]\right)$.

Rămâne să arătăm că $\left[\frac{3n + m + 3}{5}\right] + \left[\frac{3m + n + 3}{5}\right] \leq m + n$.

Într-adevăr, pentru $m + n \leq 1 \Leftrightarrow (m, n) \in \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ inegalitatea se verifică direct. Pentru $m + n \geq 2$ avem:

$\left[\frac{3n + m + 3}{5}\right] + \left[\frac{3m + n + 3}{5}\right] \leq \left[\frac{3n + m + 3 + 3m + n + 3}{5}\right] =$

$= \left[\frac{4(m + n) + 6}{5}\right] = \left[m + n + \frac{6}{5} - \frac{m + n}{5}\right] = m + n + \left[\frac{6 - (m + n)}{5}\right] =$

$= m + n + \left[\frac{4}{5}\right] = m + n$, unde $\frac{6 - (m + n)}{n} \leq \frac{4}{5}$.

Olimpiadă S.U.A.

55. Evident dacă $n = k$, inegalitatea devine $[kx] + [ky] + [kx + ky] \leq$

$\leq [2kx] + [2ky]$ cu substituția $kx \to a$, $ky \to b$, inegalitatea devine

$[a] + [b] + [a + b] \leq [2a] + [2b]$ care este cunoscută.

Reciproc, procedăm prin reducere la absurd. Presupunem că egalitatea este satisfăcută pentru orice x, y, dar $n \neq k$. Vom lua $x = y$ și se obține:

$2[nx] + [2kx] \leq 2[nx + kx]$. Dacă scădem din ambii membri expresia:

$2[nx] + 2[kx] \Rightarrow \left[2kx - 2[kx]\right] \leq 2[nx] + kx - [nx] - [kx] \Rightarrow$

$\Rightarrow [\{2kx\}] \leq 2[\{nx\} + \{kx\}], \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Considerăm $x = \frac{m}{n}$, atunci ultima inegalitate devine $\left[2\left\{\frac{km}{n}\right\}\right] \leq 2\left[\left\{\frac{km}{n}\right\}\right]$, care nu este adevărată deoarece membrul drept este mereu nul.

Ungaria, 2006

Scanned with OKEN Scanner

56***. Fie $[x] = x_1 \in \mathbb{N}, [y] = y_1 \in \mathbb{N}$ și $u = \{x\}, v = \{y\}$, unde $u, v \in [0,1)$. Inegalitatea din enunț devine:

$x_1 + y_1 + [5u] + [5v] \geq [3u + v] + [3v + u]$ (1).

Fie $u > v$, dacă $u \leq 2v$, atunci $5u = 3u + 2u \geq 3u + 2v \geq 3u + v \Rightarrow$

$\Rightarrow [5u] \geq [3u + v]$ (α) și $5v = 3v + 2v \geq 3v + u \Rightarrow [5v] \geq [3v + u]$ (β).

Din (α) și (β) rezultă (1).

Fie acum $u > 2v$ și $5u = [5u] + \{5u\} = a + b, 5v = [5v] + \{5v\} = c + d$, unde $a, c \in \mathbb{N}$ și $b, d \in [0,1)$. Inegalitatea (1) devine:

$$x_1 + y_1 + a + c \geq \left[\frac{3a + 3b + c + d}{5}\right] + \left[\frac{3c + 3d + a + b}{5}\right] \text{ (2).}$$

Evident din $1 > u > 2v \Rightarrow 5 > 5u > 10v \Rightarrow 5 > a + b > 2c + 2d \Rightarrow a \leq 4$ și $a \geq 2c$. (Dacă $a < 2c \Rightarrow a \leq 2c - 1 \Rightarrow a + 1 \leq 2c \Rightarrow a + 1 - 2c \leq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a + b - 2c < 0$, contradicție cu $a + b > 2c + 2d \Rightarrow a + b - 2c > 2d > 0$.)

Așadar $2c \leq a \leq 4$, evident deoarece $b, d \in [0,1)$ avem și $3b + d < 4$, $3d + b < 4$. Din inegalitățile $4 \geq a \geq 2c$ rezultă posibilitățile pentru a și c.

a	4	4	4	3	3	2	2	1	0
b	2	1	0	0	1	1	0	0	0

și în fiecare din cele nouă cazuri inegalitatea (2) se verifică.

S.U.A. M.O., 1975

57***. Cu substituțiile $x \to x + p$, $y \to y + q$, $z \to z + r$, unde $p, q, r \in \mathbb{Z}$ inegalitatea se păstrează și este suficient să demonstrăm pentru $x, y, z \in [0,1)$.

Punând $nx = p + \alpha, ny = q + \beta$, $nz = r + \gamma$ unde $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1)$ și $p, q, r \in \in \{0,1,2, \ldots, n-1\}$. Deoarece $[x] = [y] = [z] = 0$ avem:

$$(n-2)[x + y + z] + 2([x] + [y] + [z]) = (n-2)[x + y + z] =$$

$$= (n-2)\left[\frac{p + q + r + \alpha + \beta + \gamma}{n}\right] = (n-2)\left[\frac{p + q + r + [\alpha + \beta + \gamma]}{n}\right] \leq$$

$$\leq (n-2)\left[\frac{p + q + r + 2}{n}\right], \text{ dacă } n | p + q + r + 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow p + q + r \in \{n - 2, 2n - 2\}$ și în aceste cazuri:

$$(n-2)\left[\frac{p + q + r + 2}{n}\right] \leq p + q + r, \text{ dacă } n \nmid p + q + r + 2,$$

atunci ținând seama de (P_{19} și P_{25}) avem:

$$(n-2)\left[\frac{p + q + r + 2}{n}\right] = (n-2)\left[\frac{p + q + r + 1}{n}\right] \leq$$

$$\leq \left[\frac{n-2}{n}(p + q + r) + \frac{n-2}{n}\right] \leq \left[p + q + r + \frac{n-2}{n}\right] \leq p + q + r.$$

M.O. Drîmbe

Scanned with OKEN Scanner

58*. a) Observăm că dacă facem substituțiile $x \to x+p, y \to y+q, z \to z+r$ $p,q,r \in \mathbb{Z}$ inegalitatea nu se schimbă și prin urmare este suficient să demonstrăm pentru $x,y,z \in [0,1)$. Punem $4x = m+\alpha, 4y = n+\beta, 4z = p+\gamma$, unde $m,n,p \in \{0,1,2,3\}$ și $\alpha,\beta,\gamma \in [0,1)$.

Avem $[x+y+z]+[x+y]+[x+z]+[y+z]+[x]+[y]+[z] =$

$= [x+y+z]+[x+y]+[x+z]+[y+z] =$

$$= \left[\frac{m+n+p+\alpha+\beta+\gamma}{4}\right] + \left[\frac{m+n+\alpha+\beta}{4}\right] + \left[\frac{n+p+\beta+\gamma}{4}\right] +$$

$$+ \left[\frac{m+p+\alpha+\gamma}{4}\right] = \left[\frac{m+n+p+[\alpha+\beta+\gamma]}{4}\right] +$$

$$+ \left[\frac{m+n+[\alpha+\beta]}{4}\right] + \left[\left[\frac{n+p+[\beta+\gamma]}{4}\right]\right] + \left[\frac{m+p+[\alpha+\gamma]}{4}\right] \leq$$

$$\leq \left[\frac{m+n+p+2}{4}\right] + \left[\frac{m+n+1}{4}\right] + \left[\frac{n+p+1}{4}\right] + \left[\frac{m+p+1}{4}\right].$$

Prin urmare, ar fi suficient să demonstrăm inegalitatea

$$\left[\frac{m+n+p+2}{4}\right] + \left[\frac{m+n+1}{4}\right] + \left[\frac{n+p+1}{4}\right] + \left[\frac{m+p+1}{4}\right] \leq$$

$\leq m+n+p$ $(*)$.

Într-adevăr avem:

$$\left[\frac{m+n+p+2}{4}\right] + \left[\frac{m+n+1}{4}\right] + \left[\frac{n+p+1}{4}\right] + \left[\frac{m+p+1}{4}\right] \leq$$

$$\leq \left[\frac{3(m+n+p)+5}{4}\right] = \left[\frac{3k+5}{4}\right] = \left[k+\frac{5-k}{4}\right] \leq k$$

(s-a notat $m+n+p = k$, unde $k \in \{0,1,\ldots,9\}$).

Pentru $k \geq 2$ ultima inegalitate este adevărată. Dar pentru $k \leq 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m+n+p \leq 1$, care are loc dacă $m = n = p = 0$ sau două numere egale cu 0 și unul este egal cu 1 și care se verifică direct în inegalitatea $(*)$.

S-a utilizat relația $\left[\frac{k+a}{n}\right] = \left[\frac{k+[a]}{n}\right], \forall\, a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

(vezi Capitolul I);

b) Pentru $x = 1, y = z = 0 \Rightarrow [a] \geq 4 \Rightarrow a \geq 4$.

Pentru $x = -1, y = z = 0 \Rightarrow [-a] \geq -4 \Rightarrow a \leq 4$ și deci $a = 4$.

Analog $b = 4$ și $c = 4$.

M.O. Drîmbe

Scanned with OKEN Scanner

59*.** Observație generală

Dacă în toate inegalitățile se fac substituțiile $x \to x+k, y \to y+h$, unde $k,h \in \mathbb{Z}$ inegalitățile nu se schimbă și prin urmare putem demonstra inegalitățile pentru $x,y \in [0,1)$.

a) Inegalitatea devine $[4x]+[4y] \geq [2x+y]+[2y+x]$ unde $x,y \in [0,1)$. Punem $4x = p+\alpha, 4y = q+\beta$, unde $\alpha,\beta \in [0,1)$ și $p,q \in \{0,1,2,3\}$.

Avem $[2x+y]+[2y+x] = \left[\frac{2p+q+2\alpha+\beta}{4}\right] + \left[\frac{2q+p+2\beta+\alpha}{4}\right] =$

$= \left[\frac{2p+q+[2\alpha+\beta]}{4}\right] + \left[\frac{2q+p+[2\beta+\alpha]}{4}\right] \leq$

$\leq \left[\frac{2p+q+2}{4}\right] + \left[\frac{2q+p+2}{4}\right]$

$\left(\text{s-a utilizat proprietatea } \left[\frac{k+x}{n}\right] = \left[\frac{k+[x]}{n}\right], \text{unde } k,n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}\right).$

Prin urmare, este suficient să demonstrăm că:

$\left[\frac{2p+q+2}{4}\right] + \left[\frac{2q+p+2}{4}\right] \leq p+q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\frac{2p+q+2}{4}\right] + \left[\frac{2q+p+2}{4}\right] < p+q+1,$

dar $\left[\frac{2p+q+2}{4}\right] + \left[\frac{2q+p+2}{4}\right] \leq \frac{3(p+q)}{4} + 1 < p+q+1;$

b) Punem $5x = p+\alpha, 5y = q+\beta$, $\alpha,\beta \in [0,1)$ și $p,q \in \{0,1,2,3,4\}$.

Avem pentru $x,y \in [0,1)$, $[2x+y]+[2y+x]+[2x]+[2y] =$

$= \left[\frac{2p+q+2\alpha+\beta}{5}\right] + \left[\frac{2q+p+2\beta+\alpha}{5}\right] + \left[\frac{2p+2\alpha}{5}\right] + \left[\frac{2q+2\beta}{5}\right] =$

$= \left[\frac{2p+q+[2\alpha+\beta]}{5}\right] + \left[\frac{2q+p+[2\beta+\alpha]}{5}\right] + \left[\frac{2p+[2\alpha]}{5}\right] + \left[\frac{2q+[2\beta]}{5}\right]$

$\leq \left[\frac{2p+q+2}{5}\right] + \left[\frac{2q+p+2}{5}\right] + \left[\frac{2p+1}{5}\right] + \left[\frac{2q+1}{5}\right]$

și ca la punctul a) este suficient să demonstrăm că:

$\left[\frac{2p+q+2}{5}\right] + \left[\frac{2q+p+2}{5}\right] + \left[\frac{2p+1}{5}\right] + \left[\frac{2q+1}{5}\right] \leq p+q.$

Considerăm cazurile $5|2p+1 \Leftrightarrow p = 2$ și inegalitatea devine

$\left[\frac{6+q}{5}\right] + \left[\frac{2q+4}{5}\right] + 1 + \left[\frac{2q+1}{5}\right] \leq q+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\frac{q+1}{5}\right] + \left[\frac{2q+4}{5}\right] + \left[\frac{2q+1}{5}\right] \leq q,$

Scanned with OKEN Scanner

care se verifică pentru $q \in \{0,1,2,3,4\}$ și prin urmare inegalitatea este adevărată și în cazul $q = 2$ $(5|2q+1 \Leftrightarrow q = 2)$.

Vom considera cazurile $p, q \in \{0,1,3,4\}$.

Avem $\left[\frac{2p+q+2}{5}\right] + \left[\frac{2q+p+2}{5}\right] + \left[\frac{2p+1}{5}\right] + \left[\frac{2q+1}{5}\right] =$

$= \left[\frac{2p+q+2}{5}\right] + \left[\frac{2q+p+2}{5}\right] + \left[\frac{2p}{5}\right] + \left[\frac{2q}{5}\right] \leq$

(unde $5 \nmid 2p+1$, $5 \nmid 2q+1$ și utilizăm proprietatea cunoscută)

$\leq \left[\frac{2p+q+2+2q+p+2+2p+2q}{5}\right] = \left[p+q+\frac{4}{5}\right] = p+q;$

c) Putem nota $6x = p+\alpha, 6y = q+\beta$, $\alpha, \beta \in [0,1)$ și $p, q \in \{0,1,2,3,4,5\}$ și utilizând aceeași proprietate, rezultă:

$\left[\frac{2p+q+2\alpha+\beta}{6}\right] + \left[\frac{2q+p+2\beta+\alpha}{6}\right] + \left[\frac{3p+3\alpha}{6}\right] + \left[\frac{3q+3\beta}{6}\right] =$

$= \left[\frac{2p+q+[2\alpha+\beta]}{6}\right] + \left[\frac{2q+p+[2\beta+\alpha]}{6}\right] + \left[\frac{3p+[3\alpha]}{6}\right] + \left[\frac{3q+[3\beta]}{6}\right]$

$\leq \left[\frac{2p+q+2}{6}\right] + \left[\frac{2q+p+2}{6}\right] + \left[\frac{3p+2}{6}\right] + \left[\frac{3q+2}{6}\right] \leq$

(dar cum $6 \nmid 3p+2$, $6 \nmid 3p+1$ și utilizăm proprietatea citată, avem $\left[\frac{3p+2}{6}\right] = \left[\frac{3p+1}{6}\right] + \left[\frac{3p}{6}\right]$ și analog $\left[\frac{3q+2}{6}\right] = \left[\frac{3q}{6}\right]$)

$\leq \left[\frac{2p+q+2}{6}\right] + \left[\frac{2q+p+2}{6}\right] + \left[\frac{3p}{6}\right] + \left[\frac{3q}{6}\right] \leq$

$\leq \left[\frac{2p+q+2}{6} + \frac{2q+p+2}{6} + \frac{3p}{6} + \frac{3q}{6}\right] = \left[p+q+\frac{4}{6}\right] =$

$= p+q = [6x]+[6y].$

M.O. Drîmbe

60*.** Se disting cazurile $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \leq 1$ și $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} > 1$.

a) Dacă $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \leq 1$, atunci $k + \left[\frac{k}{pq}\right] + \left[\frac{k}{pr}\right] + \left[\frac{k}{rq}\right] \geq$

$\geq k \geq \left[k\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)\right] = \left[\frac{k}{p}+\frac{k}{q}+\frac{k}{r}\right] \geq \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{q}\right] + \left[\frac{k}{r}\right]$

(s-a utilizat proprietatea $[x_1 + x_2 + \cdots + x_n] \geq [x_1] + [x_2] + \cdots + [x_n]$);

b) Dacă $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} > 1$, care are loc numai dacă $p = 2, q = 3, r = 5$

în toate celelalte cazuri $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \leq 1$, adică punctul a).

Scanned with OKEN Scanner

Atunci avem $0 \le k < 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ și

$$\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k}{3}\right]+\left[\frac{k}{5}\right] \le \frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{5} = k+\frac{k}{30} < k+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k}{3}\right]+\left[\frac{k}{5}\right] \le k \le k+\left[\frac{k}{6}\right]+\left[\frac{k}{10}\right]+\left[\frac{k}{15}\right], \forall\, k \in \mathbb{N}, 0 < k < 30$$

(cu egalitate dacă $k = 0$ – vezi ex. 1 din acest capitol).

61***. Presupunem că avem inegalitatea, atunci pentru

$$n = pqr \Rightarrow pqr + p + q + r \ge pr + pq + pr + k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le k \le (p-1)(q-1)(r-1) + 1.$$

Reciproc, este suficient să demonstrăm pentru

$$k = (p-1)(q-1)(r-1) + 1.$$

Fie $n = pqrm + k$ unde $m \in \mathbb{N}$ și $0 \le k < pqr$, atunci inegalitatea devine

$$mpqr + k + \left[mr + \frac{k}{pq}\right] + \left[mp + \frac{k}{qr}\right] + \left[mq + \frac{k}{rp}\right] \ge$$

$$\ge \left[mqr + \frac{k}{p}\right] + \left[mrp + \frac{k}{q}\right] + \left[mpq + \frac{k}{r}\right] +$$

$$+\big((p-1)(q-1)(r-1)+1\big)\left[m + \frac{k}{pqr}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k + \left[\frac{k}{pq}\right] + \left[\frac{k}{qr}\right] + \left[\frac{k}{rp}\right] \ge \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{q}\right] + \left[\frac{k}{r}\right].$$

Distingem două cazuri:

a) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \le 1$ (care are loc pentru orice $(p,q,r) \ne (2,3,5)$).

Avem $\left[\frac{k}{pq}\right] + \left[\frac{k}{qr}\right] + \left[\frac{k}{rp}\right] \ge k \ge \left[\frac{k}{p}+\frac{k}{q}+\frac{k}{r}\right] \ge \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{q}\right] + \left[\frac{k}{r}\right]$;

b) Dacă $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} > 1 \Leftrightarrow (p,q,r) = (2,3,5)$

atunci $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5} = \frac{31}{30} > 1$ și inegalitatea devine:

$$k + \left[\frac{k}{6}\right] + \left[\frac{k}{10}\right] + \left[\frac{k}{15}\right] \ge \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{3}\right] + \left[\frac{k}{5}\right], \text{ unde } 0 \le k \le 30.$$

Într-adevăr avem $\left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{3}\right] + \left[\frac{k}{5}\right] \le \frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{5} = k + \frac{k}{30} < k+1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{3}\right] + \left[\frac{k}{5}\right] \le k \le k + \left[\frac{k}{6}\right] + \left[\frac{k}{10}\right] + \left[\frac{k}{15}\right]$$

(vezi ex. 1 din acest capitol).

Cătălin Zara

Scanned with OKEN Scanner

§ 4.

62*. Fie $S_n = \left[\sqrt{1}\right]^2 + \left[\sqrt{2}\right]^2 + \cdots + \left[\sqrt{n^2-1}\right]^2 =$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\sqrt{k^2}\right] + \left[\sqrt{k^2+1}\right] + \cdots + \left[\sqrt{(k^2+1)^2-1}\right] = \sum_{k=1}^{n-1} k^2[(k+1)^2 - k^2]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(2k^3+k^2) = \frac{n(n-1)(3n^2-n-1)}{6} \geq \frac{n^2(n-1)(4n+1)^2}{36(n+1)},$$

care se reduce la $(n-2)(n^2+8n+3) \geq 0, \forall n \geq 2$.

Concursul „Petru Moroșanu", 2008, Carmen Botea, G.M. nr. 2/2009

63.** Vom utiliza inegalitatea dintre media aritmetică și media pătratică și evident identitatea lui Hermite.

Avem $[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] =$

$$= \left[(\sqrt{x})^2\right] + \left[\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right)^2\right] + \cdots + \left[\left(\sqrt{x+\frac{n-1}{n}}\right)^2\right] \geq$$

$$\geq \left[\sqrt{x}\right]^2 + \left[\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right]^2 + \cdots + \left[\sqrt{x+\frac{n-1}{n}}\right]^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{n}\left(\left[\sqrt{x}\right] + \left[\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right] + \cdots + \left[\sqrt{x+\frac{n-1}{n}}\right]\right)^2.$$

S-a utilizat și inegalitatea $[a]^2 \leq [a^2], \forall\, a > 0$ de unde rezultă inegalitatea cerută.

Gh. Stoica, R.M.T. nr. 2/2015

64*. a) Aplicând inegalitatea mediilor și faptul că $[x] \leq x$, avem $[xy] \geq [x][y], \forall\, x, y \geq 0$, avem:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}[kx]} < \frac{\sum_{k=1}^{n}[kx]}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} kx}{n} = \frac{(n+1)x}{2};$$

$$\text{b)} \sum_{k=1}^{n}[1+kx] = n + \sum_{k=1}^{n}[kx] \geq n + \sum_{k=1}^{n} k[x] = n + \frac{n(n+1)}{2}[x].$$

Scanned with OKEN Scanner

65**. Se știe: $[x_1 + x_2 + \cdots + x_n] \geq [x_1] + [x_2] + \cdots + [x_n], \forall\, x_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$.

Avem $[2a_1 + a_2] + [2a_2 + a_3] + \cdots + [2a_n + a_1] + [a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n] \leq [4(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)]$ și pentru inegalitatea din dreapta s-a utilizat inegalitatea $n[a] \leq [na]$).

66**. a) Dacă facem substituțiile $a_k \to a_k + h_k$, $h_k \in \mathbb{Z}$ inegalitatea nu se schimbă, deci este suficient să considerăm $a_k \in [0,1), k = \overline{1,n}$ și inegalitatea devine: $[na_1] + [na_2] + \cdots + [na_n] \geq [a_1 + a_2 + \cdots + a_n]$.

Notăm $a = \max\{a_1 a_2 a_n\} \Rightarrow [na_1] + [na_2] + \cdots + [na_n] \geq [na] \geq$
$\geq [a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n]$.

b) Se utilizează inegalitățile:

$[x_1 + x_2 + \cdots + x_n] \geq [x_1] + [x_2] + \cdots + [x_n]$ și $[nx] \geq n[x]$.

Pentru inegalitatea din stânga avem:

$[a_1 + a_2 + \cdots + a_n] + (n-1)([a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n]) \geq [a_1] + [a_2] +$
$+ \cdots + [a_n] + (n-1)([a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n]) = n([a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n])$

și pentru inegalitatea din dreapta rezultă:

$[a_1 + a_2 + \cdots + a_n] + (n-1)([a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n]) =$
$= n[a_1 + a_2 + \cdots + a_n]$.

67**. Procedăm prin metoda inducției.

Pentru $n = 1$, inegalitatea devine $2[x] \geq 2[x]$, iar pentru $n = 2 \Rightarrow [2x] \geq$
$\geq 2[x]$ care este adevărată. Presupunând adevărată pentru n, demonstrăm pentru $n+1$, dar ținem seama de cunoscuta inegalitate

$[nx] \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{[kx]}{k}$. Avem: $2\sum_{k=1}^{n+1}[kx] = 2\sum_{k=1}^{n}[kx] + 2[(n+1)x] \geq$

$\geq (n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{[kx]}{k} + 2\sum_{k=1}^{n+1}\frac{[kx]}{k} = (n+2)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{[kx]}{k}$.

M.O. Drîmbe

68**. Avem $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\left[\frac{n}{k}\right]\right] \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\left[\frac{n}{k}\right] \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{k^2} = n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2n^2$

$\left(\text{deoarece } \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum\frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \right.$

$\left. = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2\right)$.

Pentru $n \geq 2$, avem: $S_n = n^2 + \sum_{k=2}^{n}\left[\frac{n}{k}\left[\frac{n}{k}\right]\right] > n^2 \Rightarrow n^2 < S_n < 2n^2$.

Scanned with OKEN Scanner

69**. Avem $\left[\sqrt{9n^2+k}\right]=3n$, pentru $k=\overline{1,6n}$;
$\left[\sqrt{9n^2+k}\right]=3n+1$, pentru $k=\overline{6n+1,12n+3}$;
$\left[\sqrt{9n^2+k}\right]=3n+2$, pentru $k=\overline{12n+4,18n+8}$;
$\left[\sqrt{9n^2+k}\right]=3n+3$, pentru $k=\overline{18n+9,24n+15}$.
Prin urmare, inecuația este echivalentă cu:
$3n\cdot 6n+(3n+1)(6n+3)+(3n+2)(6n+5)+(3n+3)(6n+7)\leq$
$\leq 144n+43\Rightarrow n=1$.

Rodica Bălan, Dumitra Bălan, Concurs „Cristian S. Calude", 2011

70. Avem $[x_1]^2+3>2x_1\Leftrightarrow[x_1]^2+3>2([x_1]+\{x_1\})\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow[x_1]^2-2[x_1]+1+2(1-\{x_1\})>0,\forall x_1\in\mathbb{R}$. Aşadar,

$$[x_k]^2+3>2x_k,\forall x_k\in\mathbb{R},k=\overline{1,10}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}([x_k]^2+3)>2\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\geq$$

$$\geq 2[x_1+x_2+\cdots+x_n]\geq 2([x_1]+[x_2]+\cdots+[x_n]).$$

71**. Utilizând proprietatea $\forall x_k\in\mathbb{R}$ avem:
$[x_1]+[x_2]+\cdots+[x_n]+n-1\geq[x_1+x_2+\cdots+x_n]$
(vezi Capitolul proprietăți)
și în inegalitatea din enunț se aplică pentru $x_k=\dfrac{a_{k+1}-a_k}{k}$.
Nu este necesară condiția $a_k\in\mathbb{N},k=\overline{1,n}$.

Manea Cosmin, Petrică Dragoș, G.M. nr.10/2009, L.S., 2009,
Concursul „Dan Barbilian", 2011

72*. Avem $\left[\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right]=\left[\dfrac{[a_1+a_2+\cdots+a_n]}{n}\right]\leq$

$$\leq\left[\frac{[a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n]+n-1}{n}\right]\leq\frac{[a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n]}{n}+\frac{n-1}{n}.$$

Pe de altă parte $\left[\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right]=\left[\dfrac{[a_1+a_2+\cdots+a_n]}{n}\right]\geq$

$$\geq\left[\frac{[a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n]}{n}\right]>\frac{[a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n]}{n}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\left[\frac{[a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n]}{n}\right]>[a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n]-n\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\left[\frac{[a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n]}{n}\right]\geq[a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n]-n+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{[a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n]}{n}\right]\geq\frac{[a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n]}{n}-\frac{n-1}{n},$$

de unde rezultă inegalitatea cerută.

Scanned with OKEN Scanner

73***. Utilizăm inegalitatea $[nx] \geq n[x] \Leftrightarrow [x] \leq \frac{[nx]}{n}$ (1).

Dacă notăm $x = \frac{\sum_{k=1}^{n^2} \sqrt{k}}{n}$ atunci din (1)rezultă a doua inegalitate, adică

$$\left[\frac{\sum_{k=1}^{n^2} \sqrt{k}}{n}\right] \leq \frac{\left[\sum_{k=1}^{n^2} \sqrt{k}\right]}{n}.$$

Pentru prima inegalitate, avem

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}[\sqrt{k}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1}[\sqrt{k}] + \frac{1}{n}[\sqrt{n^2}] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} i + 1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i(2i+1) + 1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(2i^2+i) + 1 =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{2(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{4n^2-3n+5}{6}.$$

Dar, cum $\left[\frac{\sum_{k=1}^{n^2} \sqrt{k}}{n}\right] = \left[\frac{2n^2+1}{3}\right]$ vezi ex. 56, Cap. 14 rezultă că trebuie să

arătăm că $\frac{4n^2-3n+5}{6} \leq \left[\frac{2n^2+1}{3}\right]$. Pentru $n \in \{1,2\}$ se verifică,

iar pentru $n \geq 3$ avem: $\left[\frac{2n^2+1}{3}\right] > \frac{2n^2+1}{3} - 1 \geq \frac{4n^2-3n+5}{6}$.

Ștefan Andrei

74**. Evident membrul drept se poate scrie:

$[[\alpha]x] + [x] + 1 = [[\alpha]x + [x] + 1]$.

Fie $\alpha = \frac{n}{p}, n, p \in \mathbb{N}^*, (n,p) = 1$ și fie $n = mp + r, 0 \leq r < p$ și

$\alpha = \frac{n}{p} = \frac{mp+r}{p} = m + \frac{r}{p} \Rightarrow [\alpha] = m \leq \alpha.$

Avem $x + \frac{k}{m+1} < x + \frac{kp}{mp+r} = x + \frac{k}{m+\frac{r}{p}} = x + \frac{k}{\alpha} \leq x + \frac{k}{m} \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Rightarrow \left[x+\frac{k}{m+1}\right] \le \left[x+\frac{k}{\alpha}\right] \le \left[x+\frac{k}{m}\right]$$

și $\sum_{k=0}^{n}\left[x+\frac{k}{m+1}\right] \le \sum_{k=0}^{m}\left[x+\frac{k}{\alpha}\right] \le \sum_{k=0}^{m}\left[x+\frac{k}{m}\right]$.

Utilizând identitatea lui Hermite, rezultă:

$$\sum_{k=0}^{n}\left[x+\frac{k}{m+1}\right] = [(m+1)x] = [[\alpha]x+[x]]$$

și $\sum_{k=0}^{n}\left[x+\frac{k}{m}\right] = [mx]+\left[x+\frac{m}{n}\right] = [[\alpha]x]+[x+1] =$

$= [[\alpha]x]+[x]+1 = [[\alpha]x+[x]+1]$.

M.O. Drîmbe

75***. Notăm $A = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2\}$ și suma devine

$$\sum_{k=1}^{n^2}\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right] - \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right] = \sum_{k=1,k\notin A}^{n^2}\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right] + \sum_{k=1,k\in A}^{n^2}\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right] - \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right] =$$

$$= \sum_{k=1,k\notin A}^{n^2}\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right] + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{\sqrt{k^2}}\right] - \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right] = \sum_{k=1,k\notin A}^{n^2}\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right] \ge n^2 - n.$$

Ultima sumă are n^2-n termeni, fiecare fiind partea întreagă a unui număr supraunitar.

Ch. Karanikolov

76*. $[x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n] = [x_2+2x_3+3x_4+\cdots+(n-1)x_n] =$

$= [-x_1+x_3+2x_4+\cdots+(n-2)x_n] \le 1+\big(1+2+3+\cdots+(n-2)\big) =$

$$= 1+\frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{n^2-3n+4}{2} \le \frac{n^2}{2}-1 < \left[\frac{n^2}{2}\right].$$

Ultima inegalitate ne dă: $-3n \le -6, \forall\, n \ge 2$.

77**. Din simetria relației se poate considera $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$. Din identitatea lui Lagrange ținând seama și de ipoteza

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \frac{1}{n}\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2 \le \frac{1}{n}\sum_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i),$$

unde $a_j - a_i \ge 0$ și subunitar pentru $1 \le i < j \le n$. Trebuie să arătăm că

$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i) \le \left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $n=2k, k\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \sum_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)=(2k-1)(a_{2k}-a_1)+$

$+(2k-3)(a_{2k-1}-a_2)+\cdots+(a_{k+1}-a_k)=k^2(a_{2k}-a_1)\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\le k^2=\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right].$

Dacă n este impar, $n=2k+1, k\in\mathbb{N}^*$, atunci

$\sum_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)=2k(a_{2k}-a_1)+(2k-2)(a_{2k}-a_2)+\cdots+2(a_{n+2}-a_n)\le$

$\le k(k+1)(a_{k+1}+a_1)\Rightarrow \sum_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\le k(k+1)=\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right].$

Dacă n este par $n=2k, k\in\mathbb{N}^*$, egalitatea din enunț are loc dacă $a_1=a_2=\cdots=a_k=\alpha<0$ și $a_{k+1}=a_{k+2}=\cdots=a_{2k}=\beta>0$ și $\beta-\alpha=1$ și $\beta+\alpha=0$, deci $\beta=\frac{1}{2}, \alpha=-\frac{1}{2}$.

Dacă n este impar, $n=2k+1, k\in\mathbb{N}^*$, egalitatea din enunț are loc pentru $a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}=\alpha<0$ și $a_{k+2}=a_{k+3}=\cdots=a_{2k+1}=\beta>0$ și $\beta-\alpha=1, (k+1)\alpha+k\beta=0$, respectiv $k\alpha+(k+1)\beta=0$, aşadar rezultă:

$$a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}=\frac{-k}{2k+1}, a_{k+2}=a_{k+3}=\cdots=a_{2k+1}=\frac{k+1}{2k+1},$$

respectiv $a_1=a_2=\cdots=a_k=-\frac{k+1}{2k+1}, a_{k+1}=a_{k+2}=\cdots=a_{2k+1}=$

$=\frac{k}{2k+1}$.

Marius Pachitariu, R.M., 2006

78*. Notând cu S membrul stâng al inegalității din enunț, avem:

$$S\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+(n-1)\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

79**. Fie $e_p=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^k}\right]$. Deoarece $[a]\le a$, rezultă

$$e_p\le\frac{n}{p}+\frac{n}{p^2}+\cdots+\frac{n}{p^k}=\frac{n}{p}\left(1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^{k-1}}\right)=\frac{n}{p-1}\left(1-\frac{1}{p^k}\right).$$

Din $n\ge p^k\Rightarrow 1-\frac{1}{p^k}\le 1-\frac{1}{n}$, deci $e_p\le\frac{n}{p-1}\left(1-\frac{1}{p^k}\right)=\frac{n-1}{p-1}$.

Dar, din $e_p\le\frac{n-1}{p-1}$ și e_p întreg rezultă $e_p\le\left[\frac{n-1}{p-1}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

Din teorema împărțirii $a = bq + r$, cu $0 \le r \le b - 1$, rezultă

$a = b\left[\frac{a}{b}\right] + r \le b\left[\frac{a}{b}\right] + b - 1$, de unde $\left[\frac{a}{b}\right] \ge \frac{a+1}{b} - 1$.

Vom avea $e_p \ge \frac{n+1}{p} - 1 + \frac{n+1}{p^2} - 1 + \cdots + \frac{n+1}{p^k} - 1 =$

$= \frac{n+1}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^{k-1}}\right) - k = \frac{n+1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{p^k}\right) - k.$

Iar din $n \le p^{k+1} - 1$ rezultă $1 - \frac{1}{p^k} \ge 1 - \frac{p}{n+1}$, deci

$e_p \ge \frac{n+1}{p-1}\left(1 - \frac{p}{n+1}\right) - k = \frac{n}{p-1} - (k+1).$

Deci $e_p \ge \frac{n}{p-1} - (k+1)$ (*).

Fiind dat un număr $\frac{a}{b}$, cel mai mic întreg $\ge \frac{a}{b}$ este $\left[\frac{a-1}{b}\right] + 1$.

Într-adevăr, dacă $b|a$, fie $a = bq$, acel întreg este q. Dar, din $a = bq$ avem $a - 1 = b(q-1) + b - 1$, de unde se vede că $q - 1$ este câtul împărțirii lui $a - 1$ la b, deci $q - 1 = \left[\frac{a-1}{b}\right]$ și $\left[\frac{a-1}{b}\right] + 1 = q$.

Dacă $b \nmid a$, fie $a = bq + r$, $r \ge 1$, acel întreg este $q + 1$. Dar, din $a - 1 = bq + r - 1$ se vede că q este câtul împărțirii lui $a - 1$ la b (fiindcă $r - 1 \ge 0$), deci $\left[\frac{a-1}{b}\right] = q$, de unde $\left[\frac{a-1}{b}\right] + 1 = q + 1$.

Din inegalitatea $e_p \ge \frac{n}{p-1} - (k+1)$ și conform raționamentului precedent, deducem $e_p \ge \left[\frac{n-1}{p-1}\right] + 1 - (k+1) = \left[\frac{n-1}{p-1}\right] - k$.

Observație

Inegalitățile din enunț rămân valabile și dacă p nu este prim, dar pentru p prim ele dau maximul și minimul exponentului e_p al numărului prin p în descompunerea canonică a lui $n!$

Maximul este atins pentru $n = p^k$, iar minimul pentru $n = p^{k+1} - 1$.

Ion Cucurezeanu

80.** Vom utiliza inegalitatea

$[nx] \ge \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \frac{[3x]}{3} + \cdots + \frac{[nx]}{n}$ și din exercițiul precedent avem

Scanned with OKEN Scanner

$$[nx]=\sum_{j=1}^{n}\frac{[jx]}{j}\geq\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left(\sum_{k=1}^{j}\frac{[kx]}{k}\right)=\sum_{1\leq k<j\leq n}\frac{[kx]}{kj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{[kx]}{kj}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{[kx]}{k}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}>\sum_{k=1}^{n}\frac{[kx]}{k}\ln\frac{n+1}{k},$$

unde s-a folosit inegalitatea $\frac{1}{k}>\ln\frac{k+1}{k}$, $\forall\, k\in\mathbb{N}^*$, deoarece

$$\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}>\sum_{j=k}^{n}\ln\frac{j+1}{j}=\ln\prod_{j=k}^{n}\frac{j+1}{j}=\ln\frac{n+1}{k}.$$

M.O. Drîmbe

81***. Soluția 1

Deoarece pentru orice $x\in\mathbb{R}$ și $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow[k+x]=k+[x]$, este suficient să demonstrăm relația pentru $x\in[0,1)$. Observăm că ambii membri ai inegalității sunt funcții crescătoare, constante pe porțiuni. Membrul drept al inegalității crește numai în puncte de forma $x=\frac{p}{q}$ (unde $(p,q)=1$), $2\leq q\leq n$.

Din acest motiv este suficient să demonstrăm inegalitatea numai în puncte de această formă. Pentru $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ aplicăm teorema împărțirii numerelor întregi pentru numerele kp și q, rezultă că există $a_k,b_k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $kp=a_kq+b_k$, $0\leq b_k<q$ și inegalitatea devine:

$$\left[\frac{np}{q}\right]>\sum_{k=1}^{n}\frac{\left[k\frac{p}{q}\right]}{k}\Leftrightarrow\left[\frac{np}{q}\right]\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{\left[\frac{a_kq+b_k}{q}\right]}{k}\Leftrightarrow\left[\frac{a_nq+b_n}{q}\right]\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k+\left[\frac{b_k}{q}\right]}{k}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\Leftrightarrow a_n\geq a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}.$$

Deoarece $(p,q)=1$, numerele $b_1,b_2,\ldots,b_{q-1}$ sunt numerele $1,2,\ldots,q-1$ în altă ordine.

$$\frac{1}{q-1}\left(b_1+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_{q-1}}{q-1}\right)\geq\sqrt[q-1]{\frac{b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_{q-1}}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot q-1}}=1$$

și evident

$$\frac{1}{q-1}\left(b_1+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_n}{n}\right)\geq\frac{1}{q-1}\left(b_1+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_{q-1}}{q-1}\right)\geq1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Putem scrie că $a_n+\frac{q-1}{q}\geq a_n+\frac{b_n}{q}=\frac{a_nq+b_n}{q}=\frac{np}{q}$.

Evident $a_k+\frac{b_k}{q}=\frac{a_kq+b_k}{q}=\frac{kp}{q}\Rightarrow\frac{a_k}{k}+\frac{1}{q}\cdot\frac{b_k}{q}=\frac{p}{q}$.

Însumând de la 1 la n obținem:

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}+\frac{1}{q}\left(b_1+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_n}{n}\right)=\frac{np}{q}$$

și din $a_n+\frac{q-1}{q}\geq\frac{np}{q}\geq a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}+\frac{1}{q}\left(b_1+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_n}{n}\right)\geq$

$$\geq a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}+\frac{1}{q}\left(b_1+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_{q-1}}{q-1}\right)\geq$$

$$\geq a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}+\frac{q-1}{q}\Rightarrow a_n\geq a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}.$$

Concurs S.U.A.

Soluția 2

Vom utiliza relația pentru șirul $a_k, k=\overline{1,n}$.

Dacă $a_i+a_j\leq a_{i+j}, (i,j\in\mathbb{N})\Rightarrow a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}<a_n$ $(*)$

și pentru șirul $[x],[2x],[3x],\ldots,[nx]$ și care verifică inegalitatea $[(i+j)x]\geq[ix]+[jx],([a+b]\geq[a]+[b])$;

prin urmare se aplică $(*)$ și rezultă inegalitatea din enunț.

S.U.A., 1988

82***. Prima inegalitate este cunoscută, vezi

$$\left[\sqrt[n]{x}\right]^n\leq\left[\left(\sqrt[n]{x}\right)^n\right]=[x]\text{ și }[x]\leq\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\left[\sqrt[n]{x}\right]^{n-k}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1+[x]\leq\left(1+\left[\sqrt[n]{x}\right]\right)^n$ care este adevărată, deoarece $\sqrt[n]{x}<1+\left[\sqrt[n]{x}\right]$,

$\left(1+\left[\sqrt[n]{x}\right]\right)^n>\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x\geq[x]\Rightarrow\left(1+\left[\sqrt[n]{x}\right]\right)^n\geq 1+[x]$.

83**. Observăm că expresia $E(x)=\{kx\}-\{x\}$ este periodică cu $T=1$, adică $E(x+1)=\{k(x+1)\}-\{x+1\}=\{kx\}-\{x\}=E(x)$ și prin urmare inegalitatea se reduce pe intervalul [0,1). Vom arăta

$$-\frac{k-1}{k}\leq\{kx\}-\{x\}<\frac{k-1}{k}\ (1),$$

de unde se deduce inegalitatea din enunț.

Pentru $x\in(0,1)$ există $p\in\{1,2,\ldots,-k\}$ astfel încât $\frac{p-1}{k}\leq x<\frac{p}{k}\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow p-1 \leq kx < p \Rightarrow [kx] = p-1 \Rightarrow \{kx\} = kx - [kx] = kx - (p-1).$

Prin urmare,

$\{kx\} - \{x\} = [kx] - x = kx - (p-1) - x = x(k-1) - (p-1)$ și

deci (1)este echivalentă cu $\frac{kp-2k+1}{k(k-1)} \leq x < \frac{kp-1}{k(k-1)}$, deoarece

$\left[\frac{p-1}{k}, \frac{p}{k}\right) \subset \left[\frac{kp-2k+1}{k(k-1)}, \frac{kp-1}{k(k-1)}\right).$

Prin urmare însumând în (1) rezultă

$$-\sum \frac{k-1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} (\{kx\} - \{x\}) < \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - n < \sum_{k=1}^{n} \{kx\} - n\{x\} <$$

$$< n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ (2) \left(\text{dar cum } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > ln(n+1) \right) \text{ inegalitatea (2) devine}$$

$\ln(n+1) - n \leq \sum_{k=1}^{n} \{kx\} - n\{x\} < n - \ln(n+1)$ care este tocmai

inegalitatea cerută.

Mihaly Bencze

84*.** Fie $k_i \geq \left[\frac{k}{n}\right], i = \overline{1,p}$ și $k_j < \left[\frac{k}{n}\right], j = \overline{p+1,n}.$

Evident, dacă $p = n$ inegalitatea se verifică.

Dacă $0 < p < n$, atunci există numerele naturale $l_1, l_2, \ldots, l_p$ astfel încât

$k_i = \left[\frac{k}{n}\right] + l_i, i = \overline{1,p}$ și numerele $m_j, j = \overline{p+1,n}$ astfel încât

$k_j = \left[\frac{k}{n}\right] - m_j, j = \overline{p+1,n}.$

Deci $k = \sum_{i=1}^{n} k_i = n\left[\frac{k}{n}\right] + \sum_{i=1}^{p} l_i - \sum_{j=p+1}^{n} m_j.$

Deoarece $n\left[\frac{k}{n}\right] \leq k$, avem că $\sum_{i=1}^{p} l_i \geq \sum_{j=p+1}^{n} m_j.$

Scriind expresia lui $k_i!$ și $k_j!$ obținem:

$k_i! = \left[\frac{k}{n}\right]!\left(\left[\frac{k}{n}\right]+1\right)\ldots\left(\left[\frac{k}{n}\right]+l_i\right), i = \overline{1,p}$ și

$$k_j = \left(\left[\frac{k}{n}\right] - m_j\right)! = \frac{\left[\frac{k}{n}\right]!}{\left(\left[\frac{k}{n}\right] - m_j + 1\right)\ldots\left(\left[\frac{k}{n}\right] - 1\right)\left[\frac{k}{n}\right]}, j = \overline{p+1, n}.$$

Prin urmare $k_1!\, k_2! \ldots k_n! = \left(\left[\frac{k}{n}\right]!\right)^n \frac{A}{B}$, unde A reprezintă produsul factorilor mai mari decât $\left[\frac{k}{n}\right]$, în număr de $\sum_{i=1}^{p} l_i$, iar B reprezintă produsul factorilor mai mici decât $\left[\frac{k}{n}\right]$, în număr de $\sum_{j=p+1}^{n} m_j$, $\left(\text{cel mai mare fiind } \left[\frac{k}{n}\right]\right)$, deci $\frac{A}{B} \geq 1$, de unde rezultă că $k_1!\, k_2! \ldots k_n! \geq \left(\left[\frac{k}{n}\right]!\right)^n$.

O.I.M. Cehoslovacia

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 16 | Şiruri

§ 1. Probleme de nivel mediu

1. Să se determine partea întreagă şi partea fracţionară a şirurilor:

a) $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

b) $b_n = \dfrac{n^3 - n}{6}$;

c) $c_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

d) $d_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

2. Să se arate că $E_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} - \left[\dfrac{n}{3}\right]$ este divizibil cu 3.

3. Să se determine partea întreagă şi partea fracţionară a numerelor

a) $x_n = \dfrac{n^3 + 3n^2 + 2n + 1}{3}$;

b) $y_n = \dfrac{n^3 - n + 2}{3}$;

c) $z_n = \dfrac{n^3 + 2n^2 + 4 - m}{3}$, $m \in \{1,2\}$.

4. Fie şirurile:

a) $a_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$;

b) $b_n = \dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3}$;

Se cere $[a_n]$, $[b_n]$.

c) $a_n = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$;

d) $b_n = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$;

e) Să se calculeze $[a_n]$, $[2a_n]$, $[b_n]$, $[b_n]$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 1, a_2 = 2$ și $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^2}{\left[\sqrt{a_n^2 + a_{n+1}}\right]} - \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine șirul a_n.

6*. Se consideră tabelul

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{1} & & \\ \sqrt{3}, & \sqrt{5} & \\ \sqrt{7}, & \sqrt{9}, & \sqrt{11} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

a) Să se determine numărul liniilor tabelului care au primul element un număr rațional;

b) Să se calculeze partea întreagă a primului element din linia 2008.

7.** Fie $a_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1}$ și $b_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$, $n \geq 1$. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*, \{a_n\} \neq \{b_n\}$.

8*. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_n = \left[\dfrac{n^2 + n - 5}{2}\right]$.

Determinați toate numerele naturale n pentru care numărul a_n este prim.

9. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $a_n = \left[\dfrac{n^3}{a_{n-1}}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ cu $a_1 = 1$.

Să se determine a_{999}.

10. Fie $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3 + 6k^2 + 9k + 1}{(k-1)! + k! + (k+1)! + (k+3)!}$.

Să se arate că șirul a_n este crescător și să se calculeze $[a_n]$ și $\{a_n\}$.

11. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât

$$a_n = 1 + \left[\frac{2^{p+2} + 2^2 + 1}{2^p + 1}\right] + \left[\frac{3^{p+2} + 3^2 + 1}{3^p + 1}\right] + \cdots + \left[\frac{n^{p+2} + n^2 + 1}{n^p + 1}\right],$$

unde $p \in \mathbb{N}^*$. Să se determine șirul $(a_n)_{n\geq 1}$.

12.** Să se arate că dacă $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1 + x_n}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

$$[x] + [x + x_n] + [x + 2x_n] + \cdots + [x + (n-1)x_n] \equiv [nx].$$

13.** Să se arate că termenii șirului: $a_n = 2n^2 + \left[\sqrt{4n^2 + n}\right] + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ pot fi scriși ca sumă de două pătrate perfecte.

Scanned with OKEN Scanner

14**. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin:

$a_{n+1} = \sqrt{1+(n+1)a_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine $[a_n]$, $a_1 \in (0,1)$.

15*. Se consideră şirul $x_{n+2} = [x_{n+1}] + \{x_n\}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1 = a$, $x_2 = b, a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine $[x_n]$.

16. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir definit astfel: $x_{n+1} = \sqrt{nx_n + x_{n-1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $x_1 = x_2 = 1$. Să se determine $[x_n]$.

17. Fie $x_1 = \sqrt{1997}$ şi $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1997}$. Să se determine mulţimea $[x_n], n \in \mathbb{N}^*$.

18. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = \sqrt{4n^4 + 4n^2 - 3}$.

Arătaţi că $\{a_n\} > \frac{1}{5}$.

19. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \frac{a_n + n}{a_n + 1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine numărul întreg a dacă

$\sqrt{n+a} < a_n < \sqrt{n+a+1}$, pentru $n \geq 3$;

b) Să se afle $[a_n^2], \forall\, n \geq 1$.

20. Fie un şir definit astfel:

$$a_n = \begin{cases} \frac{n^2+4}{4}, & \text{dacă } n \text{ par} \\ \frac{n^2+3}{4}, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}.$$

Să se arate că: $a_n = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$.

21. Fie şirul $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}, n \in \mathbb{N}^*$.

Să se determine $[a_n]$.

22. Să se arate că dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale nenule satisface proprietatea că $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ este pătrat perfect cel mult egal cu n^2, atunci şirul $b_n = \left[\frac{a_n}{n}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ este constant.

23*. Fie şirul $x_n = a^n + a^{-n}, n \in \mathbb{N}$ şi $a = 2 + \sqrt{3}$.

a) Arătaţi că există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$;

b) Arătaţi că $\{a^n\} = 1 - a^{-n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

24*. Fie şirul $a_n = \left[\sqrt{6n} + \frac{1}{8}\right], n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine valorile lui n pentru care $a_n = 72$.

Scanned with OKEN Scanner

25. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel:

$$a_1 = 1 \text{ și } \sqrt{a_{n+1}} = 2\left(\sqrt{\frac{a_1}{a_n}} + \sqrt{\frac{a_2}{a_n}} + \cdots + \sqrt{\frac{a_n}{a_n}}\right).$$

Dacă $b_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ să se determine $[b_n]$.

26.** Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 2$ și $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_n(n+2)}{3}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $\sum_{k=1}^{n} [\sqrt{a_k}] = \frac{a_n}{2}$.

27*. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ numere naturale, distincte și nenule. Să se calculeze partea întreagă a următoarelor sume: $[S_1]$, $[S_2]$, $[2S_2]$, unde:

a) $S_1 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}$;

b) $S_2 = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$.

28*. Fie șirul $a_n = \frac{n}{\sum\{\sqrt{4k^2 - 2k}\}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $[a_n] = 2$.

29*. Fie șirul $a_n = \sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}$.

a) Pentru ce $n \in \mathbb{N}^*$, a_n este rațional;

b) Pentru ce $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = [a_n]$ este divizibil cu 7.

§ 2. Probleme de nivel ridicat

30. Să se calculeze partea întreagă a șirurilor, unde fiecare șir conține n radicali, $n \geq 2$.

$$a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 \ldots \sqrt{2}}}};$$

$$b_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 \ldots \sqrt{6}}}};$$

$$c_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 \ldots \sqrt{3}}}};$$

Scanned with OKEN Scanner

$$d_n = \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6\ldots\sqrt[3]{6}}}};$$

$$e_n = \sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24\ldots\sqrt[3]{24}}}}.$$

31. Să se calculeze partea întreagă a şirurilor, unde fiecare şir conţine n radicali, $n \geq 2$.

$$a_n = \sqrt{1981+\sqrt{1981+\sqrt{1981\ldots\sqrt{1981}}}};$$

$$b_n = \sqrt{1995+\sqrt{1995+\sqrt{1995\ldots\sqrt{1995}}}};$$

$$c_n = \sqrt{2018+\sqrt{2018+\sqrt{2018\ldots\sqrt{2018}}}};$$

$$d_n = \sqrt{2025+\sqrt{2025+\sqrt{2025\ldots\sqrt{2025}}}}.$$

32. Să se calculeze partea întreagă a şirurilor, unde fiecare şir conţine n radicali.

$$a_n = \sqrt[4]{14+\sqrt[4]{14\ldots\sqrt[4]{14}}};$$

$$b_n = \sqrt[4]{78+\sqrt[4]{78\ldots\sqrt[4]{78}}};$$

$$c_n = \sqrt[5]{30+\sqrt[5]{30\ldots\sqrt[5]{30}}};$$

$$d_n = \sqrt[5]{1020+\sqrt[5]{1020\ldots\sqrt[5]{1020}}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

33*. Fie şirul $x_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}\ldots\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}\ldots\sqrt[3]{6}}}$.

Să se calculeze $[x_n]$.

34. Se consideră şirurile

$$a_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}\ldots\sqrt{3}}} + \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}\ldots\sqrt{6}}},$$

$$b_n = \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}\ldots\sqrt{12}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}\ldots\sqrt[3]{6}}},$$

$$c_n = \sqrt[3]{33+\sqrt[3]{33+\sqrt[3]{33}\ldots\sqrt[3]{33}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}\ldots\sqrt[3]{6}}}.$$

Unde, în fiecare şir, apar n radicali. Să se arate că $[a_n] = [b_n] = [c_n]$, $\forall\, n \geq 2$.

35*. Se consideră şirurile:

$$a_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}\ldots\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}\ldots\sqrt[3]{6}}},$$

$$b_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}\ldots\sqrt{2}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}\ldots\sqrt[3]{6}}}.$$

Să se arate că $[a_n] = 1 + [b_n]$.

36. Să se determine partea întreagă a şirului:

$$a_n = \sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{9}\ldots\sqrt{n^2}}}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

37*. Fie şirul $x_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}\ldots\sqrt{a}}}$, unde $a \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ şi unde x_n conţine n radicali. Se cere $[x_n]$.

Scanned with OKEN Scanner

38**. Fie $a_n = \sqrt{2! + \sqrt[3]{3! + \sqrt[4]{4! \ldots \sqrt[n]{n!}}}}$. Să se calculeze $[a_n], \forall\, n \geq 4$.

39**. Să se determine partea întreagă a şirurilor:

a) $a_n = \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{4 \ldots \sqrt[n]{n}}}, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$;

b) $b_n = \sqrt{1! + \sqrt{2! + \sqrt{3! \ldots \sqrt{n!}}}}$;

c) $c_n = \sqrt{1^1 + \sqrt{2^2 + \sqrt{3^3 \ldots \sqrt{n^n}}}}$.

40**. Să se determine partea întreagă a şirului:

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n^2}}, \forall\, n \geq 2.$$

41*. Fie $a_n = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2 \ldots \sqrt{2}}}} + \sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4 \ldots \sqrt[3]{4}}}}$ unde în fiecare termen se află n radicali.

a) Să se determine $[a_n]$;

b) Să se arate că $\{a_n\} \in \left(\frac{1}{1000}, 1\right)$;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

42**. Fie a, n numere naturale cel puţin egale cu 2, să se calculeze $[a_n]$, unde

$a_n = \sqrt[n]{a^n - a + \sqrt[n]{a^n - a + \cdots + \sqrt[n]{a^n - a}}}$ cu n radicali suprapuşi.

43***. a) Arătaţi că $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < \sqrt{n} + 1$.

b) Determinaţi partea întreagă a lui a_{2014}.

44*. Se consideră şirurile

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \text{ şi}$$

$$b_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \text{unde } n \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se arate că $[a_n] = [b_n]$;

b) Fie $c_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}$. Să se calculeze $[2c_n]$.

45***. Fie șirul $a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}\ldots\sqrt{n}}}$. Să se determine $[a_n]$.

46***. Să se calculeze partea întreagă a șirului $a_n = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}\ldots\sqrt{n}}}$, $n \in \mathbb{N}^*, \forall\, n \geq 4$.

47**. Fie șirurile $a_n = \sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\ldots$ și $b_n\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{2}}}}\ldots$, unde se consideră n radicali. Să se arate că $[a_n] = [b_n]$.

ϕ 3. Probleme de concurs

48***. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit de relația:

$$a_n = n + \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right], n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se descrie termenii șirului.

49***. Fie un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel

$$(a_n) = \left(1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,\ldots,\underbrace{m,m,\ldots,m}_{2m \text{ ori}},\ldots\right).$$

Să se determine termenul general al șirului.

50***. Fie șirul (a_n) definit astfel: fiecare număr natural de la 1 la m apare în modul următor de 2 ori 1, de 3 ori 2, ..., de $m+1$ ori numărul m, adică

$$(a_n) = \left(1,1.2,2,2,3,3,3,3,\ldots,\underbrace{m,m,\ldots,m}_{m+1 \text{ ori}}\right).$$

Să se determine termenul general al șirului.

51***. Fie șirul

$$(a_n) \equiv \{1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,\ldots\} = \begin{cases} 1, \text{dacă } n \text{ este pătrat perfect} \\ 0, \text{dacă } n \text{ nu este pătrat perfect} \end{cases}$$

Să se determine termenul general al șirului.

52***. Fie un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel:

$$(a_n) = \left\{1,3,3,3,5,5,5,5,5,\ldots,\underbrace{m,m,\ldots,m}_{m \text{ elemente}},\ldots\right\}.$$

Să se determine termenul general al șirului.

Scanned with OKEN Scanner

53*.** Fie un şir definit astfel:
Fiecare număr natural m, apare de m ori, adică

$$(a_n) = (1,2,2,3,3,3, \dots, m, m, m, \dots, m, \dots).$$

Să se determine termenul general al şirului.

54*.** Fie şirul format cu termeni egali cu 0 şi 1 definit astfel

$$(a_n) = (1,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0, \dots) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = \dfrac{k(k+1)}{2}, k \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{dacă } n \neq \dfrac{k(k+1)}{2}, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Să se determine termenul general al şirului.

55*.** Să se demonstreze că pentru orice termeni ai şirului definit prin $a_n = [n\sqrt{2}] + [n\sqrt{3}], n \in \mathbb{N}$, există o infinitate de numere pare şi o infinitate de numere impare.

56*.** Fie şirul strict crescător de numere naturale, definit astfel:
$(a_n) = (1,2,4,5,7,9,10,12,14,16 \dots)$, fiind format din grupele $\{1\}, \{2,4\}, \{5,7,9\}, \{10,12,14,16\}, \dots$, grupa K are k elemente în progresie aritmetică cu raţia $r = 2$.
Să se determine termenul general al şirului.

57*.** Fie şirul $(a_n) = \{1,2,3,5,7,10,13,17,21,26,31,37, \dots\}$, unde

$$a_{2m} - a_{2m-1} = a_{2m+1} - a_{2m} = m, \forall\, m \in \mathbb{N}^*.$$

Să se determine termenul general al şirului.

58*.** Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n = n + \left[\sqrt{n} + \dfrac{1}{2}\right]$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Să se descrie termenii şirului.

59*.** Să se arate că $a_n = n + \left[\sqrt{n} + \dfrac{1}{2}\right]$ este al n-lea termen al şirului crescător al numerelor naturale care nu sunt pătrate perfecte.

60*.** Fie 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, ... o secvenţă de numere naturale, care nu sunt pătrate perfecte (şirul s-a obţinut din şirul numerelor prin ştergerea pătratelor perfecte).

Să se arate că al n-lea termen este dat de relaţia relaţia $a_n = \left[n + \dfrac{1}{2} + \sqrt{n}\right]$.

61*.** Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care $a_n = [n\sqrt{2}]$ este o putere a lui 2.

62*.** Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, dat de $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n} + 2, \forall\, n \geq 1$.

Să se determine $[x_n]$.

Scanned with OKEN Scanner

63*. Fie $x_1 = 2$ și $x_{n+1} = 2x_n - 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[x_k]}$.

64*. Fie șirul $a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt[k^4+k^2+1]{k+1}$.

Să se demonstreze că $\{a_n\} < \frac{1}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

65*. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin

$$a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{5}{6} \text{ și } (n+1)a_{n+1} = (n-1)a_n, \forall\, n \geq 2.$$

Să se arate că $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 2, \forall\, n \geq 1$ și să se determine $[a_1 + a_2 + \cdots + a_n]$.

66*. a) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale, astfel încât $a_1 = a_2 = 1$ și $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{3^n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $[a_n] = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $n([a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n]) \leq [a_1 + a_2 + \cdots + a_n] +$
$+(n-1)([a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n]) \leq n[a_1 + a_2 + \cdots + a_n]$.

67*. Fie șirul $\{\sqrt{n^2+5n+9}\} + \{\sqrt{n^2+9n+18}\}$. Să se determine $[a_n]$.

68*. Dacă $x_n = \left[2 \sum_{k=n+1}^{2n} e^{\frac{1}{k}}\right]$ atunci arătați:

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k x_{k+1}} = \frac{n}{3(2n+3)}$;

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k x_k} = \frac{2(2n-1)}{2n+1}$.

69*. Fie șirul $a_n = \sqrt{1+\frac{1}{2!}} + \sqrt{1+\frac{2}{3!}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n-1}{n!}} + \sqrt{1+\frac{1}{n!}}$.

Să se calculeze $[a_n]$.

70*. Fie șirul $a_n = \left[\frac{1}{\left(arctg\frac{1}{n}\right)^2}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că pentru orice n și $k \in \mathbb{N}^*$, avem egalitățile:

a) $a_{n^k} = (a_n)^k$;

b) $\sqrt{a_n} + \sqrt{a_k} = \sqrt{a_{n+k}}$.

Scanned with OKEN Scanner

71*. Fie $a_k = \left[\frac{1}{\left(arctg\frac{1}{k}\right)^2}\right]$. Să se determine $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{a_k a_{k+1}}$.

72*. Pentru fiecare număr $a \in (0,1)$ definim şirul:

$$x_1 = \{2a\}, x_2 = \{2x_1\}, x_3 = \{2x_2\}, \dots, x_9 = \{2x_8\}.$$

Să se determine valorile lui a pentru care $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 1022a$.

73*. Fie $p \in \{0,1,2,3, \dots, n-1\}$ un număr dat.

Determinaţi toate valorile $n \in \mathbb{N}$ pentru care

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{arctg\frac{1}{\sqrt{k}}}\right)^2\right] = p + \frac{n(n+1)}{2}.$$

74*. Fie a un număr real. Arătaţi că şirul cu termenul general $x_n = (-1)^{[na]}, n \in \mathbb{N}$, este periodic dacă şi numai dacă a este raţional.

75*. Demonstraţi că pentru orice număr raţional $\alpha \in (0,1)$, se poate găsi un segment care nu conţine niciun termen al şirului $a_n = \{\alpha n\}, n \in \mathbb{N}^*$.

76*. Demonstraţi că pentru orice α iraţional, orice interval din $[0,1]$ conţine termeni ai şirului $a_n = \{\alpha n\}, n \in \mathbb{N}^*$.

77*. Demonstraţi că orice interval din $[0,1]$ conţine termeni ai şirului $a_n = \{\lg n\}, n \in \mathbb{N}^*$.

78*. Demonstraţi că orice interval din $[0,1]$ conţine termeni ai şirului $a_n = \{\sqrt{n}\}, n \in \mathbb{N}^*$.

79*. Demonstraţi că pentru orice număr natural $q \geq 2$ există un număr iraţional α, astfel încât orice interval $[a,b] \subset [0,1]$ conţine cel puţin şi un termen al şirului $a_n = \{\alpha q^n\}, n \in \mathbb{N}^*$.

80*. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \sqrt{4-2x_n}, x_0 = \frac{3}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

a) Să se demonstreze că $x_{2n+1} < \sqrt{5}-1$ şi $x_{2n} > \sqrt{5}-1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

b) Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$;

c) Să se determine $[x_n]$.

81*. Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ definite prin $a_n = [n\pi]$ şi $b_n = \{n\pi\}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că pentru fiecare $k \geq 3$ şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ conţin fiecare k termeni în progresie aritmetică.

82*. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 6$ şi $a_{n+1} = \left[\frac{5}{4}a_n + \frac{3}{4}\sqrt{a_n^2 - 12}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că $a_n \equiv 1\ (mod 10), \forall\, n \geq 2$.

Scanned with OKEN Scanner

83*. Fie $a_1 = 1997$ și $a_{k+1} = a_k - \frac{1}{a_k + 3}, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $a_{1996} > 1996$;

b) Să se determine numărul termenilor din șir pentru care $[a_k] = 1996$.

84*. Fie șirul $a_1 = \frac{1}{6}$ și $(n+3)a_{n+1} = (n+1)\left(a_n + \frac{1}{2}\right), \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n} [a_k]$.

85*. Demonstrați că numărul lui Fibonacci verifică egalitatea:

$$F_n = \left[\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right], \text{unde } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, n \in \mathbb{N}^*.$$

86*. Să se determine toate numerele reale r pentru care au loc relațiile

$$\left[\frac{r+1}{2}\right] = \left[\frac{r+2}{3}\right] = \left[\frac{r+3}{4}\right] = \cdots = \left[\frac{r+n-1}{n}\right] = \left[\frac{r+n}{n+1}\right] = \cdots.$$

87*. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un șir de numere reale definit prin $a_0 \in (0,1)$ și

$$a_{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a_n = 0 \\ \left\{\frac{n+1}{a_n}\right\}, & \text{dacă } a_n \neq 0 \end{cases}.$$

Arătați că $a_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ șirul nu are termeni nuli.

88*. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + n}{a_n + n}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Să se calculeze $[S_n]$, unde $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

89*. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, unde $a_1 = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$,

$$a_{n+1} = a_n(1 + a_1 + a_1^2 + \cdots + a_1^n), \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Notăm $S = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{a_{k+1}}$. Aflați $[S]$.

90*. Să se arate că șirul $a_n = [n\sqrt{2}], n \in \mathbb{N}$ conține o infinitate de pătrate perfecte.

91*. Determinați $x \in \mathbb{R}$, astfel încât șirul $a_n = \{x2^n\}$ să fie monoton pe $\mathbb{N}$.

92*. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $x_1 = 3$ și $x_{n+1} = [x_n\sqrt{2}]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Determinați toate valorile $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care x_n, x_{n+1}, x_{n+2} sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Scanned with OKEN Scanner

93***. Fie $x_1 = 4$ şi $x_{n+1} = \left[\sqrt[3]{2}x_n\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât termenii x_n, x_{n+1}, x_{n+2} să formeze o progresie aritmetică. Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$.

94***.Demonstraţi că în şirul $\left[n\sqrt{2}\right]_{n\geq 1}$ se găsesc o infinitate de puteri ale lui 2.

95***. Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, în $a_n = \left[n\sqrt{2}\right], n \in \mathbb{N}$ conţine o infinitate de multipli ai lui k.

96***. Să se determine $a_0 \in \mathbb{R}$ pentru care şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_{n+1} = [a_n] \cdot \{a_n\}$ este periodic.

97***. Găsiţi toate valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$pentru care $\{\sqrt{n}\} + \{\sqrt[3]{n}\} \geq \frac{2}{n}$.

98***. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir cu $a_n > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi pentru care $a_n^2 < a_n - a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $[na_n] \equiv 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

99***. Fie $\alpha > 1$ un număr real neîntreg şi fie şirul $a_n = [\alpha^{n+1}] - \alpha[\alpha^n]$. Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este neperiodic.

100***. Fie numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$.
Arătaţi că dacă $[na_1] + [na_2] + \cdots + [na_k] = [na_{k+1}], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a_{k+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

101***. Fie $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $a_n = \{n\alpha\}$ şi definim şirul $x_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \ldots (a_{n+1} - a_n)$. Să se arate că $|x_n|$ poate fi oricât de apropiat de zero (sau $|x_n| \to 0$).

102***. Fie mulţimea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots\}$, unde $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \sqrt{a_n + n^2}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $A_n \cap \mathbb{Q} = \{1\}$;

b) Să se calculeze $[a_n]$;

c) Să se calculeze $S_1 = \sum_{k=1}^{n} [a_k^2]$ şi $S_2 = \sum_{k=1}^{n} [a_k]^2$.

103***. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere pozitive cu $x_1 = 1$ care verifică egalitatea

$$\left[\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}}\right] = \left[\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + 1}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că şirul $z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$ este nemărginit.

104***. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_0 = a \geq 1$ şi $x_n = \frac{n+1}{n} x_{n-1} - \left\{\frac{x_{n-1}}{n}\right\}$.

a) Să se determine termenul general al şirului;

b) Să se calculeze $S_n = [x_0] + \left[\frac{x_1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{x_{n-1}}{n}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

105*. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n^3} - 1, a_0 \in [0, \sqrt{2}]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Să se determine $[a_n]$.

106*. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{2 + a_n}, a_0 = 2012, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $[a_n] = 2012 - 2n, \forall\, n \in \{0,1,2, \ldots, 336\}$.

107*. Fie șirul de numere naturale $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin

$$x_1 = 2, x_n = \left[\frac{3x_{n-1}}{2}\right].$$

Demonstrați că șirul $y_n = (-1)^{x_n}$ nu este periodic.

108*. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1 = 2, x_n = \left[\dfrac{3x_{n-1}}{2}\right]$.

Să se demonstreze că printre termenii șirului există:

a) o infinitate de termeni impari;

b) o infinitate de termeni pari.

109*. Fie $a \in \mathbb{N}^*$ și $a_1 > 0$. Să se demonstreze că printre primii m termeni ai șirului definit prin relația de recurență:

$$a_{n+1} = a_n\sqrt{1 + a^2} + a\sqrt{1 + a_n^2}$$

există cel puțin $\left[\dfrac{m}{3}\right]$ numere iraționale.

110*. Fie un șir $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere reale cu $x_0 = 1$ și $x_{n+1} = \dfrac{3x_n + \sqrt{5x_n^2 - 4}}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Să se determine $[x_n]$.

111*. Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este definit prin $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \left[\sqrt{a_n} + \dfrac{1}{2}\right]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine $n < 2013$, pentru care a_n este pătrat perfect.

112*. Fie x un număr real. Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm numărul $a_n = [nx]$. Arătați că x este număr întreg dacă și numai dacă șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

113*. Fie x un număr real. Arătați că șirul $(\{nx\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton dacă și numai dacă $x \in \mathbb{Z}$.

114*. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ dat de relația $x_0 \in [0,1)$,

$$x_n = \begin{cases} 2x_{n-1}, & \text{dacă } 2x_{n-1} < 1 \\ 2x_{n-1} - 1, & \text{dacă } 2x_{n-1} \geq 1 \end{cases}$$

Determinați numărul șirurilor pentru care $x_0 = x_5$.

115*. Determinați numărul valorilor diferite din șirul finit

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right], \left[\frac{2^2}{1980}\right], \ldots, \left[\frac{1980^2}{1980}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

116***. Se consideră şirul finit ai cărui termeni sunt:

$$b_k = \left[\frac{k^2}{1998}\right], k = 1,2,\dots,1997.$$

Câţi termeni distincţi are acest şir?

117***. Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ şi numerele $x_k = [0,1], k = \overline{1,n}$. Să se demonstreze că:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n - (x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1) \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Când are loc egalitatea?

118***. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$[x_1] = n, [x_2] = n + 1, \dots, [x_n] = 2n - 1.$$

a) Aflaţi câte valori poate lua $[S] = [x_1 + x_2 + \cdots + x_n]$;

b) Determinaţi numărul n dacă valoarea maximă posibilă a lui $[S]$ este 39.

119***. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că numerele

$$a_n = [\sqrt{n}] \text{ şi } b_n = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]$$

au aceeaşi paritate.

120***. Fie şirul $a_n = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că $a_n = a_{n-1} + 2$, dacă şi numai dacă n este număr prim.

121***. Fie şirurile $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, care satisfac relaţiile de recurenţă

$$u_{n+1} = 3u_n + 4v_n, v_{n+2} = 2u_n + 3v_n, u_1 = 3, v_1 = 2.$$

Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$, unde $x_n = u_n + v_n$, $y_n = u_n + 2v_n$.

Să se demonstreze că $y_n = [x_n\sqrt{2}], \forall\, n \in \mathbb{N}$.

122***. Să se determine numerele naturale n pentru care numărul $a_n = n + 4^{[\sqrt{n}]} + 3$ este pătrat perfect.

123***. Fie a şi b două numere reale strict pozitive. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel: pentru orice n x_n reprezintă suma cifrelor în baza 10 a numerelor $[an + b]$.

Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ conţine un subşir constant.

124***. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \left[\frac{a_n}{n}\right] + 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine a_{1997}.

125***. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin relaţia de recurenţă

$$a_{n+1} = \left[\sqrt[3]{a_n + n}\right]^3, n \in \mathbb{N}^*, a_1 = 0.$$

a) Să se determine termenul general al şirului;

b) Să se determine valorile lui n pentru care $a_n = n$.

Scanned with OKEN Scanner

126***. Fie $x_n = \{3^n a\}$.

Să se determine $a \in (0,1)$ astfel încât $x_{3n} \in \left(0, \frac{1}{3}\right), x_{3n+1} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $x_{3n+2} \in \left(\frac{2}{3}, 1\right), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

127***. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir cu proprietatea că $a_1 > 0$ și $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că există un număr natural nenul n_0 astfel încât $[a_n] = n, \forall\, n \geq n_0$.

128***. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n}$.

Să se demonstreze că pentru $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$ are loc egalitatea $[a_n^2] = n$.

129***. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere naturale și fie $0 < a < 1$ un număr real. Definim șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel:

$$x_0 = a, x_{n+1} = \left\{\frac{a_{n+1}}{x_n}\right\}, \text{dacă } x_n \neq 0 \text{ și } x_{n+1} = 0, \text{dacă } x_n = 0.$$

Să se găsească valorile posibile ale lui a pentru care șirul devine la un moment dat constant egal cu zero.

130***. Să se arate că numărul $a_n = n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$ este al n-lea termen al șirului crescător al numerelor naturale care nu sunt pătrate perfecte.

131***. Notăm cu p_n al n-lea număr prim, ($p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \ldots$). Să se determine partea întreagă a numărului $12S_n$, unde

$$S_n = \frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_2 p_3} + \cdots + \frac{1}{p_n p_{n+1}}, n \in \mathbb{N}^*.$$

132***. Fie șirul $a_n = \left[\frac{3^n}{n}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că prin împărțirea lui 3^{2^n} la 2^n se obține un cât par;

b) Să se arate că șirul este o infinitatea de termeni divizibili la 3 și o infinitate de termeni divizibili cu 5.

133***. Se consideră numerele raționale pozitive $q_1, q_2, \ldots, q_{2012}$ cu suma egală cu 1. Pentru fiecare număr natural, considerăm numărul

$$a_n = \{nq_1\} + \{nq_2\} + \cdots + \{nq_{2012}\}.$$

Determinați cel mai mare element al mulțimii $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

134***. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin: $a_n = n + \left[\frac{b}{n}\right]$, unde $b \in \mathbb{N}$ – parametru. Demonstrați că $\min_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = \left[\sqrt{4b+1}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

135***. Fie şirul $a_n = \left[\sqrt{(n+1)^2 + n^2}\right]$.

a) Să se arate că există o infinitate de numere naturale pentru care $a_{n+1} - a_n > 1$;

b) Să se arate că există o infinitate de numere naturale pentru care $a_{n+1} - a_n = 1$.

136**. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3} - \sqrt{1\cdot 4}} + \frac{1}{\sqrt{4\cdot 5} - \sqrt{3\cdot 6}} + \\ + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)} - \sqrt{(2n-1)(2n+2)}}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Să se determine $\left[\sqrt{a_n}\right]$.

137**. Fie $m \in \mathbb{N}^*, x_1 = \sqrt{m(m+1)}$ şi $x_n = \sqrt{m(m+1) + x_{n-1}}, \forall\, n \in \mathbb{N}^* - \\ -\{1\}$. Arătaţi că $[x_n] = m, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

138***. Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = y_1 = \sqrt{3}, x_{n+1} = x_n + \\ + \sqrt{1 + x_n^2}$ şi $y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Arătaţi că $[x_n y_n] = 2, \forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

139***. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_1 = \frac{1}{3}$ şi $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{2n+3}$,

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} \in \left[\frac{1}{15}, \frac{1}{7}\right]$.

140***. Să se determine numărul maxim de termeni distincţi ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă:

$$x_{n+1} = [x_n] - x_{n-1}, x_0 > 0, x_1 > 0.$$

141***. Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat şi şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit astfel:

$$x_{n+1} = 2\left[\frac{x_n}{3}\right], x_0 = a, \forall\, n \geq 0$$

Arătaţi că există un rang n_0 şi un număr $l \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_m = l, \forall\, m \in \mathbb{N}$ cu $n \geq n_0$.

142***. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \left[\frac{a_n}{2}\right] + 1009$.

a) Arătaţi că $a_n < 2018, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

b) Determinaţi a_{131}.

143***. Să se determine în mod explicit termenul general al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ ştiind că $x_n = 0 \Leftrightarrow n = 0$ şi $x_{n+1} = x^2_{\left[\frac{n+3}{2}\right]} + (-1)^n x^2_{\left[\frac{n}{2}\right]}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

144***. Să se determine şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ ştiind că $a_0 = 0$ şi $a_n - a_{\left[\frac{n}{k}\right]} = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

145***. Fie $m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ și șirul de numere $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care verifică relațiile: $a_0 = 0, a_n = \left[\frac{n}{m}\right] + a_{\left[\frac{n}{m}\right]}$.
Să se determine șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

146***. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(a-1)^2 < b < a^2$ și fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relația de recurență $x_{n+1} = ax_n + \left[x_n\sqrt{b}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}, x_0 \in \mathbb{N}^*$.
Arătați că există $p, q \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_{n+1} = px_n - qx_{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

147***. Arătați că șirul definit prin $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = a_n + a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ conține o infinitate de termeni divizibili cu 7.

148***. Fie $a_1 \in \mathbb{N}$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$a_{n+1} = \frac{1}{n}(|a_n - 1| + |a_n - 1| + \cdots + |a_n - n|).$$

Știind că există $k \in \mathbb{N}^*, k \geq 5$, astfel încât $[2a_k] = k$, să se arate că $a_{k+1} < a_k$.

149***. Se consideră șirurile de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ care verifică relațiile: $a_0 = 2, b_0 = -1$ și $a_{n+1} = a_n + b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $b_{n+1} = a_n + a_n - \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Să se determine $[a_n]$ și $[a_n]$.

§ 4. Probleme propuse

150. Fie șirul $a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1,n}$ astfel încât $\prod_{k=1}^{n} a_k = 1$ și $\sum_{k=1}^{n} \{a_k\} = 1$.
Să se arate că $\sum_{k=1}^{n} \{a_k^m\} = 1$, pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$.

151. Fie $x > 1$ și $a_n = [x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1]$.
a) Determinați $x > 1$, pentru care $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$;
b) Determinați $x > 1$, pentru care $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$.

152. Fie șirul $a_n = [a^n]$.
a) Determinați $a \geq 1$, astfel încât șirul să fie o progresie aritmetică;
b) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică pentru toți $n \geq 1$.

153**. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir definit astfel:
$a_1 = 1$ și $a_{n+1} = a_n + \left[\sqrt{a_n}\right]$. Să se arate că a_n este pătrat perfect, dacă și numai dacă $n = 2^k + k - 2, k \in \mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

154***. Fie funcţia $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*, f(n)=n+[\sqrt{n}]$.
Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$, şirul $m, f(m), f^2(m), f^3(m), \ldots$ conţine cel puţin un pătrat perfect (unde $f^k(m)=\left(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{k \text{ ori}}\right)(m)$.

155***. Fie şirul $a_n=\frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right]\right)$.
Arătaţi că $a_{n+1}>a_n$ pentru o infinitate de valori ale lui n şi verificaţi dacă $a_{n+1}<a_n$ tot pentru o infinitate de valori ale lui $n\in\mathbb{N}^*$.

156. Fie şirul definit prin $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}, a_1>0$.
Să se arate că există un număr natural n_0 astfel încât $[a_n]=n, \forall\, n\geq n_0$.

L. Panaitopol, G.M. nr. 5/1997

Scanned with OKEN Scanner

soluții 16 | Șiruri

ϕ 1. Probleme de nivel mediu

1. a) Cum $a_n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow [a_n] = a_n$, întrucât $n(n+1) \vdots 2$ și $\{a_n\} = 0$;

b) $b_n \in \mathbb{N} \Rightarrow [b_n] = b_n$, întrucât $n_3 - n \vdots 6$ și $\{b_n\} = 0$;

c) $c_n \in \mathbb{N} \Rightarrow [c_n] = c_n$, întrucât $n(n+1)(2n+1) \vdots 6$ și $\{c_n\} = 0$;

d) Evident $n(n+1)(n+2)(n+3) = 4p, p \in \mathbb{N}^*$, deci $d_n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow [d_n] = d_n$ și $\{d_n\} = 0$;

2. Se consideră $n = 3k + r, k \in \mathbb{Z}, r \in \{0,1,2\}$.

3. Avem a) $x_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} + \dfrac{1}{3}$ și cum $n(n+1)(n+2) \vdots 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x_n] = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ și $\{x_n\} = \dfrac{1}{3}$;

b) $y_n = \dfrac{n(n-1)(n+1)}{3} + \dfrac{2}{3} \Rightarrow [y_n] = \dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}$ și $\{y_n\} = \dfrac{2}{3}$;

c) $z_n = \dfrac{n^3 + 2n^2 + n - 1}{3} = \dfrac{n(n+1)^2 - m}{3}, n \in \{3k, 3k+2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow z_n \in \mathbb{Z}$, și $[z_n] = \dfrac{n(n+1)^2}{3}$ și $\{z_n\} = \left\{\dfrac{-m}{3}\right\} = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, & m = 1 \\ \dfrac{1}{3}, & m = 2 \end{cases}$.

Pentru $n = 3k+1 \Rightarrow z_n = \dfrac{(n-1)(n^2+3n+4)}{3} + \dfrac{4-m}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow [z_n] = \dfrac{(n-1)(n^2+3n+4)}{3}, \{z_n\} = \left\{\dfrac{4-m}{3}\right\} = \left\{\dfrac{1-m}{3}\right\} = \begin{cases} 0, & m = 1 \\ \dfrac{2}{3}, & m = 2 \end{cases}$.

4. a) Avem $a_n = 1 + x_n$, $x_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ și $x_n \in (0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow [x_n] = 0 \Rightarrow [a_n] = [1 + x_n] = 1 + [x_n] = 1$;

b) Analog, $b_n = 1 + y_n$, $y_n = \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3}$; se arată că

$y_n \in \left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}\right) \Rightarrow [b_n] = [1 + y_n] = 1 + [y_n] = 1$.

Într-adevăr $\dfrac{1}{k^3} < \dfrac{1}{k^3 - k} = \dfrac{1}{k(k-1)(k+1)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(k-1)k} - \dfrac{1}{k(k+1)}\right] \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow \frac{1}{2^3} < \sum \frac{1}{k^3} < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}\right] < \frac{1}{4} - \frac{1}{n(n-1)} < \frac{1}{4}$ și $\frac{1}{8} < y_n < \frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow [y_n] = 0;$

c) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} =$
$= 1 - \frac{1}{n+1} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq a_n < 1 \Rightarrow [a_n] = 0$ și $\{a_n\} = a_n \Rightarrow 1 \leq 2a_n < 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow [2a_n] = 1;$

d) $b_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq b_n < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow [b_n] = 0$ și $\{b_n\} = b_n$ și $1 \leq 2b_n < 2 \Rightarrow [2b_n] = 1.$

5. Se deduce că $a_1 = 3$ și prin inducție de deduce că $a_n = n.$

Presupunem că $a_k = k$ și $a_{k+1} = k+1 \Rightarrow a_{k+2} = \frac{(k+1)^2}{\left[\sqrt{k^2+k+1}\right]} - \frac{1}{k} =$
$= \frac{k^2+2k+1-1}{k} = k+2.$

6*. a) Linia n începe cu $a_0 = \sqrt{n^2-n+1}$ și este număr rațional numai pentru $n = 1$. Așadar toate liniile cu excepția primei linii încep cu un număr irațional.

b) $n-1 < \sqrt{n^2-n+1} < n,\ \forall n \geq 2 \Rightarrow [a_n] = n-1, [a_{2008}] =$
$= 2007.$

O.L. Caraș-Severin, 2008

7.** Presupunem prin absurd că $\{a_n\} = \{b_n\}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n - [a_n] = b_n - [b_n] \Rightarrow a_n - b_n = [a_n] - [b_n] \in \mathbb{Z}.$
Dar $a_n - b_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right] =$
$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ absurd.
$\frac{1}{2} = n \cdot \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < n \cdot \frac{1}{n+1} < 1.$

Gh. Stoica, R.M., 2008

8*. Vom considera cazurile n par și n impar.

Dacă $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$, atunci $a_{2k} = \left[\frac{4k^2+2k-5}{2}\right] = 2k^2 + k - 3 =$
$= (k-1)(2k+3).$

Pentru ca a să fie prim $\Leftrightarrow k-1=1 \Rightarrow k=2$ și $2k+3=7 \Rightarrow a_4=7$ și $n=4$.

Dacă $n=2k+1 \Rightarrow a_{2k+1}=(2k-1)(k+2)=$ prim $\Rightarrow 2k-1=1 \Rightarrow k=$ $=1 \Rightarrow a_3=3$ și $n=3 \Rightarrow a_n \in \{3,7\}$, pentru $n \in \{3,4\}$.

Concurs R. Moldova, 2014

9. Putem afla $a_1=1, a_2=8, a_3=3, a_4=21, a_5=6, a_6=43, a_7=7$.

Observăm că termenii cu indice impar sunt impari $a_1=1$, $a_3=3$, $a_5=6$, $a_7=7$. Arătăm că $a_n=n, n$ impar.

Într-adevăr $a_{n+1}=\left[\frac{(n+1)^3}{a_n}\right]=\left[\frac{(n+1)^3}{n^2}\right]=n^2+3n+3$

și $a_{n+2}=\left[\frac{(n+2)^3}{a_{n+1}}\right]=\left[\frac{n^3+6n^2+12n+8}{n^2+3n+3}\right]=$

$=n+\left[\frac{3n^2+9n+8}{n^2+3n+3}\right]=n+3+\left[-\frac{1}{n^2+3n+3}\right]=n+2.$

Prin urmare $a_{999}=999$.

HMMT, 2003

10. Avem $(k-1)!+k!+(k+1)!+(k+2)!+(k+3)!=$

$=(k-1)!\,(k+1)(k^3+5k^2+9k+1)$,

deci $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!\,(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)=$

$=1-\frac{1}{(n+1)!}$, de unde rezultă că a_n este crescător cu $[a_n]=0$ și

$\{a_n\}=1-\frac{1}{(n+1)!}$.

Costin Zălog

11. Se deduce $\left[\frac{k^{p+2}+k^2+1}{k^p+1}\right]=k^2, k=\overline{1,n}$.

Prin urmare $a_n=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

12.** Se deduce ușor (inducție) că $x_n=\frac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, deci relația dată este echivalentă cu identitatea lui Hermite.

Mihaly Bencze, R.M.T., 1998

13.** Avem $4n^2<4n^2+n<(2n+1)^2 \Rightarrow 2n<\sqrt{4n^2+n}<2n+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\sqrt{4n^2+n}\right]=2n$ deci $a_n=2n^2+2n+1=(n+1)^2+n^2$.

Scanned with OKEN Scanner

14**. Prin inducție se deduce că $x_{2n-1} = x_1 = a$ și $x_{2n} = x_2 = b \Rightarrow$
$\Rightarrow [x_{2n-1}] = [a]$ și $[x_{2n}] = [b]$, deci $[x_n] = \begin{cases} [a], & n \text{ impar} \\ [b], & n \text{ par} \end{cases}$.

Rodica Trif, O.L., 1995, Cluj

15*. $a_2 = \sqrt{1+2a_1} \Rightarrow a_2 \in (1, \sqrt{3}) \subset (1,2)$. Prin inducție se deduce că $n-1 < a_n < n$. Într-adevăr $n^2 - 1 < (n+1)a_n < n^2 + n \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 < 1 + (n+1)a_n < n^2 + n + 1 \Rightarrow n < a_{n+1} < n+1$.
Prin urmare $[a_n] = n - 1$.

Constantin Caragea

16. $x_3 = \sqrt{2x_2 + x_1} = \sqrt{3}, x_4 = \sqrt{3x_3 + x_2} = \sqrt{3\sqrt{3}+1}$.
Avem $1 \le x_3 < 2, [x_3] = 1,\ 2 < x_4 < 3 \Rightarrow [x_4] = 2$.
Presupunând că $n-2 < x_4 < n-1$ și $n-3 < x_{n-1} < n-2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (n-1)^2 < n^2 - n - 3 < nx_n + x_{n-1} < n^2 - 2 < n^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n - 1 < x_{n+1} < n \Rightarrow [x_n] = n - 2, \forall\, n \ge 3$.

Constantin Caragea

17. Rezultă $[x_1] = 44, [x_2] = 45$ și cum șirul $(x_n)_{n\ge1}$ este strict crescător vom arăta că $[x_n] = 45, \forall\, n \ge 2$.
Presupunând că $45 \le x_n < 46 \Rightarrow 45 + 1997 \le x_n + 1997 < 1997 + 46 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2042 \le x_n + 1997 < 2043 \Rightarrow \sqrt{2042} \le \sqrt{x_n + 1997} < \sqrt{2043} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{2042} \le [x_{n+1}] \le \sqrt{2043} \Rightarrow 45 \le [x_{n+1}] \le 45 \Rightarrow [x_{n+1}] = 45$.
Prin urmare $[x_n] = \{44,45\}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, G.M. nr. 3/1992

18. Avem $(2n^2)^2 < 4n^4 + 4n^2 - 3 < (2n^2+1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2n^2 < \sqrt{4n^4 + 4n^2 - 3} < 2n^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{4n^4 + 4n^2 - 3} = 2n^2$, deci
$\{a_n\} = a_n - [a_n] = \sqrt{4n^4 + 4n^2 - 3} - 2n^2 > \frac{1}{5}$, care se verifică cu ușurință.

V. Gorcea, O.L., Cluj

19. a) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = \frac{3}{2}\sqrt{3+a} < a_3 < \sqrt{3+a+1} \Rightarrow a = -1 \in \mathbb{Z}$
și apoi se demonstrează prin inducție;
b) Deci $\sqrt{n-1} < a_n < \sqrt{n} \Rightarrow n - 1 < a_n^2 < n \Rightarrow [a_n^2] = n - 1, \forall n \ge 3$.
Prin urmare $[a_n^2] = \begin{cases} 1, & n \in \{1,2\} \\ n-1, & n \ge 3 \end{cases}$.

Laurențiu Panaitopol, Concursul aritmetică – „Modus Vivendi", 2007

20. Evident se consideră cazurile $m = 2m, n = 2m + 1$.

21. Evident $a_n < \frac{2n+1}{n+1} < 2$, deci $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{4}{x+y}, \forall x, y > 0, x \ne y$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1}>\frac{2}{2n+1}, \frac{1}{n+2}+\frac{1}{3n}>\frac{2}{2n+1}, \ldots,$
$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}>\frac{2}{2n+1}$ și $\frac{1}{2n+1}\geq\frac{1}{2n+1}\Rightarrow a_n>1\Rightarrow 1<a_n<2\Rightarrow$
$\Rightarrow [a_n]=1.$
Se poate proceda și prin inducție.

22. Avem $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \ldots, a_1+a_2+\cdots+a_n$ pătrate perfecte distincte între 1^2 și n^2, rezultă că $S_n=n^2\Rightarrow a_n=S_n-S_{n-1}=$
$=n^2-(n-1)^2=2n-1$. Prin urmare $b_n=\left[\frac{a_n}{n}\right]\equiv\left[\frac{2n-1}{n}\right]=1.$

Lucian Dragomir, O.L., 2004

23*. a) $a^{n+2}+a^{-n-2}=(a+a^{-1})(a^{n+1}+a^{-n-1})-aa^{-1}(a^n+a^{-n})=$
$=\left(a+a^{-1}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=4, aa^{-1}=1\right)=$
$=4(a^{n+1}+a^{-n-1})-(a^n+a^{-n})$. Avem: $x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n, \forall\, n\in\mathbb{N}$ (∗), de unde rezultă prin inducție că $x_n\in\mathbb{N}$.
b) $a^n=x_n-a^{-n}=x_n-1+1-a^{-n}\Rightarrow\{a^n\}=\{x_n-1+1-a^{-n}\}=$
$=\{1-a^{-n}\}=1-a^{-n}$ (deoarece $0<1-a^{-n}<1$).

24*. Din $[a]\leq a<[a]+1\Rightarrow 72\leq\sqrt{6n}+\frac{1}{8}<72+1,$
$72-\frac{1}{8}\leq\sqrt{6n}<72+\frac{1}{8}, 72^2-272\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{64}\leq 72^2+2\cdot\frac{7}{8}<72+\frac{49}{64},$
$72|2-3+\frac{1}{6\cdot 64}\leq n\leq 72|2+21+\frac{49}{6\cdot 64}$ (∗),
de unde rezultă că sunt 24 de valori ale lui n care satisfac condiția (∗).

Concurs Rusia 2001-2002

25. Se deduce $a_1=1^2, a_2=2^2$ și prin inducție rezultă $a_n=n^2$.
Prin urmare $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\Rightarrow 1<b_n<2-\frac{1}{n}, \forall\, n\geq 2\Rightarrow [b_n]=1.$

Ștefan Tudose

26.** Avem $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{a_n(n+2)}{3}-\frac{a_{n-1}(n+1)}{3}\Rightarrow a_n=\frac{n+1}{n-1}a_{n-1}.$
$\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{k+1}{k-1}\Rightarrow\prod_{k=2}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}\Rightarrow a_n=n(n+1).$
$\left[\sqrt{a_n}\right]=\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n$. Prin urmare, $\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{a_n}\right]=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{a_n}{2}.$

O.L. Olt, 2009

Scanned with OKEN Scanner

27*. a) Putem ordona numerele $1 \leq a_1 < a_2 \ldots < a_{n-1} < a_n$ şi

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow 1 < S_1 < 2 \Rightarrow [S_1] = 2.$$

b) Analog $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < S_2 < 1 - \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow [S_2] = 0.$$

28*. Avem $\left\{\sqrt{4k^2-2k}\right\} = \sqrt{4k^2-2k} - [4k^2-2k]$, dar cum

$(2k-1)^2 < 4k^2-2k < 4k^2 \Leftrightarrow 2k-1 < \sqrt{4k^2-2k} < 2k$

rezultă că $\sqrt{4k^2-2k} = 2k-1$.

Prin urmare se impune ca $2 < a_n < 3 \Leftrightarrow \frac{n}{3} < \sum_{k=1}^{n} \left\{\sqrt{4k^2-2k}\right\} \leq \frac{n}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{n}{3} < \sum_{k=1}^{n} \left\{\sqrt{4k^2-2k} - (2k-1)\right\} < \frac{n}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3} + 2k - 1\right) < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4k^2-2k} < \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} + 2k - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{6k-2}{3} < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4k^2-2k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{4k-1}{2}$$

care este adevărată. Într-adevăr avem:

$$\frac{6k-2}{3} < \sqrt{4k^2-2k} < \frac{4k-1}{2} \Leftrightarrow \frac{36k^2-24k+4}{9} < 4k^2-2k <$$

$$< \frac{4k^2-8k+1}{4}, \forall\, k \in \mathbb{N}^* \text{ (care se verifică).}$$

O.L. Botoşani, 2016

29*. Notăm $n^2+6n = k \Rightarrow n(n+6)(n+2)(n+4) = k(k+8) = k^2+8k$, dar $k^2+6k+9 < k^2+8k < k^2+8k+16 \Rightarrow (k+3)^2 \geq k^2+8k <$ $< (k+4)^2$ (1).

Dacă $k^2+8k = m^2 \Rightarrow (k+4)^2 - m^2 = 16$ (2),

unde $k = n^2+6n \geq 7 \Rightarrow (k+4)^2 \geq 11$, atunci cea mai mică valoare a diferenţei din (2) este $16 = (k+4)^2 - m^2 \geq 121 - 100 = 21$.

Aşadar, niciun termen al şirului nu este raţional, adică toţi termenii şirului sunt numere iraţionale.

Scanned with OKEN Scanner

b) Din (1) rezultă $b_n = [b_n] = \left[\sqrt{k^2+8k}\right] = k+3 = n^2+6n+3 = (n+3)^2-6$. Prin urmare b_n este divizibil cu 7, dacă $(n+3)^2$ dă restul 6 la împărțirea cu 7. Dar resturile împărțirii la 7 a oricărui pătrat perfect sunt 0,1,4,2. Așadar, b_n nu poate fi divizibil cu 7 pentru nicio valoare a lui $n \in \mathbb{N}^*$.

Matematica v scole nr. 5/1989

∮ 2. Probleme de nivel ridicat

30. a) Dacă sub ultimul radical se înlocuiește 2 cu 4 rezultă $1 < \sqrt{2} \le a_n < 2 \Rightarrow [a_n] = 1$;

b) Observăm că $b_{n+1} = \sqrt{6+b_n}$ este un șir strict crescător, iar dacă sub ultimul radical în loc de 6 se pune 9, rezultă $2 < \sqrt{6} \le b_n < 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow [b_n] = 2$;

c) Analog $c_n = \sqrt{3+c_n}$ șir crescător și prin inducție rezultă $2 < c_n < 3 \Rightarrow [c_n] = 2, \forall\, n \ge 2$ și $[c_1] = 1$;

d) Analog șirul este strict crescător $a_{n+1} = \sqrt{6+d_n}$ și dacă sub ultimul radical se înlocuiește 6 cu 8 rezultă $1 < \sqrt[3]{6} < d_n < 2 \Rightarrow [d_n] = 1$;

e) Șirul este strict crescător și dacă sub ultimul radical se înlocuiește 24 cu 27 rezultă $2 < \sqrt[3]{24} < e_n < 3 \Rightarrow [e_n] = 2$.

31. a) Avem $a_{n+1} = \sqrt{1981+a_n}$ și $a_n < a_1 < 45$ și $45 < a_2 < 46$ și, prin inducție, se deduce că: $45 < a_n < 46 \Rightarrow [a_n] = \begin{cases} 44, & n=1 \\ 45, & n \ge 2 \end{cases}$;

b) Analog $[b_n] = \begin{cases} 44, & n=1 \\ 45, & n \ge 2 \end{cases}$;

c) $c_1 = 45 \Rightarrow [c_1] = 45$ și, prin inducție, se deduce: $45 < c_n < 46 \Rightarrow [c_n] = 45, \forall\, n \ge 1$.

32. Șirurile sunt strict crescătoare.

a) Dacă sub ultimul radical se înlocuiește 14 cu 16 rezultă $a_n < 2 \Rightarrow 1 < \sqrt[4]{14} < a_n < 2 \Rightarrow [a_n] = 1$;

b) Dacă sub ultimul radical se înlocuiește 78 cu 81 atunci șirul este majorat de 3 adică: $2 < \sqrt[4]{78} \le b_n < 3 \Rightarrow [b_n] = 2$;

c) Analog, 30 se înlocuiește cu 32 sub ultimul radical și rezultă $1 < \sqrt[5]{30} \le c_1 \le c_n < 2 \Rightarrow [c_n] = 1$;

d) $3 < \sqrt[5]{1020} \le d_n < \sqrt[5]{1024} = 4 \Rightarrow [d_n] = 3$.

33*. Notăm cu $a_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}\ldots\sqrt{6}}$ și $b_n = \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}\ldots\sqrt[3]{6}}$.

Dacă înlocuim în a_n și b_n ultimele cifre cu 9 respectiv 8 se obține

$2 < a_n < 3$ și $1 < b_n < 2 \Rightarrow 3 < x_n < 5$, dar cum șirul x_n este crescător $\Rightarrow x_1 = \sqrt{6} + \sqrt[3]{6} > 2{,}4 + 1{,}6 = 4$, deci $4 < x_1 < x_n < 5 \Rightarrow [x_n] = 4$.

34. Notăm primul radical cu x_n și cel de-al doilea radical cu y_n rezultă $2 < x_n < 5, 2 < y_n < 3, \forall\, n \geq 2$ (se poate arăta prin inducție) $\Rightarrow$
$\Rightarrow 4 < x_n + y_n < 6 \Rightarrow 4 < a_n < 6$, dar cum șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător și

$$a_2 = x_2 + y_2 = \sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt{6+\sqrt{6}} > \sqrt{3+1{,}7} + \sqrt{6+2{,}44} =$$
$$= \sqrt{4{,}7} + \sqrt{8{,}44} > 5 \Rightarrow 5 < a_2 < a_n < 6 \Rightarrow [a_n] = 5, \forall n \geq 2.$$

Analog, $b_n = x_n + y_n$, cu $3 < x_n < 4, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ și $1 < y_n < 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 < x_n + y_n < 6 \Rightarrow 4 < b_n < 6$ dar cum șirul este strict crescător și
$5 < x_1 + y_1 = \sqrt{12} + \sqrt[3]{6} \Rightarrow 5 < b_1 < b_n < 6 \Rightarrow [b_n] = 5$.

Analog, $c_n = x_n + y_n$, cu $3 < x_n < 4$ și $1 < y_n < 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 < x_n + y_n < 6 \Rightarrow 4 < c_n < 6$ la fel șirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător cu $c_1 = \sqrt[3]{33} + \sqrt[3]{6} > 5 \Rightarrow 5 < c_1 < c_n < 6 \Rightarrow [c_n] = 5$.

Prin urmare, $[a_n] = [b_n] = [c_n], \forall\, n \geq 2$.

Gh. Andrei

35*. a) Șirul (a_n) este strict crescător.

Avem $a_1 = \sqrt{6} + \sqrt[3]{6} > 2{,}4 + 1{,}6 = 4$ și $4 < a_n < 5 \Rightarrow [a_n] = 4$;

b) Analog $b_1 = \sqrt{2} + \sqrt[3]{6} > 1{,}4 + 1{,}6 = 3$ și $b_n < 4 \Rightarrow [b_n] = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow [a_n] = 1 + [b_n]$.

Olimpiadă Cipru, 1992

36. Evident $a_n > 1$. Să arătăm că $a_n < 2 \Rightarrow [a_n] = 1$.

Într-adevăr, notăm cu $b_1 = \sqrt{(n-1)^2 + \sqrt{n^2}} < n \Rightarrow$

$$\Rightarrow b_2 = \sqrt{(n-2)^2 + \sqrt{n^2}} < n-1 \text{ și deci } b_k < n-(k-1) \Rightarrow b_{k+1} =$$
$$= \sqrt{(n-k-1)^2 + a_k^2} < \sqrt{n-(k-1)^2 + (n-k+1)} < n-k.$$

Pentru $k = n-2 \Rightarrow a_n < 2 \Rightarrow [a_n] = 1$.

Ion Cucurezeanu, Lucrarea Radicali

37*. Avem $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ de unde rezultă prin inducție că șirul este crescător. Avem $x_{n+1} - x_n = \sqrt{a+x_n} - x_n = \dfrac{-x_n^2 + x_n + 4}{\sqrt{a+k_n} + x_n} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{a} < x_n < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} < \sqrt{a} + 1 \Rightarrow [\sqrt{a}] \leq [x_n] \leq [\sqrt{a}] + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [x_n] = [\sqrt{a}].$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru diverse valori ale lui a se obțin rezultatele de la unele șiruri anterioare. Pentru $a = 6 \Rightarrow \sqrt{6} < x_n < 3 \Rightarrow [x_n] = 2$. Pentru $a = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow [x_n] = 2, \forall\, n \geq 2$. Pentru $a = 12 \Rightarrow 2\sqrt{3} < x_n < 4 \Rightarrow [x_n] = 3$ ș.a.m.d.

38**. Evident șirul este crescător și pentru

$$n = 4 \Rightarrow a_n = \sqrt{2 + \sqrt[3]{3! + \sqrt[4]{4!}}} = \sqrt{2 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[4]{24}}} < \sqrt{2 + \sqrt[3]{8}} = \sqrt{4} = 2$$

și evident $a_n < 3$. Pentru $n \geq 4$ fixat și pentru fiecare $k \in [2, n]$ notăm cu $b_k = \sqrt[k]{k! + \cdots + \sqrt[n]{n!}}$ și, evident $b_n = \sqrt[n]{n!} < n$.

Să arătăm că dacă $b_k < k \Rightarrow b_{k-1} < k - 1$. Într-adevăr avem

$b_{k-1} = \sqrt[k-1]{(k-1)! + b_k} < \sqrt[k-1]{(k-1)! + k} < k - 1$

(ultima inegalitate este echivalentă cu $(k-1)! + k < (k-1)^{k-1}$).

Pentru $k = 4$ rezultă $3! + 4 = 10 < 3^3$.

Dacă $(k-1)! + k < (k-1)^{k-1}$ atunci

$k! + (k+1) = (k-1)!\,k + k + 1 = (k-1)! + k + (k-1)!\,(k-1) + 1 <$

$< (k-1)^{k-1} + (k-1)! \cdot (k-1)! + 1 < (k-1)^{k-1} + (k-1)^{k-1}(k-1) +$

$+1 = k(k-1)^{k-1} + 1 < k^k$.

Prin inducție s-a demonstrat că $b_k < k$ pentru $k \geq 3$ și cum $b_3 < 3$ și $b_2 = \sqrt{2 + \cdots} < \sqrt{5} < 3$. Prin urmare $[a_n] = 2$.

Claudiu Coandă, R.M.T., 2005

39**. a) Evident șirul este strict crescător:

$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n + \sqrt[n+1]{n}}$, $2^n \geq n + 2, \forall\, n \geq 2$.

Avem $a_n < \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{4 + \cdots + \sqrt[n-1]{n - 1 + \sqrt[n]{n+2}}}}} <$

$< \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \cdots + \sqrt[n-1]{n+2}}} < \cdots < \sqrt{2 + \sqrt[3]{2+2}} < 2$

și $1 < a_1 = \sqrt{2} < a_n < 2 \Rightarrow [a_n] = 1$;

b) Analog din $\sqrt{n!} < \sqrt{n! + \sqrt{(n+1)!}} \Rightarrow b_n < b_{n+1}$ și $[b_n] = 1$;

c) $[c_n] = 2, \forall\, n \geq 2$.

40**. Considerăm inegalitatea: $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \dfrac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$

Scanned with OKEN Scanner

și însumând de la $k = 1$ la $k = n$, rezultă:

$\sqrt{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \sqrt{n} - 1$ (1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$ (2),

dar, cum $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 > 2\sqrt{n+1} - 2 > 2\sqrt{n} - 2$ (3),

rezultă $2\sqrt{n} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$ (4).

Cu substituția $n \to n^2 \Rightarrow 2n - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2}} < 2n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [a_n] = 2n - 2, \forall\, n \geq 2.$

41*. Evident șirul este crescător și:

a) Fie $a_n = x_n + y_n$ unde $\sqrt{2} < x_n < \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2 \ldots \sqrt{2\sqrt{4}}}}} = 2.$

$\sqrt[3]{4} < y_n < \sqrt[3]{4\sqrt[3]{4 \ldots \sqrt[3]{4\sqrt[3]{8}}}} = 2 \Rightarrow 3 < \sqrt{2} + \sqrt[3]{4} < a_n < 4 \Rightarrow [a_n] = 3,$

șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

b) Deoarece $1{,}414 + 1{,}586 = 3{,}001 < \sqrt{2} + \sqrt[3]{4} < a_n < 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{a_n\} \in \left(\frac{1}{1000}, 1\right).$

c) $a_n = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}} + 4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}} = 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 4^{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]} =$

$= 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 2^{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n} < 4$, cum $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ și $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ rezultă $a_n \to 4$ și cum

șirul este crescător cu $a_n = 3{,}001 \Rightarrow a_1 < a_n < 4 \Rightarrow [a_n] = 3.$

Gh. Andrei

42**. Avem inegalitatea:

$\sqrt[n]{a^n - a} < a_n < \sqrt[n]{a^n - a + \sqrt[n]{a^n - a + \cdots + \sqrt[n]{a^n}}} = \sqrt[n]{a^n} = a$ (1).

$a^n > (a-1)^n + a, \forall\, n \geq 2$ (2) (prin inducție). Prin urmare

$a - 1 < \sqrt[n]{a^n - a}$ (3). Din (1) și (3) se deduce că $[a_n] = a - 1.$

Dumitru Acu, G.M. nr. 12/2005

43***. a) Procedăm prin inducție.

Pentru $n = 2 \Rightarrow \sqrt{2 + \sqrt{1}} < \sqrt{2} + 1.$

Scanned with OKEN Scanner

180

Din $\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2\ldots\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}<\sqrt{n}+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2}\ldots}}<n+2\sqrt{n}+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}<2\sqrt{n}+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}<\sqrt{n-1}+1,$

care este adevărată deoarece $\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}$;

b) $a_{2014}<\sqrt{2014}+1<45+1=46.$

Din $44^2=1936$ și $45^2=2025\Rightarrow 44<\sqrt{2013}<45\Rightarrow$

$\Rightarrow a_n>\sqrt{2014+\sqrt{2013}}>\sqrt{2058}>45\Rightarrow[a_{2014}]=45.$

Concurs „Mens Sana", 2014

44*. a) Evident $\frac{1}{2}<a_n<1\Rightarrow[a_n]=0.$

$b_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\in(0,1)\Rightarrow[b_2]=0.$ Procedăm prin inducție.

Presupunem că $0<b_n<1$ și vom arăta că $0<b_{n+1}<1.$

Într-adevăr $b_{n+1}=\frac{1}{n+1}\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]=$

$=\frac{1}{n+1}\left[nb_n+\frac{1}{n+1}\right]=\frac{nb_n}{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}(n+1)}<\frac{nb_n}{n+1}+\frac{1}{n+1}=$

$=\frac{nb_n+1}{n+1}<\frac{n+1}{n+1}=1.$ Așadar, $[b_n]=0$ și $[a_n]=[b_n]=0.$

Eugen Jecan, Concursul „Grigore Moisil", 2016

b) Avem $c_{n+1}=c_n+\frac{2}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}\Rightarrow c_{n+1}>c_n$

și deci șirul este crescător și cum $c_1=\frac{13}{12}>1\Rightarrow c_n>1.$

$c_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\cdots+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{n}<$

Scanned with OKEN Scanner

$< n\frac{1}{n} + n\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{n} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3n} < \frac{3}{2} \Rightarrow 1 < c_n < \frac{3}{2} \Rightarrow 2 < 2c_n < 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow [2c_n] = 2.$

45***. Șirul este strict crescător și evident $1 < a_n$. Arătăm că $a_n < 2$.

Într-adevăr avem $a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}} <$

$< \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n-1+n}}}} = b_n$

și $b_{n+1} \leq \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n-1+\sqrt{n+n+1}}}}}$ și evident avem

$b_{n+1} \leq b_n$, deoarece $\sqrt{2n+1} \leq n, \forall\, n \geq 3$.

Dar, cum $b_3 = \sqrt{1+\sqrt{5}} < 2 \Rightarrow 1 < b_n < 2 \Rightarrow 1 < a_n < 2 \Rightarrow [a_n] = 1$.

Altfel se poate utiliza inegalitatea:

$\sqrt{k + \sqrt{k+1+\sqrt{k+n}}} < k+1, \forall\, k, n \in \mathbb{N}^*$ și atunci rezultă $a_n < 2$.

Gh. Eckstein, Baraj, 1989

46***. <u>Soluția 1</u>

Evident șirul (a_n) este strict crescător, $a_n < a_{n+1}$.

Avem: $a_n = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4 \ldots \sqrt{n}}}} < \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4 \ldots \sqrt{n\sqrt{n+1}}}}}$ unde s-a înlocuit n cu

$n\sqrt{n+1}$. Utilizând inegalitatea mediilor $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, rezultă:

$a_n = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4 \ldots \sqrt{n}}}} < \frac{1}{2}\left(\frac{2 + \sqrt{3\sqrt{4 \ldots \sqrt{n}}}}{n}\right) \leq$

Scanned with OKEN Scanner

$$\leq \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{4\sqrt{5\sqrt{6\ldots\sqrt{n}}}}\right)\right) \leq \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\left(\frac{3+4+\sqrt{5\sqrt{6\ldots\sqrt{n}}}}{2}\right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(2+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}\right) = \sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k} =$$

$$= 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k} - \frac{1}{2}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k} - 1 =$$

$$= 2\cdot\frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2^1}{\frac{1}{4}} - 1 =$$

$$= 8\left[n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\right] - 1 =$$

$$= 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left[\frac{n}{2} - (n+1)\right] + 4 - 1 < 3.$$

Avem $2 < a_n = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}} < a_n < 3 \Rightarrow [a_n] = 2.$

S-a utilizat $\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{na^{n+2} - (n+1)a^{n+1} + a}{(a-1)^2}$.

Soluția 2

Evident $a_3 > 2, a_4 > 2$ și $a_n > 2, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Notăm $b_k = \sqrt{k\sqrt{k+1\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}$. Să presupunem că:

$$b_k \geq k+1 \Rightarrow b_k = \sqrt{kb_{k+1}} \Rightarrow b_{k+1} = \frac{b_k^2}{k} \geq \frac{(k+1)^2}{k} > k+2.$$

Dacă $a_2 = b_2 \geq 3 \Rightarrow b_{n-1} \geq b_n$, adică $\sqrt{(n-1)\sqrt{n}} \geq n$, fals.
Prin urmare $a_2 = b_2 < 3 \Rightarrow a_n < 3 \Rightarrow [a_n] = 2.$

Matematica v scole

47**. Avem $a_1 = \sqrt{2}, b_1 = \sqrt{3}, a_1 < b_1$ și $a_{n+1}^2 = b_n + 2,\ b_{n+1} = a_n + 3.$
Demonstrăm prin inducție că $a_n < b_n < a_{n+1}$ (*).
Pentru $n = 1$ este adevărată. Din $a_{n+1}^2 = b_n + 2 < 3 + a_n = b_{n+1}^2 \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow a_{n+1} < b_{n+1}$ și deoarece $(a_{n+1}+1)^2 = a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} + 1 =$
$= 3 + b_n + 2a_{n+1} > 3 + a_n = b_{n+1}^2 \Rightarrow b_{n+1} < a_{n+1} + 1$ și relația $(*)$ este adevărată. Din $(*)$ rezultă $[a_n] \leq b_n \leq [a_n] = [a_n] + 1 \Rightarrow [a_n] = [b_n]$.

Concurs Kiev, 1988

§ 3. Probleme de concurs

48***. Notăm cu $b_n = \left[\sqrt{2n + \frac{1}{2}}\right]$ de unde se deduce că

$(b_n) = \left\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4, \ldots, \underbrace{m, m, \ldots, m}_{m \text{ ori}} \ldots\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = n + b_n = \{2,4,5,7,8,9,11,12,13,14,16,17,18,19,20\}$.

49***. Fie $a_n = m$. Numărul termenilor până la primul termen egal cu m, inclusiv, este $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(m-1) + 1 \leq n \leq 2 + 4 + \cdots + 2m \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \frac{m(m-1)}{2} + 1 \leq n \leq 2 \cdot \frac{m(m+1)}{2}$.

$m^2 - m + 1 \leq n \leq m^2 + m \Rightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 < m^2 - m + 1 \leq n \leq m^2 + m <$

$< \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow m - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < m + \frac{1}{2} \Rightarrow m < \sqrt{n} + \frac{1}{2} < m + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_n = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

50***. Fie $a_n = m$. Numărul termenilor până la primul termen de valoare m inclusiv m, va fi:

$(2 + 3 + 4 + \cdots + m) + 1 \leq n < (2 + 3 + \cdots + m + (m+1) + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{m(m+1)}{2} \leq n < \frac{(m+1)(m+2)}{2} \Rightarrow \frac{-3 + \sqrt{8n+1}}{2} < m \leq$

$\leq \frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2} \Rightarrow m \leq \frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2} < m + 1 \Rightarrow \left[\frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2}\right] = m$

$\Rightarrow a_n = \left[\frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

51***. <u>Soluția 1</u>

Fie $\{\sqrt{n}\} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = p^2 \\ \alpha, & \text{cu } 0 < \alpha < 1, \text{dacă } n \neq p^2 \end{cases} \Rightarrow 1 - \{\sqrt{n}\} =$

$= \begin{cases} 1 & , \text{dacă } n = p^2 \\ 1 - \alpha = \beta, \text{cu } 0 < \beta < 1, & \text{dacă } n \neq p^2 \end{cases} \Rightarrow a_n = [1 - \{\sqrt{n}\}], n \in \mathbb{N}^*$.

Soluția 2

$a_n = 1 + [\sqrt{n}] + [-\sqrt{n}]$ sau $a_n = b_n = [\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1}]$ sau $a_n = c_n = [2\sqrt{n}] - [\sqrt{4n-1}], a_n = d_n = [2\sqrt{n}] - [\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}]$, deoarece $[\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}] = [\sqrt{4n-1}]$ (vezi capitolul Egalități).

52***. Evident termenii șirului sunt numere impare.

Fie $a_n = m = 2k+1$, atunci numărul termenilor până la primul termen de valoare m, inclusiv acest termen este:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + 1 \le n \le 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k+1)$.

$k^2 + 1 \le n \le (k+1)^2 \Rightarrow k^2 \le n - 1 \le (k+1)^2 - 1 < (k+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \le \sqrt{n-1} < k+1 \Rightarrow k = [\sqrt{n-1}] \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = 2k + 1 = 2[\sqrt{n-1}] + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

53***. Fie $a_n = m$, atunci numărul elementelor în fața primului termen cu valoarea m este $\dfrac{m(m-1)}{2}$ termeni, deci:

$$\frac{m(m-1)}{2} < n \le \frac{m(m-1)}{2} + m \Leftrightarrow \frac{m(m-1)}{2} < n \le \frac{m(m+1)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(m-1) < 2n \le m(m+1) \Rightarrow m^2 - m + \frac{1}{4} < 2n < m^2 + m + \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < m + \frac{1}{2} \Rightarrow m < \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < m + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = a_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right].$$

Observație În baza unui exercițiu anterior (vezi capitolul Identități) $\left[\sqrt{2n} + \dfrac{1}{2}\right] = \left[\dfrac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că a_n se mai scrie

$$a_n = \left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right].$$

Concurs Coreea, 2005

54***. Dacă $T_k = \dfrac{k(k+1)}{2}, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k = \dfrac{\sqrt{8T_k+1}-1}{2}$ și

$$1 - \{n\} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = \dfrac{k(k+1)}{2}, k \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{dacă } n \ne \dfrac{k(k+1)}{2}, k \in \mathbb{N}^* \end{cases},$$

deci $a_n = [1 - \{\sqrt{n}\}] = \left[1 - \left\{\dfrac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right\}\right], n \in \mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

55*.** Notăm cu $x_n = [n\sqrt{2}]$, $y_n = [n\sqrt{3}], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ avem:
$x_{n+1} - x_n,\ y_{n+1} - y_n \in \{1,2\} \in \mathbb{N}$.
Presupunem prin absurd că există $k \in \mathbb{N}$, astfel încât toate numerele $a_n, n \geq k$ să aibă aceeaşi paritate.
Cum $2 \leq a_{n+1} - a_n \leq 4, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} - a_n \in \{2,4\}, \forall\, n \geq k$.
Dacă $a_{n+1} - a_n = 2 \Rightarrow x_{n+1} - x_n = y_{n+1} - y_n = 1$.
Dacă $a_{n+1} - a_n = 4 \Rightarrow x_{n+1} - x_n = y_{n+1} - y_n = 2$.
Rezultă că $y_n - x_n = y_{n+1} - x_{n+1}, \forall\, n \geq k$, de unde rezultă că $y_n - x_n =$
$= y_k - x_k, \forall\, n \geq k$. Dacă $y_n - x_n > n\sqrt{3} - 1 - n\sqrt{2}, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow n < \dfrac{y_k - x_k + 1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \forall\, n \geq k$, fals. Prin urmare, şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ are o infinitate de termeni numere pare şi o infinitate de termeni numere impare.

Marius Cavachi, O.N., 2006

56*.** Soluția 1
Primul element al grupei k este pe poziţia $1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) + 1 =$
$= \dfrac{k(k-1)}{2} + 1 = \dfrac{k^2 - k + 2}{2}$, iar ultimul element al grupei k este pe poziţia $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Observăm că ultimul element al fiecărei grupe este pătrat perfect. Vom nota al m-lea element al grupei k cu $a_{k,m}$, atunci $a_{1,1} = 1, a_{2,2} = 2^2, \ldots, a_{k,k} = k^2$ şi prin inducţie deducem că $a_{k+1,k+1} = a_{k,k} + 1 + 2k = (k+1)^2$. Primul element al grupei k este $a_{k,1} = a_{k-1,k-1} + 1 = (k-1)^2 + 1 = k^2 - 2k + 2$. Avem
$a_{k,m} = a_{k-1,k-1} + 2m - 1 = (k-1)^2 + 2m - 1 = k^2 - 2k + 2m$.
Fie $a_n = a_{k,m}$, adică al n-lea element este al m-lea din grupa k, adică indexul n este indexul primului element al grupei k plus $m - 1$, deci
$n = \dfrac{k(k-1)}{2} + 1 + m - 1 = \dfrac{k(k-1)}{2} + m$.
Avem $a_n = a_{k,m} = k^2 - 2k + 2m = 2\left[\dfrac{k^2 - k}{2} + m\right) - k = 2n - k$.
Trebuie să exprimăm pe k în funcţie de n.
Avem $\dfrac{k(k-1)}{2} + 1 \leq n < \dfrac{k(k+1)}{2} + 1$, de unde rezultă că
$k \leq \dfrac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} < k + 1 \Rightarrow k = \left[\dfrac{1 + \sqrt{8n-7}}{2}\right]$ şi prin urmare
$a_n = 2n - \left[\dfrac{1 + \sqrt{8n-7}}{2}\right], n \in \mathbb{N}^*$ sau $a_n = 2n - \left[\sqrt{2n} + \dfrac{1}{2}\right], n \in \mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția 2

Scriem șirul astfel:

	1	1		
Rândul	**2**	2,	4	
	3	5,	7,	9
		...	...	...
	$n-1$	$(n-2)^2+1$,	...	$(n-1)^2$
	n	$(n-1)^2+1$,	$(n-1)^2+2$,	$(n-1)^2+k, \dots n^2$, $k \in \{1,2,\dots,2n-1\}$.

Numărul termenilor până la al m-lea inclusiv este

$$\frac{n(n-1)}{2}+k=m \Rightarrow k=m-\frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \le m-\frac{n(n-1)}{2} \le 2n-1 \Leftrightarrow \begin{cases} n^2-2n+2-2m \le 0 \\ n^2+3n+2-2m \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \in \left[\frac{-3+\sqrt{8m-7}}{2}, \frac{1+\sqrt{8m-7}}{2}\right] \Rightarrow n=\left[\frac{1+\sqrt{8m-7}}{2}\right],$$

dar, cum diferența $d=\frac{1+\sqrt{8m-7}}{2}-\frac{-3+\sqrt{8m+17}}{2}=$

$$=2+\frac{\sqrt{8m+17}-\sqrt{8m-7}}{2}<2 \text{ și } 1<d<2 \text{ atunci din}$$

$$n \in \left(\frac{-3+\sqrt{8m+17}}{2}, \frac{1+\sqrt{8m-7}}{2}\right) \Rightarrow n=\left[\frac{1+\sqrt{8m-7}}{2}\right].$$

R.G. nr. 15

57*.** Soluția 1

Dând valori lui $k=1 \dots m$, $a_{2k+1}-a_{2k}=k$, $a_{2k}-a_{2k-1}=k$, rezultă

$$\begin{cases} a_3-a_2=1 \\ a_5-a_4=2 \\ \dots \\ a_{2m+1}-a_{2m}=m \end{cases} \Rightarrow (a_3+a_5+\dots+a_{2m-1}+a_{2m+1})-$$

$$-(a_2+a_4+\dots+a_{2m})=\frac{m(m+1)}{2} \quad (1)$$

și

$$\begin{cases} a_2-a_1=1 \\ a_4-a_3=2 \\ \dots \\ a_{2m}-a_{2m-1}=m \end{cases} \Rightarrow (a_2+a_4+\dots+a_{2m-2}+a_{2m})-$$

$$-(a_1+a_3+\dots+a_{2m-1})=\frac{m(m+1)}{2} \quad (2).$$

Adunând (1) cu (2) $\Rightarrow a_{2m+1}-1=m(m+1) \Rightarrow a_{2m+1}=m^2+m+1$ (3)

Scanned with OKEN Scanner

și $a_{2m+1} - a_{2m} = m \Rightarrow a_{2m} = m^2 + 1$ (4) $\Rightarrow a_n = \begin{cases} \frac{n^2+4}{4}, & n \text{ par} \\ \frac{n^2+3}{4}, & n \text{ impar} \end{cases}$,

care se poate concentra într-o singură formulă:

$a_n = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Soluția 2

Se poate observa că $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \left[\frac{n+1}{2}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ sau

$a_n = a_{n-1} + \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n-2}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] + a_1,$

$a_n = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] + a_1 = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1,$

unde s-a ținut seama de identitatea

$\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]$ (vezi capitolul Inegalități).

Concurs Australia, 2006

58***. Vom utiliza inegalitățile:

$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]^2 < n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] < \left(\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] + 1\right)^2$ (vezi Cap. XV, ex. 32).

Se poate deduce că șirul este strict crescător.

Notăm $m = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$, inegalitatea devine $m^2 < a_n < (m+1)^2$, adică

$m^2 < n + m < (m+1)^2$. Avem $0,1,4,9, \ldots, m^2 < a_n$.

Pentru $m = 1$ $\quad 1^2 < n + 1 < 4 \Rightarrow n \in \{1,2\}$ și

$a_1 = 2,$

$a_2 = 3.$

Pentru $m = 2$ $\quad 4 < n + 2 < 9 \Rightarrow n \in \{3,4,5,6\}$ și

$a_3 = 5,$

$a_4 = 6,$

$a_5 = 7,$

$a_6 = 8.$

$(a_n) = (2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17, \ldots)$ așadar șirul este format din serii finite de numere naturale consecutive (2, 3), (5, 6, 7,8), (10, 11, 12, 13, 14, 15), (17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24) etc. astfel încât diferența dintre primul termen al unei serii și ultimul termen al seriei precedente este 2.

Olimpiadă China, 1993

Observație:

Reciproc, știind regula formării seriilor, să se determine termenul general.

Germania, 1971-1972

Scanned with OKEN Scanner

59***. Avem $a_{n+1}-a_n=1+\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]\in\{1,2\}$.

Cum $\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]\neq\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]\Rightarrow$ vom arăta că $a_{n+1}-a_n=2$ dacă și numai dacă $a_n=k^2-1$, și deci nu sunt termeni pătrate perfecte.

Presupunem că $a_{n+1}-a_n=2\Rightarrow\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=k-1$ și $\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]=k\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{n}+\frac{1}{2}<k<\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\Rightarrow 4k^2-4k-3<4n<4k^2-4k+1$

și singurul număr multiplu de 4 este $4n=4k^2-4k\Rightarrow n=k^2-k\Rightarrow$

$\Rightarrow a_n=k^2-k+k-1=k^2-1$.

Cristinel Mortici

60***. Fie $a_n=n+k$ al n-lea termen al șirului dat, unde $k\geq 1$.

Atunci $k=\left[\sqrt{n+k}\right]$ din moment ce numărul pătratelor perfecte cuprinse în intervalul $(1,n+k)$ este dat de $\left[\sqrt{n+k}\right]$ și $\sqrt{n+k}$ nu este număr întreg, obținem $\sqrt{n+k}-1<k<\sqrt{n+k}$. Din relația $k<\sqrt{n+k}\Rightarrow$

$\Rightarrow k^2\leq n+k-1\Rightarrow\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\leq n-\frac{3}{4}<n$. Așadar $k<\sqrt{n}+\frac{1}{2}$ (1).

Pe de altă parte însă $\sqrt{n+k}-1<k\Rightarrow n+k<(k+1)^2\Rightarrow n+k+1<$

$<(k+1)^2\Rightarrow k^2+k\geq n\Rightarrow\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\geq n+\frac{1}{4}>n$.

Prin urmare $\sqrt{n}-\frac{1}{2}<k$ (2).

Din (1) și (2) obținem $k=\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$ și $a_n=n+\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$.

Crux Mathematikorum, 1993

61.*** Vom conveni să numim număr convenabil un număr n pentru care $\left[n\sqrt{2}\right]$ este o putere a lui 2. Să presupunem că există un număr finit de numere convenabile.

Fie k astfel încât $2^k>\left[n\sqrt{2}\right]$ pentru n convenabil. Fie q unicul întreg pentru care $q\sqrt{2}<2^k\leq(q+1)\sqrt{2}$ și $r=2^k-q\sqrt{2}$, atunci $0<r\leq\sqrt{2}$.

Există un unic întreg $p\geq 0$ astfel încât $\frac{\sqrt{2}}{2}<2^p r\leq\sqrt{2}$, atunci avem:

$\sqrt{2}-1<2^p r=2^p\left(2^k-q\sqrt{2}\right)\leq\sqrt{2}$ echivalent cu

$(q2^p+1)\sqrt{2}-1<2^{p+k}\leq(q2^p+1)^{\sqrt{2}}$.

Notând $q2^p+1=m\Rightarrow\left[m\sqrt{2}\right]=2^{p+k}$ deci m este convenabil, contradicție cu alegerea lui k.

R.M. nr. 2/2011

Scanned with OKEN Scanner

62*.** Se poate arăta prin inducție că $2 < x_n < 2{,}5 \Rightarrow [x_n] = 2$.

63*.** Șirul $x_{n+1} = ax_n + b \Rightarrow x_{n+1} = a^n x_n + b(1 + a + \cdots + a^{n-1}) =$

$= 2^n \cdot 2 - 1\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right) = 2^{n+1} - 2^n + 1 = 2^n + 1.$

$x_k = 2^{k-1} + 1 \Rightarrow 2^{\frac{k-1}{2}} < \sqrt{2^{k-1} + 1} < 2^{\frac{k-1}{2}} + 1 \Rightarrow \left[\sqrt{2^{k-1} + 1}\right] = 2^{\frac{k-1}{2}} =$

$= (\sqrt{2})^{k-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[\sqrt{x_k}]} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{2})^{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1} =$

$= \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \to \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\sqrt{x_k}]} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.$

Mihaly Bencze, Octogon nr. 23/2015

64*.** Fie $a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt[k^4+k^2+1]{k+1}$ și cum $\sqrt[k^4+k^2+1]{k+1} > 1, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$,

rezultă că $\sqrt[k^4+k^2+1]{(k+1) \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 11} < \frac{(k+1) + 1 + \cdots + 1}{k^4 + k^2 + 1} =$

$= 1 + \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2 - k + 1} - \frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$

și prin însumare rezultă: $a_n < n + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2 + +1}\right) < n + \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \in \left(n, n + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \{a_n\} < \frac{1}{2}.$

Mihai Totolici, R.M.T., 2011

65*.** Avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-1}{n+1}, \forall\, n \geq 2.$

$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_3}{a_2} a_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{n(n-1)}, \forall\, n \geq 2.$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{5}{3n} < 2.$

Se poate deduce ușor că $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + na_n = 2, \forall\, n \geq 2.$

Avem $1 < a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 2, \forall\, n \geq 2 \Rightarrow [a_1 + a_2 + \cdots + a_n] = 1.$

Lucian Dragomir, G.M. nr. 1/2013

66*.** a) Evident $a_3 = \frac{4}{3}, a_4 = \frac{13}{9}, a_4 = \frac{43}{27}$. Procedăm prin inducție,

presupunând că $a_k < 2, \forall\, k = \overline{1, n}, a_{k+2} - a_{k+1} = \frac{a_k}{3k} \Rightarrow a_3 - a_2 = \frac{a_1}{3^1},$

Scanned with OKEN Scanner

$a_4 - a_3 = \frac{a_2}{3^2}, \ldots, a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_n}{3^n}.$

$$a_{n+2} - a_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} < 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3^n} \Rightarrow a_{n+2} < 2 - \frac{1}{3^n} < 2 \Rightarrow 1 < a_{n+2} < 2.$$

Așadar, $[a_n] = 1$.

Dan Nedeianu, G.M. nr. 11/2012

b) Se utilizează inegalitatea:
$[x_1 + x_2 + \cdots + x_n] \geq [x_1] + [x_2] + \cdots + [x_n]$ și $[nx] \geq n[x]$.
Pentru inegalitatea din stânga avem: $[a_1 + a_2 + \cdots + a_n] +$
$+(n-1)([a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n]) \geq [a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n] +$
$+(n-1)([a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n]) = n([a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n])$
și pentru inegalitatea din dreapta rezultă: $[a_1 + a_2 + \cdots + a_n] +$
$+(n-1)([a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n]) \leq [a_1 + a_2 + \cdots + a_n] +$
$+(n-1)([a_1 + a_2 + \cdots + a_n]) = n[a_1 + a_2 + \cdots + a_n]$.

67*.** Avem $a_n = \{\sqrt{n^2 + 5n + 9} + \sqrt{n^2 + 9n + 18} - [\sqrt{n^2 + 5n + 9}] -$
$-[\sqrt{n^2 + 9n + 18}]\}$.

Întrucât $\left(n + \frac{5}{2}\right)^2 < n^2 + 5n + 9 < (n+3)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n + 2 < n + \frac{5}{2} < \sqrt{n^2 + 5n + 9} < n + 3$ (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow [\sqrt{n^2 + 5n + 9}] = n + 2$ și analog $[\sqrt{n^2 + 9n + 18}] = n + 4$

$\left(\text{întrucât } n + 4 < \sqrt{n^2 + 9n + 18} < n + \frac{9}{2} < n + 5\right)$ (2).

Prin urmare a_n devine

$a_n = \sqrt{n^2 + 5n + 9} - (n + 2) + \sqrt{n^2 + 9n + 18} - (n + 4)$.

Se constată: $\sqrt{n^2 + 5n + 9} - (n + 2) > \frac{1}{2}$ și $\sqrt{n^2 + 9n + 18} - (n + 4) > \frac{1}{2}$,
care sunt echivalente cu (1) și (2) $\Rightarrow a_n > 1$ și analog $a_n < 2 \Rightarrow [a_n] = 1$.

Preluare după 25509 G.M. nr. 3/2006

68*.** a) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k x_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{n}{3(2n+3)} \text{ și } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k x_k} = \frac{2(2n-1)}{2n+1};$$

b) Utilizăm inegalitatea $e^x \geq x+1$ şi deci $e^{\frac{1}{n+k}} \geq 1+\frac{1}{n+k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} \geq n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \geq n+n\frac{1}{2n} = n+\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} > 2n+1 \text{ şi din } e^{-x} \geq 1-x \Rightarrow e^{-\frac{1}{n+k}} \geq 1-\frac{1}{n+k} =$$

$$= \frac{n+k-1}{n+k} \Rightarrow e^{\frac{1}{n+k}} \leq \frac{n+k}{n+k-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} \leq$$

$$\leq \frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n}+\frac{2n}{2n-1} \leq n\frac{n+1}{n} = n+1 \Rightarrow 2\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} \leq 2n+2.$$

Aşadar, $x_n = 2n+1$.

69***. Utilizăm inegalitatea dintre media aritmetică şi media pătratică, rezultă

$$n < \sqrt{1+\frac{1}{2!}}+\sqrt{1+\frac{2}{3!}}+\sqrt{1+\frac{n-1}{n!}}+\sqrt{1+\frac{1}{n!}} <$$

$$< \sqrt{n}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2!}\right)+\left(1+\frac{2}{3!}\right)+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n!}\right)+\left(1+\frac{1}{n!}\right)} \leq$$

$$\leq \sqrt{n}\sqrt{n+\frac{1}{n!}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k!}} = \sqrt{n}\sqrt{n+\frac{1}{!}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)} =$$

$$= \sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1} < n+1 \Rightarrow [a_n] = n.$$

Florin Rotariu, R.M.T. nr. 3/2015

70***. Vom utiliza dubla inegalitate $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \operatorname{arctg} x < x, x > 0$. Scriind aceasta pentru $x = \frac{1}{n}$ rezultă $n^2 < \frac{1}{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^2} < n^2+1 \Rightarrow a_n = n^2$,

de unde rezultă a) şi b).

Traian Tămâian, R.M.T. nr. 3/2015

71***. Din problema precedentă rezultă că

$$a_k = k^2 \text{ şi } b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2} =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}.$$

Mihaly Bencze, Octogon vol. 24(1)/2016

72***. Fie $a \in \left(0, \frac{1}{29}\right) \Rightarrow x_1 = 2a, x_2 = 2^2a, \ldots, x_9 = 2^9a \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 2a + 2^2a + 2^3a + \cdots + 2^9a = 1022a,$

adevărată $\forall\, a \in \left(0, \frac{1}{2^9}\right)$.

Dacă $\left[\frac{1}{29}, \frac{1}{2^8}\right) \Rightarrow x_1 = 2a, x_2 = 2^2a, \ldots, x_8 = 2^8a, x_9 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a + 2^2a + \cdots + 2^8 + 2 = 1022a \Rightarrow 2a \cdot 255 + 2 = 1022a \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = 5|2a \Rightarrow a = \frac{8}{512} = \frac{1}{256} = \frac{1}{2^8} \notin \left[\frac{1}{2^9}, \frac{1}{2^8}\right)$.

Nici în alte cazuri nu sunt soluții.

Cristinel Mortici, G.M. nr. 12/2012

73***. În baza problemei precedente rezultă:

$$k < \frac{1}{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} < k+1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} < \sum_{k=1}^{n} (k+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} < \frac{n(n+1)}{2} + n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} \leq \left[\frac{1}{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right] \leq \frac{n(n+1)}{2} + n - 1,$$

de unde rezultă cerința din problemă.

Mihaly Bencze, Octogon vol. 24(1)/2016

74***. Fie $a = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z}$. Șirul este periodic cu perioada $T = 2q$.

Într-adevăr $x_{n+2q} = (-1)^{\left[(n+2q)\frac{p}{q}\right]} = (-1)^{\left[\frac{np}{q}+2p\right]} = (-1)^{\left[n\frac{p}{q}\right]} =$

$= (-1)^{[na]} = x_n$.

Reciproc, fie $n_0 \in \mathbb{N}^*$ perioada șirului, atunci $[a(n+n_0)] - [a_n] =$ număr par, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, dar, cum $[x+y] \leq [x] + [y] < [x] + [y] + 1$ și $[x] - [y] - 1 \leq [x-y] \leq [x] - [y]$) (vezi cap.II, ex.14), atunci avem:

Scanned with OKEN Scanner

$an_0 - 1 < [a(n+n_0)] - [an] < an_0 + 1$ și cum intervalul $(an_0 - 1, an_0 + 1)$ conține cel mult un număr par, rezultă că $[a(n+n_0)] - [a_n] = A =$ constant. Dând lui n valorile $0, n_0, 2n_0, \ldots, (m-1)n_0$ rezultă

$$[an_0] = A,$$
$$[2an_0] - [an_0] = A,$$
$$[3an_0] - [2an_0] = A,$$
$$[man_0] - [(m-1)an_0] = A \Rightarrow [man_0] = mA, \forall\, m \in \mathbb{N}^*.$$

Avem $mA \leq amn_0 < mA + 1 \Rightarrow A \leq an_0 < A + \frac{1}{m}, \forall\, m \in \mathbb{N}^*,$

ceea ce implică $an_0 = A \Leftrightarrow a = \frac{A}{n_0} \in \mathbb{Q}$.

Gh. Iurea, Concursul „Alexandru Myller", 2009

75***. Fie $\alpha = \frac{p}{q} \Rightarrow \{\alpha n\} = \left\{\frac{pn}{q}\right\}$ are valorile $\frac{l}{q}, l = 0,1,2, \ldots, q-1.$

Rezultă că în interiorul intervalului $\left[\frac{l}{q} + \frac{1}{4q^2}, \frac{l+1}{q} - \frac{1}{4q^2}\right]$ nu există niciun termen al șirului $a_n = \{\alpha n\}$.

76***. Fie intervalul $[c,d] \subset [0,1]$, de lungimea a. Atunci printre m puncte ale șirului $\{a_n\}, n = 1,23, \ldots, m\left(m - \text{ orice număr natural superior lui } \frac{1}{a}\right)$ sigur există doi termeni cu distanță între ele mai mică decât $\frac{1}{n}$.

Fie aceşti termeni $\{\alpha k\}$ și $\{\alpha l\}, l > k$ care nu coincid.

(Pentru că dacă $\{\alpha k\} = \{\alpha l\} \Rightarrow \alpha = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}$ adică α rațional, absurd.)

Atunci $\{(l-k)\alpha\} < a$ sau $\{(l-k)\alpha\} > 1 - a$.

Fie de exemplu $\{(l-k)\alpha\} < a$, atunci în interiorul intervalului $[c,d]$ se află punctele $\{(l-k)\}$, pentru $l = \left[\frac{c}{\{(l-k)\alpha\}}\right] + 1$.

77***. Demonstrăm că orice interval din $[0,1]$ conține chiar termeni ai șirului $a_n = \{\log n\}$, care se obțin pentru $n = 2^k, k = 1,2,3, \ldots$. Într-adevăr $\log 2^k = k \log 2$ și cum $\log 2 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ atunci se aplică problema precedentă.

78***. Evident șirul $\sqrt{n}$ este crescător și nemărginit și mai mult distanța dintre oricare termeni vecini poate fi făcută oricât de mică (pentru a suficient de mare) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

79***. Alegem un număr natural k astfel încât $q^k < \frac{b-a}{4}$.

Atunci există cel puțin trei numere naturale $m, m+1, m+2$ cu $\frac{m}{q^k} \in [a,b]$,

$\frac{m+1}{q^k} \in [a,b], \frac{m+2}{q^k} \in [a,b]$.

Fie numărul m scris ca sumă de puteri ale lui q, adică în baza q. Avem: $\alpha_{k-1}q^{k-1} + \alpha_{k-2}q^{k-2} + \cdots + \alpha_1 q + \alpha_0$, unde $\alpha_i, i = \overline{0, k-1}$ satisface condiția $0 \leq \alpha_i \leq q-1$.

80***. Se arată prin inducție că $x_n \in (0,2), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Fie $f(n) = \sqrt{4-2n}$ strict descrescătoare.

Punctele fixe sunt date de ecuația $x = \sqrt{4-2x} \Rightarrow x = \sqrt{5}-1 \in (0,2)$ și $f \circ f$ este strict crescătoare și din $x_{2n+1} = (f \circ f)(x_{2n-1}), \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Se deduce că $x_0 > x_2 > \sqrt{5}-1$ și $x_1 < x_3 < \sqrt{5}-1$ și $x_{2n} > x_{2n+2} > \sqrt{5}-1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ și $x_{2n-1} < x_{2n+1} < \sqrt{5}-1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Evident $\sqrt{5}-1 < x_{2n} < \frac{3}{2} < 2 \Rightarrow [x_{2n}] = 1$ și cum șirul x_{2n+1} este strict crescător $1 < x_1 < x_{2n+1} < \sqrt{5}-1 < 2 \Rightarrow [x_{2n+1}] = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow [x_n] = 1$.

81***. Se constată că $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 9, a_4 = 13, a_5 = 15, a_6 = 18, a_7 = 21$ și la fel $a_8 = 25, a_9 = 28, a_{10} = 31, a_{11} = 34, a_{12} = 37, a_{13} = 40$, deci există termeni în progresie aritmetică cu rația 3 și în (b_n) există tot câte 7 termeni în progresie aritmetică cu rația $\pi - 3$.

Conform lemei lui Kronecker mulțimea $A = \{x\pi - y | x, y \in \mathbb{N}\}$ este densă în $\mathbb{R}$. Prin urmare orice interval (α, β) din $\mathbb{R}$, conține cel puțin un element din A. Fie intervalul $\left(0, \frac{1}{2^k}\right)$ și $p, q \in \mathbb{N}$, cu $0 < p\pi - q < \frac{1}{2^k}$.

Pentru $n > 2^k, qn < pn\pi < qn + \frac{n}{2^k} < qn+1, [pn\pi] = qn$.

Numerele $a_p, a_{2p}, a_{4p}, \ldots, a_{2^{k-1}p}$ respectiv $b_p, b_{2p}, b_{4p}, \ldots, b_{2^{k-1}p}$ verifică cerințele problemei.

Concursul „Alexandru Papiu-Ilarian", 2012

82***. Evident $a_2 = \left[\frac{15}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\right] = 11 = 10 \cdot 1 + 1$.

Procedăm prin inducție. Presupunem că $a_n = 10k+1, k \geq 1$, atunci

$10k+1 > \sqrt{100k^2+20k-11} = \sqrt{a_n^2-12} > 10k \Rightarrow \frac{30k+3}{4} >$

$> \frac{3}{4}\sqrt{a_n^2-12} > \frac{3-k}{4} \Rightarrow \frac{50k+5}{4} + \frac{30k+3}{4} > \frac{5}{4}a_n + \frac{3}{4}\sqrt{a_n^2-12} >$

$> \frac{50k+5}{4} + \frac{30k}{4} = \frac{80k+5}{4} \Rightarrow 20k+2 > \frac{5}{4}a_n + \frac{3}{4}\sqrt{a_n^2-12} > 20k+1$

$\Rightarrow a_{n+1} = 20k+1$. Așadar $a_n \equiv 1 (mod 10)$.

David Duster, Crux Mathematicorum, 1995

Scanned with OKEN Scanner

83***. Din relația dată rezultă că $a_{k+1}+3=(a_k+3)^2+\frac{1}{(a_k+3)^2}-2$ (1) și din $a_{k+1}-a_k=-\frac{1}{a_k+3}<0$, rezultă că șirul este strict descrescător.

Din (1) rezultă $(a_{k+1}+3)^2>(a_k+3)^2-2$. Dând valori lui $k=\overline{1,1995}\Rightarrow$
$\Rightarrow (a_{1996}+3)^2>(a_1+3)^2-2\cdot 1995=2000^2-2\cdot 1995>$
$>2000^2-2\cdot 1995-9=2000^2-2\cdot 2000+1=1999^2\Rightarrow$
$\Rightarrow a_{1996}+3>1999\Rightarrow a_{1996}>1996$. Analog, se arată că $a_{2000}>1996$ și $1947=a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{1999}>a_{2000}>1996$ (2).

Mai departe deducem că $(a_{k+1}+3)^2=(a_k+3)^2+\frac{1}{(a_k+3)^2}-2$;

dând valori lui $k=\overline{1,200}$ rezultă $(a_{2001}+3)^2=$

$$=(a_1+3)^2+\frac{1}{(a_1+3)^2}+\frac{1}{(a_2+3)^2}+\cdots+\frac{1}{(a_{2000}+3)^2}-2\cdot 2000\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{2001}+3)^2<2000^2+\frac{1}{1999^2}+\frac{1}{1999^2}+\cdots+\frac{1}{1999^2}-2\cdot 2000\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{2001}+3)^2<2000^2+\frac{2000}{1999^2}-2\cdot 2000<2000^2-2\cdot 2000+1=$$

$=(2000-1)^2\Rightarrow a_{2001}+3<1999\Rightarrow a_{2001}<1996$.

Atunci din șirul (2) rezultă

$x_{1996}=a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{1999}>a_{2000}>1996>a_{2001}$,

rezultă că sunt 1999 de termeni cu $[a_k]=1996$.

Olimpiadă Turcia, 1996

84***. Avem:

$$\left.\begin{aligned}(n+3)a_{n+1}-(n+1)a_n&=\tfrac{n+1}{2},\forall\, n\geq 1\\(n+4)a_{n+2}-(n+2)a_{n+1}&=\frac{n+2}{2},\forall\, n\geq 1\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow (n+4)(n+3)a_{n+2}-(n+1)(n+2)a_n=(n+2)^2$. Notând $(n+1)(n+2)a_n=x_n\Rightarrow x_{n+2}-x_n=(n+2)^2$. Dând lui „$n$” valori impare, apoi pare și adunând obținem

$x_{2k+1}=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k+1)^2=$

$$=\frac{2(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}\Rightarrow a_{2k+1}=\frac{k}{3}+\frac{1}{6},\forall\, k\in\mathbb{N}\text{ și}$$

$$x_{2k}=4(1^2+2^2+\cdots+k^2)=\frac{2}{3}k(k+1)(2k+1)\Rightarrow a_{2k}=\frac{k}{3}.$$

Deci $a_n=\begin{cases}\frac{k}{3}, & n=2k\\ \frac{k}{3}+\frac{1}{6}, & n=2k+1\end{cases}$.

În calculul sumei se separă n par de n impar, apoi în fiecare se grupează termenii câte trei și se folosește identitatea lui Hermite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [a_k] = [a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n] = ([a_2] + [a_4] + [a_6] + \cdots) +$$

$$+([a_1] + [a_3] + [a_5] + \cdots) = S_n' + S_n''.$$

$$S_n' = \left(\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right]\right) + \left(\left[\frac{3}{3}\right] + \left[\frac{4}{3}\right] + \left[\frac{5}{3}\right]\right) + \cdots + \left(\left[\frac{3p}{3}\right] + \left[\frac{3p+1}{3}\right] + \left[\frac{3p+2}{3}\right]\right)$$

$$+ \cdots = 0 + (3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \cdots + 3p) = \frac{3p(p+1)}{2}, \text{ dacă } n = 3p + 2.$$

Dacă $n = 3p + 3$ sau $n = 3p + 4$, cu p – impar se mai adaugă un p sau $2p$.

$$S_n'' = ([a_1] + [a_3] + [a_5]) + ([a_7] + [a_9] + [a_{11}]) +$$

$$+ \cdots + \left([a_{3p+1}] + [a_{3p+3}] + [a_{3p+5}]\right) + \cdots \text{ cu } p \text{ – par.}$$

$$S_n'' = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \cdots + 3p + \cdots = \frac{3p(p+1)}{2} + \cdots$$

cu aceleași observații ca mai sus.

85***. Utilizând formula lui Binet $F_n = \dfrac{\varphi^n - \bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$, unde $\bar{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Deoarece $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{\bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}} < \dfrac{1}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{2} < F_n < \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_n - \frac{1}{2} < \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} < F_n + \frac{1}{2} \Rightarrow F_n < \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < F_n + 1 \Rightarrow \left[\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right] = F_n.$$

86***. Considerăm șirul $x_n = \dfrac{r+n}{n+1} = 1 + \dfrac{r-1}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$ care este monoton în cazurile:

a) $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < 1$, dacă $r < 1$;

b) $x_1 > x_2 > x_3 < \cdots > 1$, dacă $r > 1$;

c) $1 = x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, dacă $r = 1$.

Cazul a) $r < 1$, pentru $k = [-r] + 1 \geq 1$ avem $x_k > 0$ și $0 < x_k < x_{k+1} <$
$< \cdots < 1$. Atunci $[x_1] = [x_2] = \cdots = [x_k] = \cdots$ dacă și numai dacă

$$0 \leq x_1 = \frac{r+1}{2} \Leftrightarrow -1 < r < 1.$$

Cazul b) $r > 1$, pentru $k = [r] + 1 \geq 1$ avem $2 > x_k$ și $2 > x_k > x_{k+1} >$
$> \cdots > 1$. Atunci $[x_1] = [x_2] = \cdots = [x_k] = \cdots$.

$$2 > x_1 = \frac{r+1}{2} \Leftrightarrow 1 \leq r < 3. \text{ Așadar } r \in [-1,3).$$

Concursul „Gh. Vrânceanu", 2004

Scanned with OKEN Scanner

87*. Dacă $a_k \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}, \forall\, k \in \mathbb{N}$, atunci $a_{k+1}=\frac{k+1}{a_n}-\left[\frac{k+1}{a_n}\right] \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Cum $a_0 \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ rezultă că a_n este irațional, deci nenul. Reciproc, dacă $a_0=\frac{p}{q}, 0<p<q$, atunci $a_1=\frac{r}{p}$, cu $0 \leq r<p \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$, și deci este reprezentat de o funcție cu numitorul mai mic decât a lui a_0 și din aproape în aproape, cum numitorii scad la fiecare pas, după cel mult q pași obținem termeni nuli.

88*. Calculăm $a_1=2, a_2=\frac{5}{3}, a_3=\frac{43}{33}, a_4=\frac{5116}{4719}$. Se constată că pentru $n \in \{1,2,3\}$ rezultă $[S_1]=2, [S_2]=3, [S_3]=4$ și $[S_4]=6$, adică $[S_n]=n+1, \forall\, n \in \{1,2,3\}$.

Pentru $n \geq 4$ vom arăta că $[S_n]=n+2$. Într-adevăr, avem $a_n>1$ și $a_{n+1}-a_n=\frac{n(1-a_n)}{a_n+n}<0$, deci șirul este strict descrescător.

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n(a_n-1)}{a_n+n}<\frac{a_n}{n+1}(a_n-1)<\frac{a_n}{n+1}\cdot\frac{a_{n-1}}{n}(a_{n-1}-1)<$$

$$<\cdots<\frac{a_n\cdot a_{n-1}\cdot\ldots\cdot a_4 a_3}{4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot n(n+1)}(a_3-1)<\frac{60{,}31(1{,}31)^{n-2}}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{60{,}31}{(1{,}31)^3}\cdot\frac{(1{,}31)^n}{(n+1)!}<\frac{1}{n(n+1)}, \forall\, n \geq 5 \left(\text{unde } a_3=\frac{43}{33}=1{,}303<1{,}31\right).$$

Prin urmare $a_n<1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}, \forall\, n \geq 5$. Avem

$$S_n<S_4+\sum_{k=5}^{n}\left(1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)<6{,}1+n-4+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}<n+2+\frac{1}{4}<n+3.$$

Dar pe de altă parte $S_n=S_4+a_5+a_6+\cdots+a_n>6+n-4=n+2$ (deoarece $a_k>1$ și $S_4 \cong 6{,}05$), de unde rezultă $[S_n]=n+2, \forall n \geq 4$.

Așadar $[S_n]=\begin{cases} n+1, & n \in \{1,2,3\} \\ n+2, & n \geq 4 \end{cases}$.

Laurențiu Panaitopol, G.M. nr. 3/2004

89*. $\frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{1}{1+a_1+\cdots+a_1^k}, \forall\, k \geq 1$.

$$S=\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1+a_1+\cdots+a_1^k}=\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_1+a_1^2}+$$

$$+\cdots+\frac{1}{1+a_1+\cdots+a_1^m}<m\cdot\frac{1}{1+a_1}=m\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{m}}=m\cdot\frac{m}{m+1}<m.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte $S > m \cdot \frac{1}{1+a_1+\cdots+a_1^m} = \frac{m}{\frac{1-a_1^{m+1}}{1-a_1}} =$

$= \frac{m(1-a_1)}{1-a_1^{m+1}} > m\left(1-\frac{1}{m}\right) = m-1, m-1 < S < m \Rightarrow [S] = m-1.$

Concurs Slovenia, 2003

90***. Dacă $x_m = \frac{(\sqrt{2}+1)^m + (\sqrt{2}+1)^m}{2\sqrt{2}}, y_m = \frac{(\sqrt{2}+1)^m + (\sqrt{2}+1)^m}{2}$ verifică relația $2x_m^2 = y_m^2 + 1 \Rightarrow 2x_m^2 y_m^2 = y_m^4 + y_m^2 \leq (y_m^2+1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y_m^4 < 2x_m^2 y_m^2 < (y_m^2+1)^2, y_m^2 < x_m y_m < y_m^2 + 1 \Rightarrow [x_m y_m \sqrt{2}] = y_m^2.$

Laurențiu Panaitopol

91***. Evident pentru $x \in \mathbb{Z}, f(n) = \{x \cdot 2^n\} = 0$, deci este constantă deoarece $\{(x+1)2^n\} = \{x2^n + 2^n\} = \{x \cdot 2^n\}$.
Este suficient să găsim $x \in (0,1)$ pentru care f este strict crescătoare.
Avem $\{x \cdot 2^{n+1}\} \geq \{x \cdot 2^n\} \Leftrightarrow 2x \cdot 2^n - [x \cdot 2^{n+1}] \geq x \cdot 2^n - [2^n \cdot x] \Rightarrow$
$\Rightarrow x2^n \geq [2x2^n] - [2^n x] = \left[x2^n + \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq x2^n < 1, 0 < x < \frac{1}{2^n},$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, fals. Funcția este monotonă (constantă), pentru $x \in \mathbb{Z}$.

Marius Ghergu, G.M. nr. 5-6/2002

92***. Prin calcul se obține $x_2 = 4, x_3 = 5, x_4 = 7, x_5 = 9, x_6 = 12, x_7 = 16$.
Prin inducție rezultă $x_n \geq 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr, avem $x_1 = 3 \geq 3$ și dacă $x_n \geq 3 \Rightarrow x_{n+1} = [x_n\sqrt{2}] \geq 4 \geq 3$. Avem $x_{n+1} - x_n = [x_n\sqrt{2}] - x_n >$
$> x_n\sqrt{2} - 1 - x_n = x_n(\sqrt{2}-1) - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul este strict crescător. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât x_n, x_{n+1}, x_{n+2} sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice, deci
$2x_{n+1} = x_n + x_{n+2} \Rightarrow 2[x_n\sqrt{2}] = x_n + [[x_n\sqrt{2}]\sqrt{2}] \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x_n\sqrt{2} > 2[x_n\sqrt{2}] = x_n + [[x_n\sqrt{2}]\sqrt{2}] > x_n + [x_n\sqrt{2}]\sqrt{2} - 1 >$
$> x_n + (x_n\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} - 1 = 3x_n - 1 - \sqrt{2}.$
Prin urmare, rezultă $(3-2\sqrt{2})x_n < 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x_n < 16 = x_7$.
Folosind monotonia șirului, rezultă $n \leq 6$. Analizând primii șase termeni ai șirului, se observă că singurele posibilități sunt $n = 1$ și $n = 3$, (3,4,5); (5,7,9).

Radu Gologan, O.N./2000

93***. Se arată ușor, prin inducție, că $x_n > 4$ și că șirul este strict crescător, adică $x_n < x_{n+1}$. Pentru ca termenii x_n, x_{n+1}, x_{n+2} să formeze o progresie aritmetică se impune ca $2x_{n+1} = x_n + x_{n+2} \Leftrightarrow 1 = \frac{x_{n+1}}{x_n}\left(2 - \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\right)$ (*).

Scanned with OKEN Scanner

Evident din relația dată mai rezultă că $x_{n+1} = \left[\sqrt[3]{2}x_n\right] \leq \sqrt[3]{2}x_n$,

$1 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \sqrt[3]{2}$ și $\sqrt[3]{2}x_n - 1 < \left[\sqrt[3]{2}x_n\right] = x_{n+1} \Rightarrow \sqrt[3]{2} - \frac{1}{x_n} < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \sqrt[3]{2}$.

Atunci utilizând $(*)$ avem:

$$1 = \frac{x_{n+1}}{x_n}\left(2 - \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\right) < \sqrt[3]{2}\left(2 - \sqrt[3]{2} + \frac{1}{x_{n+1}}\right) \Rightarrow x_{n+1} < \frac{\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^2} =$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right)^2 = 18{,}051\ldots.$$

Prin urmare $x_{n+1} = 18$.

Calculând, găsim $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 6, x_4 = 7, x_5 = 8, x_6 = 10, x_7 = 12$, $x_8 = 15$, dar $x_9 = 18, x_{10} = 22$. Așadar până la x_{10} găsim progresii aritmetice ($x_{10} = 22 > 18 \cdot 5$, absurd).

Pentru $n = 1 \Rightarrow \div\ x_1, x_2, x_3$.

Pentru $n = 2 \Rightarrow \div\ x_2, x_3, x_4$.

Pentru $n = 3 \Rightarrow \div\ x_3, x_4, x_5$.

Pentru $n = 4 \Rightarrow \div\ x_5, x_6, x_7$.

Pentru $n = 5 \Rightarrow \div\ x_7, x_8, x_9$.

Așadar pentru $n = 1,2,3,5,7$ sunt cinci progresii.

Mihaly Bencze

94***. Să presupunem că nu există o infinitate de termeni, puteri ale lui 2 ai șirului dat. Fie $n_0 \in \mathbb{N}^*$ rangul superior al puterilor care se găsesc în șir, fie el $n_0 - 1$, adică cel mai mic $n_0 \in \mathbb{N}$ pentru care 2^{n_0} nu mai aparține șirului, dar 2^{n_0-1} este în șir. Cum $1 < \sqrt{2} < 2$ diferența a doi termeni consecutivi din șir este cel mult 2 și cel puțin 1.

Prin urmare această diferență poate fi numai 1 sau 2. Avem pentru $m \in \mathbb{N}$ egalitățile $\left[m\sqrt{2}\right] = 2^{n_0-1}$ sau $\left[(m+1)\sqrt{2}\right] = 2^{n_0} + 1$. Vom demonstra lema.

Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem $\left[2^k m\sqrt{2}\right] = 2^{n_0+k} - 1$ și $\left[(2^k m + 1)\sqrt{2}\right] = 2^{n_0+k} + 1$.

Soluție Prin inducție, pentru $k = 0$ este evident. Presupunem afirmația adevărată pentru k și o vom demonstra pentru $k + 1$.

$2^k m\sqrt{2} < 2^{n_0+k} \Rightarrow 2^{k+1} m\sqrt{2} < 2^{n_0+k+1}$ (1).

Avem $\left[(2^k m + 1)\sqrt{2}\right] > 2^{n_0+k} + 1 \Rightarrow 2^k m\sqrt{2} > 2^{n_0+k} - (\sqrt{2} - 1)$, deci $2^{k+1} m\sqrt{2} > 2^{n_0+k+1} - 2(\sqrt{2} - 1) > 2^{n_0+k+1} - 1$ (2).

Din (1) și (2) rezultă că $\left[2^{k+1} m\sqrt{2}\right] = 2^{n_0+k+1} - 1$ și $\left[(2^{k+1} m + 1)\sqrt{2}\right] = 2^{n_0+k+1}$ sau $\left[(2^{k+1} m + 1)\sqrt{2}\right] = 2^{n_0+k+1} + 1$. Dar din ipoteza noastră nu putem avea $\left[(2^{k+1} m + 1)\sqrt{2}\right] = 2^{n_0+k+1}$, deci avem

Scanned with OKEN Scanner

$[(2^{k+1}m+1)\sqrt{2}] = 2^{n_0+k+1}+1$, de unde rezultă lema.

Continuăm demonstrația problemei noastre.

Cum $\sqrt{2} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow m\sqrt{2} = 2^{n_0}-\alpha$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

Fie $\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu $\alpha > \frac{1}{2^\varepsilon}$. Atunci vom avea $2^\varepsilon m\sqrt{2} = 2^{n_0+\varepsilon} - \alpha 2^\varepsilon < 2^{n_0+\varepsilon}-1$, în contradicție cu lema de mai sus. Prin urmare presupunerea făcută este falsă, și deci, există o infinitate de termeni ai șirului, puteri ale lui 2.

95***. Considerăm ecuația $2x^2 = y^2+1$ și fie

$$x_m = \frac{(\sqrt{2}+1)^m + (\sqrt{2}-1)^m}{2\sqrt{2}} \text{ și } y_m = \frac{(\sqrt{2}+1)^m - (\sqrt{2}-1)^m}{2}, m \text{ impar.}$$

Evident $x_m, y_m \in \mathbb{N}$ și $2x_m^2 = y_m^2+1$ (alegerea lui x_m, y_m rezultă din rezolvarea ecuației Pell). Avem $2k^2x_m^2 = k^2y_m^2 + x^2 < (ky_m+1)^2$ pentru

$y_m > \frac{k^2-1}{2k}$ (1) și cum $2k^2x_m^2 > k^2y_m^2 \Rightarrow ky_m < kx_m\sqrt{2} < ky_m+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [kx_m\sqrt{2}] = ky_m$, deci condiția (1) este îndeplinită. Rezultatul este evident deoarece $y_m \to \infty$.

Laurențiu Panaitopol

96***. Dacă $a_0 \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru $a_0 > 1, a_0 = n+\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}, \varepsilon \in (0,1) \Rightarrow a_0 > a_1 > a_2 \ldots$ șirul nu este periodic, decât dacă $a_0 = 0$.

Pentru $a_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_n = -\frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Pentru $a_0 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ șirul este periodic cu perioada $T = 2$.

Pentru $a_0 < -1$, folosind relația $[-x] = -1-[x]$ rezultă că șirul este crescător (pentru că (a_n) este descrescător). Deci șirul este periodic, doar pentru $a_0 \in (-1,0]$ cu perioada $T = 2$.

97***. $\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} - \frac{2}{n} \geq [\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}]$.

Demonstrăm că $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \geq \frac{1}{n}$. Fie $n = k^2+r, 1 \leq r < 2k$.

$$\sqrt{k^2+r}-k \geq \frac{1}{k^2+r} \Leftrightarrow \sqrt{k^2+r} \geq \frac{k^3+kr+1}{k^2+r} \Leftrightarrow (k^2+r)^3 \geq$$
$$\geq (k^3+kr+1)^2 \Leftrightarrow k^6+3k^4r+3k^2r^2+r^3 \geq$$
$$\geq k^6+k^2r^2+1+2k^4r+2k^3+2kr \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k^4r-2k^3+2k^2r^2-2kr+r^3-1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k^3(kr-1)+2kr(kr-1)+r^3-1 \geq 0 \quad \text{(A)}.$$

Analog $\sqrt[3]{n} - [\sqrt[3]{n}] \geq \frac{1}{n}$, pentru $n = k^3+r, 1 \leq r \leq 3k^2+3k, \forall n \in \mathbb{N}$,

Scanned with OKEN Scanner

$n \geq 3, n \neq k^6, k \in \mathbb{N}^*$. E suficient să arătăm, doar pentru $r = 1$.
Pentru $n = k^2$ sau $n = k^3$ este falsă.

Octogon vol. 24(2)/2016, PP 26-207

98***. Rezultă $a_n = (a_n - 1) < -a_{n+1} < 0 \Rightarrow a_n + (0,1) \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n(1 - a_n) > a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{a_n(1-a_n)} < \frac{1}{a_{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{a_n} + \frac{1}{1-a_n} < \frac{1}{a_{n+1}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{1-a_n} < \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$.

Însumând rezultatele $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-a_n} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_2} + \cdots + \frac{1}{1-a_{n-1}} < \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1}$ și cum $\frac{1}{1-a_i} > 1$,
$i = \overline{1, n-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_1} + \frac{1}{1-a_1} + \cdots + \frac{1}{1-a_{n-1}} > 1 + n - 1 = n \Rightarrow \frac{1}{a_n} > n \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 < na_n < 1 \Rightarrow [na_n] = 0$.

Iuliana Dima, O.L. Galați, 2009

99***. Soluția 1
Presupunem contrariul, deci șirul este periodic, de perioadă $T > 0$ și deci începând de la un rang n_0 rezultă $a_{n+T} = a_n, \forall\, n \geq n_0$.
Definim un șir crescător $(b_n)_{n\geq 1}, b_n = [\alpha^{n+T}] - [\alpha^n]$ și $b_n \in \mathbb{N}$. Să calculăm valoarea expresiei:
$b_{n+1} - \alpha b_n = [\alpha^{n+1+T}] - [\alpha^{n+1}] - \alpha[\alpha^{n+T}] + \alpha[\alpha^n] = a_{n+T} - a_n = 0$.
Prin urmare șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică de numere naturale cu rația $\alpha > 1$, număr neîntreg. Dacă $b_1 \neq 0$, rezultă o contradicție. Dacă $b_1 = 0$ atunci $b_{kT+1} = 0, \forall\, k \in \mathbb{N}$, deci $[\alpha^{kT+1}]$ este constant, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, absurd. Așadar, presupunerea că $(a_n)_{n\geq 1}$ este periodică este falsă.

Concurs Japonia, 1996

100***. Avem $n\sum_{i=1}^{k} a_i - k < \sum_{i=1}^{n} [na_i] = [na_{k+1}] \leq na_{k+1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i - \frac{k}{n} \leq a_{k+1}$ (1). Analog avem $\sum_{i=1}^{k} [na_i] \leq n\sum_{i=1}^{k} a_i$.
Rezultă $na_{k+1} - 1 < [na_{k+1}] \leq \sum_{i=1}^{k} a_i \Rightarrow a_{k+1} - \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^{k} a_i$ (2). Din (1) și (2) rezultă $\sum_{i=1}^{k} a_i < \frac{k}{n} \leq a_{k+1} \leq \sum_{i=1}^{k} a_i + \frac{1}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i = a_{k+1}$.

Scanned with OKEN Scanner

101***. Se știe că $\{a+b\}-\{a\}\in\{\{a\},\{a\}-1\}$, oricare ar fi numerele $a,b\in\mathbb{R}$. Aplicând în cazul nostru rezultă $|a_{n+1}-a_n|=\{\alpha\}$ sau $|a_{n+1}-a_n|=1-\{\alpha\}$ și dacă $M=\max x\{\{a\},1-\{a\}\}\Rightarrow 0<M<1\Rightarrow$ $\Rightarrow |x_n|\le M^n\to 0\Rightarrow |x_n|\to 0$.

Marian Cucoaneș, O.J., 2011

102***. a) Se procedează prin reduce la absurd. Arătăm că $a_n\notin\mathbb{Q},\forall\, n\ge 2$. Evident $a_2=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$. Presupunând că $a_n\notin\mathbb{Q}$, dacă $a_{n+1}\in\mathbb{Q}$, atunci din relația $a_n=a_{n+1}^2-n^2$ rezultă $a_n\in\mathbb{Q}$, fals.
Prin urmare $a_{n+1}\notin\mathbb{Q}$. Singurul număr rațional din A este $a_1=1$.

b) Avem $a_n=\sqrt{a_{n-1}+(n-1)^2}>\sqrt{(n-1)^2}=n-1$ și prin inducție se deduce că $a_n<n$.
Prin urmare din $n-1<a_n<n\Rightarrow [a_n]=n-1,\forall\, n\ge 2$.

c) Avem $a_n^2=a_{n-1}+(n-1)^2\Rightarrow [a_n^2]=[a_{n-1}]+(n-1)^2=$
$=n-2+(n-1)^2=n^2-n-1\Rightarrow$

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}[a_n^2]=3+\sum_{k=3}^{n}[a_n^2]=3+\sum_{k=3}^{n}(k^2-k-1)=\frac{n^3-4n+9}{3},$$

$$S_2=1+\sum_{k=2}^{n}[a_k]^2=1+\sum_{k=2}^{n}(k-1)^2=1+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Concursul „Nicolae Coculescu", 2008

103***. Notăm $y_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$ și egalitatea se scrie $[\sqrt{y_{n+1}}]=[\sqrt{y_n+1}]$, cu $y_1=1$. Pentru $n=2$,
$[\sqrt{y_2}]=[\sqrt{4{,}11}]=[\sqrt{2}]=1$, unde $1\le\sqrt{y_2}<\sqrt{2}\Rightarrow 1\le y_2<2^2$.
Vrem să arătăm că $y_n\le n^2,\forall\, n\ge 1$.
Presupunând că $y_{k-1}<(k-1)^2\Rightarrow y_{k-1}+1<k^2=\sqrt{y_{k-1}+1}<k\Rightarrow$
$\Rightarrow [\sqrt{y_{k-1}+1}]<k\Rightarrow [\sqrt{y_k}]<k\Rightarrow y_k<k^2$. Așadar $y_k<n^2$.
Pentru $n=2\Rightarrow x_1+x_2\le 4$, deci există $x_{i_1}\in\{x_1,x_2\}$ astfel încât
$x_{i_1}\le 2\Rightarrow x_{i_1}\le 2\Rightarrow\frac{1}{x_{i_1}}\ge\frac{1}{2}$. La fel din $x_1+x_2+x_3+x_4=4^2$ rezultă că
există $x_{i_2}\le\frac{4^2}{3}\Rightarrow\frac{1}{x_{i_2}}\ge\frac{3}{4^2}, x_{i_2}\in\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$.
Se continuă din „aproape în aproape" cu $x_1+x_2+\cdots+x_{2n}\le 4n^2$, rezultă că există $x_{i_n}\notin\{x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{n-1}}\}$ astfel încât
$(2n-1)x_{i_n}\le 4n^2\Rightarrow\frac{1}{x_{i_n}}\ge\frac{2n-1}{4n^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Obținem $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{2n}}\geq\frac{1}{x_{i_1}}+\frac{1}{x_{i_2}}+\cdots+\frac{1}{x_{i_n}}>\frac{1}{2}+\frac{3}{4^2}+\cdots+\frac{2n-1}{4n^2}$

$=\frac{2}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

Cum șirul $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ este nemărginit și $1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ este mărginit, rezultă că șirul $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$ este nemărginit.

Așadar șirul $(x_n)_{n\geq1}$ conține un subșir nemărginit; deci este nemărginit.

Marius Drăgan

104***. a) Avem $x_n=\frac{n+1}{n}x_{n-1}-\frac{x_{n-1}}{n}+\left[\frac{x_{n-1}}{n}\right]=x_{n-1}+\left[\frac{x_{n-1}}{n}\right]\Rightarrow$

$\Rightarrow x_n=x_{n-1}+\left[\frac{x_{n-1}}{n}\right]$ și $x_1=x_0+[x_0]=a+[a]$,

$x_2=x_1+\left[\frac{x_1}{2}\right]=a+[a]+\left[\frac{1[a]+\{a\}}{2}\right]=a+2[a]$

și prin inducție se deduce că $x_n=a+n[a]$.

b) Avem $x_k-x_{k-1}=\left[\frac{x_{k-1}}{k}\right]\Rightarrow x_1-x_0=[x_0]$,

$x_2-x_1=\left[\frac{x_1}{2}\right]$,

... ...

$x_n-x_{n-1}=\left[\frac{x_{n-1}}{n}\right]$,

$x_n=x_0+[x_0]+\left[\frac{x_1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{x_{n-1}}{n}\right]=a+[a]+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{x_{k-1}}{k}\right]$,

dar, cum $x_n=a+n[a]\Rightarrow n[a]=\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{x_{k-1}}{k}\right]$.

Dar $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x_{k-1}}{k}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{[a]+(k-1)[a]}{k}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{[a]+(k-1)[a]+\{a\}}{k}\right]=$

$=\sum_{k=1}^{n}[a]=n[a]$.

Concursul „Traian Lalescu", 2013, enunț simplificat și adaptat

105***. Considerăm funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(n)=\sqrt{3+x^3}-1$ care este strict crescătoare și $a_0\geq0 f(a_0)>f(0)>0$ și deci $a_n>0$.

Scanned with OKEN Scanner

Calculăm $a_1 - a_0 = \sqrt{3 + a_0^3} - 1 - a_0 = \dfrac{a_0^3 - a_0^2 - a_0 + 2}{\sqrt{a_0^3 + 3} + a_0 + 1} =$

$= \dfrac{(a_0 - 1)(a_0 - \sqrt{2})(a_0 + \sqrt{2})}{\sqrt{a_0^3 + 3} + a_0 + 1}$ $(*)$, se disting cazurile:

a) $a_0 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$ și prin inducție rezultă $a_n = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$;

b) $a_0 = \sqrt{2} \Rightarrow a_1 = \sqrt{2}$ și prin inducție rezultă $a_n = \sqrt{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}$;

c) $a_0 \in (0,1)$, atunci din $(*)$ rezultă $a_1 > a_0 \Rightarrow f(a_1) > f(a_0) \Rightarrow a_2 > a_1$ și prin inducție rezultă că șirul este strict crescător, dar din $a_0 < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a_0) < f(1) = 1 \Rightarrow a_1 < 1$ și prin inducție rezultă $0 < a_n < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [a_n] = 0$;

d) $a_0 \in (1, \sqrt{2}) \Rightarrow a_1 - a_0 < 0 \Rightarrow a_1 < a_0$ și $f(a_1) < f(a_0) \Rightarrow a_2 < a_1$, se deduce că șirul este strict descrescător.

Din $1 < a_0 < \sqrt{2} \Rightarrow f(1) < f(a_0) < f(\sqrt{2}), 1 < a_1 < \sqrt{2}$, prin inducție se deduce că $1 < a_n < \sqrt{2} \Rightarrow [a_n] = 1$.

Marcel Chiriță, enunț parțial

106***. Evident $a_n > 0$ și din relația dată rezultă: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_n}{2 + a_n} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$, șirul este strict descrescător.

Avem $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{335} > a_{336}$ și $a_{n+1} - a_n = \dfrac{-2a_n}{2 + a_n} =$

$= -2 + \dfrac{4}{2 + a_n} < 0$, deoarece din $a_n \geq 2 \Rightarrow 0 < \dfrac{4}{2 + a_n} < 1$,

$a_n - a_0 = -2n + 4\left(\dfrac{1}{a_0 + 2} + \dfrac{1}{a_1 + 2} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1} + 2}\right)$ (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = 2012 - 2n + 4\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{a_k + 2} = 2012 - 2n + 4S$ (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_{335} = 1342 + 4S$ (3), unde $4S = \sum_{k=0}^{335} \dfrac{4}{2 + a_k} < 336 \cdot \dfrac{4}{2 + a_{335}} =$

$= \dfrac{1344}{2 + a_{335}} = \dfrac{1344}{1344 + 4S} < 1 \Rightarrow 0 < 4S < 1.$

Aplicând partea întreagă în (2) rezultă $[a_n] = [2012 - 2n + 4S] =$

$= 2012 - 2n$ (întrucât $4S < 1$), unde $n \in \{0,1, \ldots, 355\}$.

107***. De remarcat că șirul este crescător. Presupunem prin absurd că șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ este periodic, deci există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ și $T > 0$ astfel încât $y_{n+T} = y_n$, $\forall\, n \geq n_0$, adică $(-1)^{x_{n+T}} = (-1)^{x_n}$, deci numerele naturale

Scanned with OKEN Scanner

x_{n+T} și x_n sunt de aceeași paritate. Vom exprima diferența $x_{n+T} - x_n$ în funcție de $x_{n_0+T} - x_{n_0}$, deci:

$$x_{n+T} - x_n = \left[\frac{3x_{n+T-1}}{2}\right] - \left[\frac{3x_{n-1}}{2}\right] = \frac{3}{2}(x_{n-1+T} - x_{n-1}) -$$

$$-\left(\left\{\frac{3x_{n+T-1}}{2}\right\} - \left\{\frac{3x_{n-1}}{2}\right\}\right) = \frac{3}{2}(x_{n-1+T} - x_{n-1}) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-n_0}(x_{n-1+T} - x_{n-1}),$$

care nu poate avea loc în condițiile date (de remarcat, că cele două părți fracționare sunt egale).

Moscova, 1977

108***. Evident șirul este strict crescător. Putem calcula câte valori ale șirului {2,3,4,6,9,13,19,28,42, ... }.

Fie x_p un termen par al șirului, atunci $x_p = 2^k(2m+1), k, m \in \mathbb{N}^*$ și din relația de definiție rezultă:

$x_{p+1} = \left[\frac{3x_p}{2}\right] = [3 \cdot 2^{k-1}(2m+1)]$ și

$x_{p+2} = [3 \cdot 2^{k-2}(2m+1)]$ ș. a. m. d. rezultă

$x_{p+k} = [3^k(2m+1)]$ un termen impar al șirului.

Fie x_q un termen impar, adică:

$$x_q = 2^k(2m+1) + 1 \Rightarrow x_{q+1} = \left[\frac{3 \cdot 2^k(2m+1) + 3}{2}\right] =$$

$$= \left[3 \cdot 2^{k-1}(2m+1) + \frac{3}{2}\right] = 3 \cdot 2^{k-1}(2m+1) + 1$$

și după k pași rezultă $x_{q+k} = 3^k(2m+1) + 1$ care este par.

Fiind un șir crescător de numere naturale trebuie să existe o infinitate de numere naturale pare, fie o infinitate de numere naturale impare. Din demonstrația de mai sus rezultă că odată cu o infinitate de numere (pare sau impare) există o infinitate (impare sau pare).

Moscova,1987

109***. Avem $\left(a_{n+1} - a_n\sqrt{1+a^2}\right)^2 = a^2(1+a_n^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{n+1}^2 - 2a_n a_{n+1}\sqrt{1+a^2} + a_n^2(1+a^2) = a^2(1+a_n^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - \left(2\sqrt{1+a^2}a_{n+1}\right) \cdot a_n + a_{n+1}^2 - a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{1+a^2} \cdot a_{n+1} \pm a\sqrt{1+a_{n+1}^2}$$

și cum $a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_n = \sqrt{1+a^2} \cdot a_{n+1} - a\sqrt{1+a_{n+1}^2}$, dar

$a_{n+2} = \sqrt{1+a^2} \cdot a_{n+1} + a\sqrt{1+a_{n+1}^2}$ rezultă că

$a_n + a_{n+2} = 2\sqrt{1+a^2} \cdot a_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum $\sqrt{1+a^2} \notin \mathbb{Q}$, atunci cel puțin unul dintre oricare trei termeni consecutivi ai șirului dat este număr irațional.

Deci printre primii m termeni ai acestui șir există cel puțin $\left[\frac{m}{3}\right]$ numere iraționale.

Titu Andreescu, R.M.T., 1982

110.*** Din relația dată rezultă:
$(2x_{n+1} - 3x_n)^2 = 5x_n^2 - 4 \Rightarrow x_{n+1}^2 - 3x_n x_{n+1} + x_n^2 = -1$ (1).
Cu substituția $n \to n-1$ rezultă $x_n^2 - 3x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2 = -1$ (2).
Scăzându-le rezultă $x_{n+1}^2 - 3x_n(x_{n+1} - x_{n-1}) + x_{n-1}^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} - 3x_n + x_{n-1}) = 0.$
Dar din definiția șirului rezultă că $x_{n+1} \geq \frac{3}{2}x_n > x_n$, deci șirul este strict crescător și prin urmare avem: $x_{n+1} - 3x_n + x_{n-1} = 0 \Rightarrow x_{n+1} =$
$= 3x_n - x_{n-1}$, cu $x_0 = 1, x_1 = 2 \Rightarrow x_n \in \mathbb{N}$ și $[x_n] = x_n$.
Din ultima relație de recurență se poate deduce și termenul general x_n.

111***. Calculând primii termeni rezultă $(a_n) = \{1,2,3,5,7,10,13,17, \ldots\}$.
Se demonstrează că:

$$a_n = 1 + \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] = \begin{cases} m^2+1, & \text{dacă } n = 2m, m \in \mathbb{N}^* \\ m^2+m+1, & \text{dacă } n = 2m+1, m \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Într-adevăr:

a) $n = 2m \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{2m+1} = a_{2m} + \left[\sqrt{a_{2m}} + \frac{1}{2}\right] = m^2 + 1 + \left[\sqrt{m^2+1} + \frac{1}{2}\right] = m^2 + m + 1,$$

întrucât $m < \sqrt{m^2+1} < m + \frac{1}{2}$;

b) $n = 2m+1 \Rightarrow a_{m+2} = a_{2m+1} + \left[\sqrt{a_{2m+1}} + \frac{1}{2}\right] =$

$$= m(m+1) + 1 + \left[\sqrt{m(m+1)+1} + \frac{1}{2}\right] = m^2 + m + 1 + m + 1 =$$

$= (m+1)^2 + 1$, întrucât $m + \frac{1}{2} < \sqrt{m^2+m+1} < m+1$.

Prin urmare, $a_{2m+1} = m^2 + m + 1$ și $a_{2m} = m^2 + 1$, deci niciunul dintre termeni nu poate fi pătrat perfect $(m^2 < a_{2m},\ a_{2m+1} < (m+1)^2)$ în afară de cazul $a_1 = 1$. Răspuns, $n = 1$.

Concursul Nordic, 2013

112***. Dacă $x \in \mathbb{Z}$ atunci $nx \in \mathbb{Z}$, deci $a_n = nx, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $a_{n+1} - a_n = x, \forall\, x \in \mathbb{N}^*$, deducem că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică cu rația x. Reciproc, dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică cu rația r avem $a_{n+1} - a_n = r, \forall\, x \in \mathbb{N}^*$. Cum $r = a_2 - a_1 = [2x] - [x]$, rezultă că $r \in \mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $b_n = \{nx\}, n \in \mathbb{N}^*$. Avem $b_n \in [0,1), \forall \in \mathbb{N}^*$, deci șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu rația $x - r$ și cum $(b_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, rezultă că $x - r = 0$, adică $x = r \in \mathbb{Z}$.

Mihai Piticari, Dan Ștefan Marinescu

113***. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = \{nx\}$ șirul din enunț.
Dacă $x \in \mathbb{Z}$ atunci $nx \in \mathbb{Z}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ și $a_n = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Orice șir constant este monoton. Reciproc, să presupunem că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton.
Atunci (I) $a_{n+1} - a_n \geq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ sau (II) $a_{n+1} - a_n \leq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Dacă $[x] = a$ și $\{x\} = b$, atunci $x = a + b, a \in \mathbb{Z}, b \in [0,1)$.
$\{nx\} = \{na + nb\} = \{nb\} \Rightarrow a_n = \{nb\}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ și $a_{n+1} - a_n =$
$= b + [nb] - [(n+1)b], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left.\begin{array}{r} nb - 1 < [nb] \leq nb \\ -nb - b \leq -[(n+1)b] < -nb - b + 1 \end{array}\right\}\oplus$$
$$-b - 1 < [nb] - [(n+1)b] < -b + 1$$

Cum $b \in [0,1)$ și $[nb] - [(n+1)b] \in \mathbb{Z}$ rezultă că $[nb] - [(n+1)b] \in$
$\in \{0, -1\}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, $a_{n+1} - a_n \in \{b, b-1\}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Dacă există $m \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a_{m+1} - a_m = 0 \Rightarrow 0 \in \{b, b-1\}$ și cum $b \in [0,1)$ obținem $b = 0$, adică $x \in \mathbb{Z}$. În caz contrar avem de analizat două cazuri:

a) $a_{n+1} - a_n > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

Atunci $a_{n+1} - a_n = b, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, adică șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică cu rația $b > 0$. Obținem $a_n = nb, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Cum $a_n \in [0,1)$, deducem că $n > \frac{1}{b}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, absurd!

b) $a_{n+1} - a_n < 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Atunci $a_{n+1} - a_n = b - 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, adică șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică cu rația $b - 1$. Obținem $a_n = n(b-1) + 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Cum $a_n \in [0,1)$, deducem că $n \leq \frac{1}{1-b}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, absurd!

114***. Evident $x_n \in [0,1)$ dacă $2x_0 < 1$. Observăm că

$$x_1 = \{2x_0\} = \begin{cases} 2x_0, & \text{dacă } 2x_0 < 1 \\ 2x_0 - 1, & \text{dacă } 2x_0 \geq 1 \end{cases}$$

și $x_n = \{2x_{n-1}\} = \begin{cases} 2x_{n-1}, & \text{dacă } 2x_{n-1} < 1 \\ 2x_{n-1} - 1, & \text{dacă } 2x_{n-1} \geq 1 \end{cases}, x_1 = \{2x_0\},$

$$x_2 = \{2x_1\} = \{2\{2x_0\}\} = \begin{cases} \{2\{2x_0\}\}, & \text{dacă } 2x_0 < 1 \\ \{2\{2x_0 - 1\}\}, & \text{dacă } 2x_0 \geq 1 \end{cases} = \{2^2 x_0\}.$$

Prin urmare, se deduce $x_n = \left\{2\left\{2\left\{2 \ldots \{2\{2x_0\}\}\right\}\right\}\right\} = \{2^n x_0\}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci $x_0 = \{2^5 x_0\} = \{32x_0\} \Rightarrow x_0 \in \left\{0, \frac{1}{31}, \frac{2}{31}, \dots, \frac{30}{31}\right\}$.

Așadar sunt 31 de soluții.

A.H.S.M.E., 1993

115***. Dacă notăm cu $a_n = \frac{n^2}{1980}$ atunci $a_{n+1} - a_n = \frac{2n+1}{1980}$.

Considerăm cazurile:

a) $\frac{2n+1}{1980} < 1 \Rightarrow n \leq 989$, atunci printre cei 989 termeni ai șirului $[a_n]$, $[a_n] \in \left\{0,1, \dots, \left[\frac{989^2}{1980}\right]\right\}$ numărul valorilor distincte este $1 + \left[\frac{989^2}{1980}\right] = 495$ (desigur, multe valori ale șirului $[a_n]$ se repetă).

b) Dacă $\frac{2n+1}{1980} > 1 \Rightarrow n \geq 990$, atunci toți termenii șirului $[a_{990}], [a_{990}], \dots, [a_{1980}]$ sunt diferiți. Numărul lor este 991. Numărul termenilor diferiți este 495+991=1486.

Leningrad, 1980

116***. Fie $a_k = \frac{k^2}{1998}$ și $b_k = \left[\frac{k^2}{1998}\right]$.

Cum $a_{k+1} - a_k = \frac{2k+1}{1998} < 1 \Leftrightarrow k < \frac{1997}{2} \Rightarrow k \leq 998$. Avem $b_{999} = 499$. Așadar, pentru $k = \overline{1,999}$ se obțin pentru b_k toate numerele 0,1,2,...,499. Pentru $k > 999$ rezultă $a_{k+1} - a_k \geq 1$. Prin urmare, pentru $p \neq q \Rightarrow$ $\Rightarrow b_p \neq b_q$ deci numerele $b_k, k = \overline{1000,1997}$ sunt toate distincte în număr de 998. În total avem 998+500=1498 termeni distincți.

Balcaniada de matematică, Grecia, 1998

117***. Notăm

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n - (x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1) =$
$= x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + \dots + x_n(1 - x_1)$ și din condiția
$0 \leq x_k \leq 1, k = \overline{1,n}$ rezultă că (întrucât $2ab \leq a + b, \forall\, a, b \in [0,1)$)
$2F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n + (1 - x_1 + 1 - x_2 + \dots + 1 - x_n) =$
$= n \Rightarrow F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{n}{2}$ (*).

Fixând variabilele $x_2, x_3, \dots, x_n$, atunci funcția $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ este o funcție de gradul întâi și care își atinge maximul în capetele intervalului [0,1], adică $f(x) \leq \max\{f(0), f(1)\}$,

Scanned with OKEN Scanner

$\forall x \in [0,1]$. Prin inducție se arată că expresia $F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, cu $0 \leq x_k \leq 1, k = \overline{1,n}$ ia valoarea maximă în unul din cazurile $x_k = 0$ sau $x_k = 1$, deci acest maxim este număr întreg.

Așadar, $F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \leq \left[\frac{n}{2}\right]$, unde valoarea $\left[\frac{n}{2}\right]$ se realizează dacă se ia $x_k = 1$, pentru k impar și $x_k = 0$ pentru k par, $k = \overline{1,n}$.

Olimpiada „Republica Moldova", 1996

118***. a) $n \leq x_1 < n+1,\ n+1 \leq x_2 < n+2, \ldots, 2n-1 \leq x_n < 2n \Rightarrow$
$\Rightarrow n + (n+1) + \cdots + (2n-1) \leq S < (n+1) + (n+2) + \cdots + 2n \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{n(3n-1)}{2} \leq S < \frac{n(3n+1)}{2} \Rightarrow [S] \in \left[\frac{n(3n-1)}{2}, \frac{n(3n+1)}{2} - 1\right]$,
interval ce conține n numere naturale, deci $[S]$ are n valori naturale (S este o funcție continuă în $x_1, x_2, \ldots, x_n$);

b) Valoarea maximă a lui $[S] = 39 = \frac{n(3n+1)}{2} - 1 \Rightarrow n = 5$

și de exemplu se pot lua $x_1 = 5 + \frac{4}{5}, x_2 = 6 + \frac{4}{5}, x_3 = 7 + \frac{4}{5}, x_4 = 8 + \frac{4}{5}$,
$x_5 = 9 + \frac{4}{5} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 39 \Rightarrow [S] = 39$.

Există o infinitate de posibilități pentru x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

G.M. nr. 5/2011

119***. Avem $a_1 = b_1 = 1$, iar dacă $n+1$ nu este pătrat perfect avem $a_{n+1} = a_n$ și $a_{n+1} = a_n + 1$, dacă $n+1$ este pătrat perfect.

Rezultă că paritatea termenilor șirului (a_n) se schimbă atunci când rangul este pătrat perfect.

Evident $\left[\frac{n}{k}\right]$ reprezintă câtul împărțirii lui n la k și pentru orice $k \in \overline{1,n+1}$, $\left[\frac{n+1}{k}\right] - \left[\frac{n}{k}\right]$ este fie zero, dacă $k \nmid (n+1)$, fie 1 dacă $k \mid n+1$.

Prin urmare, $b_{n+1} - b_n = \sigma(n+1)$ – numărul divizorilor lui $n+1$. Acesta este impar dacă și numai dacă $n+1$ este pătrat perfect și prin urmare paritatea termenilor șirului (b_n) se schimbă atunci când rangul este pătrat perfect, adică simultan cu al lui (a_n). Așadar a_n și b_n au aceeași paritate, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Gh. Stoica, R.M.T. nr. 1/2015

120***. Egalitatea din enunț se mai poate scrie

$$a_n = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right] = 2 + \left[\frac{n-1}{1}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n-1}{n-1}\right] \quad (1)$$

și după reducerea termenilor rezultă

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n-1}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right] \quad (2).$$

Dar pentru orice k, cu $2\le k\le n-1\Rightarrow\left[\frac{n}{k}\right]\ge\left[\frac{n-1}{k}\right]\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n-1}\right]\ge\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right] \quad (3).$$

Presupunem adevărată egalitatea (1), deci și (2) este adevărată.

Dacă n este număr compus, $n=pq, 2\le p<n$,

atunci $\left[\frac{n}{p}\right]=q>\left[\frac{n-1}{p}\right]>q-1$, deci inegalitatea (3) este strictă,

ceea ce contrazice (2).

Reciproc, fie n număr prim. Se deduce că pentru orice k, cu $2\le k\le n-1$

avem $n=kt+r$, cu $t,r\in\mathbb{N}, 1\le r<k\Rightarrow\left[\frac{n}{k}\right]=t=\left[\frac{n-1}{k}\right]$,

deci egalitățile (2) și (1) sunt adevărate.

Olimpiad[Chișinău, 1997

121***. Arătăm prin inducție că $u_n^2-2v_n^2=1,\forall\, n\in\mathbb{N}$ (1).

Pentru $n=1$ relația este adevărată. Presupunem pentru n adevărată și demonstrăm pentru $n+1$.

Avem $u_{n+1}^2-2v_{n+1}^2=(3u_n+4v_n)^2-2(2u_n+3v_n)^2=u_n^2-2v_n^2=1$.

Arătăm că $2x_n^2-y_n^2=1,\forall\, n\in\mathbb{N}$ (2).

Avem $2x_n^2-y_n^2=2(u_n+v_n)^2-(u_n+2v_n)^2=u_n^2-2v_n^2=1,\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Din (2) $\Rightarrow\left(x_n\sqrt{2}-y_n\right)\left(x_n\sqrt{2}+y_n\right)=1,\forall\, n\in\mathbb{N}$ și cum $x_n\sqrt{2}+y_n>1$,

$0<x_n\sqrt{2}-y_n<1, y_n<x_n\sqrt{2}<y_n+1\Rightarrow\left[x_n\sqrt{2}\right]=y_n,\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Dorin Andrica

122***. Prin inducție se deduce că

$$\left(2^{[\sqrt{n}]}\right)^2<n+4^{[\sqrt{n}]}+3<\left(2^{[\sqrt{n}]}+1\right)^2,\forall\, n\ge 4,$$

adică a_n nu poate fi pătrat perfect oricare ar fi $n\ge 4$.

Se verifică pentru $n\in\{0,1,2,3,4\}$ și se deduce că pentru $n\in\{0,2\}$, a_n este pătrat perfect.

Kazakstan, 2011

123***. Fie șirul $(y_n)_{n\ge1}$, dat de $y_n=\left[\frac{10^n+a-b}{a}\right],\forall\, n\in\mathbb{N}$.

$$10^n=a\left(\frac{10^n+a-b}{a}-1\right)+b<ay_n+b=a\left[\frac{10^n+a-b}{a}\right]\le 10^n+b\Rightarrow$$

$\Rightarrow 10^n=[ay_n+b]<10^n+[b]$.

Cum pentru $n\to\infty$, avem $10^{n-1}>b\ge[b]$, de la un rang n_0 încolo din relația de mai sus rezultă că $x_{y_n}, n\ge n_6$ este 1 plus suma cifrelor unui

Scanned with OKEN Scanner

număr din mulţimea $\{0,1,2,\ldots,[b]\}$, dar cum subşirul $(x_{y_n})_{n\geq 1}$ are un număr infinit de termeni care iau un număr finit de valori, rezultă că acesta din urmă conţine un subşir constant şi cum el însuşi este conţinut în şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ conţine un subşir constant.

Laurenţiu Panaitopol

124***. Se poate deduce că $(a_n) = \{1,4,8,12,17,22,27,32,38,44,\ldots\}$ şi $a_2 = 4 = 2\cdot 2, a_4 = 12 = 3\cdot 2^2,\ a_8 = 32 = 4\cdot 2^3$.

Avem $a_n = (k+1)n$, unde $n = 2^k,\ k = 1,2,3$ (1) şi $a_5 = 17 = 3\cdot 5 + 2$, $a_6 = 22 = 3\cdot 6 + 4,\ a_7 = 27 = 3\cdot 7 + 6$, deci putem deduce că $a_n = (k+1)n + 2m$, unde $n = 2^k + m, k = 2, m = 1,2,3$ (2).

Se poate deduce a_3, a_9, a_{10}. Prin urmare avem:

$a_n = (k+1)n + 2m$ unde $n = 2^k + m$ şi $k, m \in \mathbb{N}^*, 2^k \leq n < 2^{k+1}$ (3).

Utilizând relaţia dată vom deduce relaţia (3).

Considerăm cazurile:

a) $2^k \leq n < n+1 < 2^{k+1}$, atunci

$$a_{n+1} = (k+1)(2^k + m + 1) + 2(m+1) = (k+1)(2^k + m) + 2m + \left[\frac{(k+1)(2^k+m)+2m}{2^k+m}\right] + 2 = a_n + \left[\frac{a_n}{n}\right] + 2;$$

b) $2^k < n < n+1 = 2^{k+1}$. Calculăm $a_n = (k+1)(2^{k+1}-1) + 2(2^{k+1} - 1 - 2^k) = (k+1)(2^{k+1}-1) + 2^{k+1} - 2$.

În acest caz formula de recurenţă se verifică, adică

$$a_{n+1} = (k+2)2^{k+1} = \underbrace{(k+1)(2^{k+1}-1) + 2^{k+1} - 2}_{a_n} + \left[\frac{(k+1)(2^{k+1}-1)+2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1}\right] + 2.$$

Cum $2^{10} < 1997 < 2^{11}\ m = 973 = 1997 - 1024 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{1997} = 11\cdot 1997 + 2\cdot 973 = 23\cdot 913$.

Ţările Baltice, 1997

125***. Observăm că şirul conţine serii de către $6m$ termeni egali. Astfel avem

$$a_2 = a_3 = \cdots = a_7 = 1 = 1^3 \quad \text{(6 termeni)}$$
$$a_8 = a_9 = \cdots = a_{19} = 8 = 2^3 \quad \text{(12 termeni)}$$
$$a_{20} = a_{21} = \cdots = a_{37} = 27 = 3^3 \quad \text{(18 termeni)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{38} = a_{39} = \cdots = a_{61} = 64 = 4^3 \quad \text{(24 termeni)}$$

Aşadar şirul este crescător (constant pe porţiuni). Mai observăm că termenii seriei m, are $6m$ termeni egali cu m^3. Notăm $a_n = m^3$, ultimul

Scanned with OKEN Scanner

termen al celei de-a $m-a$ serie și deci primul termen al celei de-a $m+1$ serie este $a_{n+1}=(m+1)^3$. Prin urmare putem scrie:

$a_n=m^3=\left[\sqrt[3]{a_{n-1}+n-1}\right]^3=\left[\sqrt[3]{m^3+n-1}\right]^3$

și $a_{n+1}=(m+1)^3=\left[\sqrt[3]{a_n+n}\right]^3=\left[\sqrt[3]{m^3+n}\right]^3$,

de unde rezultă:

$m\leq\sqrt[3]{m^3+n-1}<m+1\leq\sqrt[3]{m^3+n}<m+2\Rightarrow$

$\Rightarrow m^3+n-1<(m+1)^3\leq m^3+n\Rightarrow n-1<3m^2+3m+1\leq n\Rightarrow$

$\Rightarrow n=3m^2+3m+1.$

Așadar, indexul ultimului termen de seria $m-a$ este $3m^2+3m+1$ și indexul primului termen al aceleași serii este dat de indexul ultimului termen al celei de-a $m-1$ serie plus 1, adică:

$3(m-1)^2+3(m-1)+1+1=3m^2-3m+2$

sau deoarece fiecare serie are $6m$ termeni rezultă că primul termen din a $m-a$ serie este $3m^2+3m+1-(6m-1)=3m^2-3m+2$.

Prin urmare, indicele termenilor a_n situați în seria $m-a$ verifică condiția

$3m^2-3m+2\leq 3m^2+3m+1, m,n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{-3\sqrt{12n-3}}{6}\leq m\leq\frac{3+\sqrt{12n-15}}{6}$, deci

$m\leq\frac{3+\sqrt{12n-15}}{6}<m+1\Rightarrow m=\left[\frac{3+\sqrt{12n-15}}{6}\right].$

$a_n=m^3\Rightarrow a_n=\left[\frac{3+\sqrt{12n-15}}{6}\right]^3, \forall\, n\geq 2$

b) Întrucât $m^3>3m^2+3m+1$, pentru $m\geq 4$ rezultă că vom verifica pentru $m\in\{2,3\}$. Avem $a_8=8$, $a_{27}=27$ $(a_1=0)$.

Concurs Austria-Polonia, 1993

126***. Soluția 1

$\{3^{3n}a\}=\{27^n a\}, \{3^{3n+1}a\}=\{3\cdot 27^n a\}, \{3^{3n+2}a\}=\{9\cdot 27^n a\}, 27^n=$

$=(26+1)^n=M_{26}+1$. Este normal să luăm pe $a=\frac{p}{26}, p\in\mathbb{N}$, pentru a putea scoate întregii din părțile fracționare.

Rezultă $x_{3n}=\left\{\frac{p}{26}\right\}, x_{3n+1}=\left\{\frac{3p}{26}\right\}, x_{3n+2}=\left\{\frac{9p}{26}\right\}$,

$0<\frac{p}{26}<\frac{1}{3}<\frac{3p}{26}<\frac{2}{3}<\underbrace{\frac{9p}{26}-1}_{\frac{9p}{26}\text{ trece repede de 1 așa că mai scoatem întregi}}<1\Rightarrow$

$\Rightarrow p \in \left(4\frac{22}{27}, 5\frac{21}{27}\right)$ și cum $p \in \mathbb{N} \Rightarrow p = 5$, deci $a = \frac{5}{26}$.

Constantin Caragea

Soluția 2 Fie $a = 0, a_0a_1a_2a_3 \ldots$ scris în bază 3.
$x_{3n} = \{k, a_0\} = \{0, a_0\} \Rightarrow a_0 = 0$. Analog $a_1 = 1, a_2 = 2$ și
$a = 0,(012)_{\text{în bază 3}} = \frac{5}{26}$ (în bază zece).
Și în această soluție rezultă ușor unicitatea lui a.

Ioan Vizireanu S.U.A.

127***. Să presupunem că $a_n \geq n+1, \forall\, n \geq 2$, atunci
$a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n} = a_n + 1 - \frac{1}{n+1}, \forall\, n \geq 2.$
Adunând aceste inegalități pentru $n = \overline{2, m-1}$ rezultă:

$a_m \leq a_2 + m - 2 - \sum_{i=3}^{m} \frac{1}{i}$ și cum $a_m \geq m+1$ avem

$m+1 \leq a_m \leq a_2 + (m-2) - \sum_{i=3}^{m} \frac{1}{i} \Rightarrow a_2 \geq 3 + \sum_{i=3}^{m} \frac{1}{i},$

relație imposibilă, deoarece șirul $\sum_{i=3}^{m} \frac{1}{i}$ este crescător și nemărginit.

Prin urmare există $n \geq 2$ astfel încât $a_n < n+1$ și fie n_0 cel mai mic număr natural, $n_0 \geq 2$ cu această proprietate.
Avem $a_{n_0} < n_0 < n_0 + 1$. Pentru $n_0 \geq 3$, atunci $a_{n_0-1} \geq n_0$ și

$a_{n_0} = a_{n_0-1} + \frac{n_0 - 1}{a_{n_0} - 1} \geq a_{n_0-1} \geq n_0 \Rightarrow n_0 \leq a_{n_0} < n_0 + 1 \Rightarrow [a_{n_0}] = n_0.$

Observație:

Dacă $n_0 = 2 \Rightarrow a_{n_0} = a_2 < 3$ și $a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} \geq 2 \Rightarrow [a_{n_0}] = [a_2] = 2.$
Procedăm prin inducție. Presupunem că $[a_n] = n \Rightarrow n \leq a_n < n+1$ și
atunci $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n} < n + 1 + 1 = n + 2.$
Cum inegalitatea $a_{n+1} \geq n+1$ este echivalentă cu
$a_n + \frac{n}{a_n} \geq n + 1 \Leftrightarrow a_n^2 + n \geq na_n + a_n \;\; (a_n - n)(a_n - 1) \geq 0,$
adevărată deoarece $a_n \geq n \geq 1$. Așadar avem $n+1 \leq a_{n+1} < n+2 \Rightarrow$
$\Rightarrow [a_{n+1}] = 1$. Prin urmare rezultă că pentru orice $n \geq n_0 \Rightarrow [a_n] = 1.$

Laurențiu Panaitopol, propusă la O.I.M., 1997

Scanned with OKEN Scanner

128*. Soluția 1

Considerăm funcția $f(n)=\frac{x}{n}+\frac{n}{x}:(0,\infty)\to(0,\infty)$ care este strict descrescătoare pe $(0,n)$. Prin inducție se deduce dubla inegalitate:

$\sqrt{n}<a_n<\frac{n}{\sqrt{n-1}},\forall\, n\geq 3$ (1).

Într-adevăr, pentru $n=3\Rightarrow a_3=2$ și care verifică (1).

Presupunând adevărată (1) rezultă

$$a_{n+1}=f(a_n)>f\left(\frac{n}{\sqrt{n-1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\sqrt{n-1}=\frac{n}{\sqrt{n-1}}>\sqrt{n+1}\quad(2)$$

și $a_{n+1}>\frac{n}{\sqrt{n-1}},\forall\, n\geq 3$ (3).

Avem $a_{n+1}=f(a_n)<f(\sqrt{n})=\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}=\frac{n+1}{\sqrt{n}}$ (4),

deci $\sqrt{n+1}<a_{n+1}<\frac{n+1}{\sqrt{n}}$. Așadar (1) este adevărată.

Din (3) rezultă $a_n>\frac{n-1}{\sqrt{n-2}},\forall\, n\geq 4$, deci $a_{n+1}=f(a_n)<f\left(\frac{n-1}{\sqrt{n-2}}\right)=$

$=\frac{n-1}{\sqrt{n-2}}+\frac{n\sqrt{n-2}}{n-1}<\sqrt{n-2},\forall\, n\geq 4$ (se verifică ușor).

Așadar, avem $\sqrt{n}<a_n<\sqrt{n+1}\Leftrightarrow n<a_n^2<n+1\Rightarrow[a_n^2]=n$.

Soluția 2

Funcția $f(x)=\frac{x}{n}+\frac{n}{x}$ este crescătoare pe $\left[\sqrt{n},\sqrt{n+1}\right]$ (se verifică prin inducție). Pentru $n=4$ este adevărată și fie:

$\sqrt{n}\leq a_n<\sqrt{n+1}\Rightarrow\sqrt{n+1}\leq a_{n+1}<\sqrt{n+2}$.

Într-adevăr, avem: $a_{n+1}>\frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{n}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}\quad(*)$

și $a_{n+1}<\frac{\sqrt{n+1}}{n}+\frac{n}{\sqrt{n+1}}=\frac{n^2+n+1}{n\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2+n+1<\sqrt{(n+1)(n+2)}\Leftrightarrow\frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^4+n^2+1+2n^2+2n^3+2n<n^2(n^2+3n+2)$

(unde s-a folosit monotonia funcției f).

Laurențiu Panaitopol

129*. Considerăm două cazuri: $a\in\mathbb{Q}\cap(0,1)$ sau $a\notin\mathbb{Q}\cap(0,1)$.

a) Fie $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Q},0<a<1\Rightarrow x_1=\left\{\frac{a_1}{x_0}\right\}=\frac{a_1}{x_0}-\left[\frac{a_1}{x_0}\right]=\frac{a_1}{a}-\left[\frac{a_1}{a}\right]$

și cum $\frac{a_1}{a} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow x_1 \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Și prin inducție, dacă $x_n \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n+1} = \left\{\frac{a_{n+1}}{x_n}\right\} = \frac{a_{n+1}}{x_n} - \left[\frac{a_{n+1}}{x_n}\right] \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow x_{n+1} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$,

deci niciun termen al șirului nu poate fi nul.

b) Fie $a \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ și $a = \frac{p_1}{p_0}$; $0 < p_1 < p_0, p_0, p_1 \in \mathbb{N}^*$.

Atunci $x_1 = \left\{\frac{a_1}{x_0}\right\} = \left\{\frac{a_1}{a}\right\} = \left\{\frac{p_0 a_1}{p_1}\right\} = \frac{p_0 a_1}{p_1} - \left[\frac{p_0 a_1}{p_1}\right] \in \mathbb{Q}$, adică $\left\{\frac{p_0 a_1}{p_1}\right\} = \frac{p_2}{p_1}$,

cu $0 < p_2 < p_1$ și continuând în acest mod rezultă $0 < p_n < p_2 < p_1 < p_0$.

Se obține un șir strict descrescător de numere naturale, care la un moment dat devine 0, deci există $p_k = 0$, adică un $x_k = 0 \Rightarrow x_{k+1} = 0$, deci toți termenii reali.

Concurs România, 1999

130***. Într-adevăr $a_{n+1} - a_n = 1 + \left[\sqrt{n+1} + \frac{1}{2}\right] - \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$, rezultă $a_{n+1} - a_n \in \{1,2\}$. Vom arăta că $a_{n+1} - a_n = 2 \Leftrightarrow a_n = k^2 - 1$ și astfel șirul „sare" peste k^2. Dacă presupunem că:

$a_{n+1} - a_n = 2 \Rightarrow \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = k-1$ și $\left[\sqrt{n+1} + \frac{1}{2}\right] = k$, în particular

$\sqrt{n} + \frac{1}{2} < k < \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \Rightarrow 4k^2 - 4k - 3 < 4n < 4k^2 - 4k + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4n = 4k^2 - 4k \Rightarrow n = k^2 - k \Rightarrow a_n = k^2 - k + k - 1 = k^2 - 1$.

Șirul a_n se mai scrie și astfel $a_n = n + \left[2\sqrt{n}\right] - \left[\sqrt{n}\right]$ (Hermite).

131***. Se constată că $[12S_1] = [12S_2] = 2$ și $[12S_3] = 3$.

Cum $p_{k+1} - p_k \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{p_2 p_3} + \frac{2}{p_3 p_4} + \cdots + \frac{2}{p_n p_{n+1}} \leq \frac{1}{3} + \frac{p_3 - p_2}{p_2 p_3} + \frac{p_4 - p_3}{p_3 p_4} + \cdots +$

$+ \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n p_{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_{n+1}} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 12S_n < 4$

și cum $12S_n \geq 12S_3 = 12 \cdot \frac{11}{42} > 3, \forall\, n \geq 3 \Rightarrow [12S_n] = 3, \forall\, n \geq 3$.

Prin urmare, $[12S_n] = \begin{cases} 2, & n = 1,2 \\ 3, & n \geq 3 \end{cases}$.

Florian Dumitrel, R.M.T., 2010

132***. a) Prin inducție rezultă pentru $n = 1, 3^2 = 2 \cdot 4 + 1$.

Presupunând că $3^{2^n} = 2^n(2a_n) + 1 \Rightarrow 3^{2^{n+1}} = \left(3^{2^n}\right)^2 = (2^n(2a_n) + 1) =$

$= 2^{2n}(2^2 \cdot a_n^2) + 2 \cdot 2^n(2a_n) + 1 = 2^{n+1} \cdot 2(2^{2n} \cdot a_n^2 + a_n) + 1 =$

$= 2^{n+1}(2 \cdot a_{n+1}) + 1$;

Scanned with OKEN Scanner

b) Din a) rezultă că $a_{2^n} = \left[\frac{3^{2^n}}{2^n}\right]$, este par și din $3^n > n \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{3^n} = \left[\frac{3^{3^n}}{3^n}\right] = \left[3^{3^n-n}\right] \vdots 3.$

Avem din a) $3^{4^n} = 3^{2^{2n}} = 2^{2n}(2 \cdot a_{2n}) + 1 = 4^n(5a_n) + 1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{3^{4^n}} \vdots 5.$

Concurs 2010

133***. Deoarece $a_n = n(q_1 + q_2 + q_{2012}) - [nq_1] - [nq_2] - [nq_{2012}] \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n \in \mathbb{Z}, \ \forall n \in \mathbb{N}$ și evident $0 \leq a_n < 2012 \Rightarrow a_n \leq 2011, n \in \mathbb{N}.$

Fie $q_k = \frac{b_k}{c_k}$, cu $b_k, c_k \in \mathbb{N}^*$, cu $(b_k, c_k) = 1$, unde $k = \overline{1,2012}$.

Pentru $N = c_1c_2 \ldots c_{2012} - 1$ se obține:

$\{Nq_1\} = \left\{b_k \frac{c_1c_2 \ldots c_{2012}}{c_k} - \frac{b_k}{c_k}\right\} = \{-q_k\} = 1 - q_k$, deci

$a_N = 2012 - (q_1 + q_2 + q_{2012}) = 2011$, deci $\max A = 2011$.

Concurs „Nicolae Coculescu", 2012, R.M.T, 2013 (2)

134***. Desigur trebuie să arătăm că minimul $\left[\sqrt{4b+1}\right]$ este atins de termeni ai șirului. Considerăm funcția $f: (0, \infty) \to (0, \infty)$,

$f(x) = x + \frac{b}{x}$ care își atinge minimul în punctul

$x_0 = \sqrt{b} \ \left(f'(x) = 1 - \frac{b}{x^2} = \frac{x^2 - b}{x^2}\right).$

Funcția descrește pe $(0, x_0)$ și crește pe (x_0, ∞). Dar pentru $x \in \mathbb{N}$, vom arăta că funcția își atinge minimul pe $(0, x_0]$ în punctul $m_1 = \left[\sqrt{b}\right]$ și pe funcția (x_0, ∞) în punctul $m_2 = \left[\sqrt{b}\right] + 1$.

Observăm că funcția $[f(x)] = \left[x + \frac{b}{x}\right] = x + \left[\frac{b}{x}\right]$, pentru $x \in \mathbb{N}^*$.

Calculăm minimul funcției $[f(x)]$ în punctele m_1 și m_2.

Fie $m = \left[\sqrt{b}\right] \Rightarrow m \leq \sqrt{b} < m + 1 \Rightarrow m^2 \leq b < (m+1)^2$.

Dacă $b = m^2 + k, k = 0,1,2, \ldots, 2m$, atunci:

$[f(m_1)] = [f(m)] = m + \left[\frac{m^2 + k}{m}\right] = 2m + \left[\frac{k}{m}\right] =$

$= \begin{cases} 2m & , \ 0 \leq k \leq m \\ 2m + 1, & m \leq k \leq 2 \end{cases} \quad (1).$

Valorile în m_2, adică $[f(m_2)] = [f(m+1)]$ sunt la fel ca cele din (1).

Căutăm minimul printre termenii șirului:

Scanned with OKEN Scanner

$$\min_{n\in\mathbb{N}} a_n = \begin{cases} 2[\sqrt{b}], & 0 \le b-[b^2] \le [\sqrt{b}] \\ 2[\sqrt{b}]+1, & [\sqrt{b}] \le b-[b^2] \le 2[\sqrt{b}] \end{cases} \quad (2).$$

Vom justifica că minimul din (2) se poate pune sub forma $[\sqrt{4b+1}]$.
Într-adevăr, dacă $b = m^2+k \Rightarrow 4b+1 = 4(m^2+k)+1$, atunci pentru $0 \le k < m$ rezultă $2m < \sqrt{4m^2+4k+1} < 2m+1 \Rightarrow [\sqrt{4b+1}] = 2m$ și pentru $m \le k \le 2m$, avem $2m+1 \le \sqrt{4m^2+4k+1} < 2m+2 \Rightarrow$
$\Rightarrow [\sqrt{4b+1}] = 2m+1$.

Putnam, 1973

135***. Fie $x_n = \sqrt{(n+1)^2+n^2} = \sqrt{2n^2+2n+1}, x_{n+1} = \sqrt{2n^2+6n+5}$.
Se deduce ușor că $1 < x_{n+1}-x_n < 2 \Rightarrow x_{n+1} > 1+x_n \Rightarrow$
$\Rightarrow [x_{n+1}] \ge 1+[x_n] \Rightarrow a_{n+1}-a_n \ge 1$. Dacă $x_{n+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} = x_{n+1}$ și $a_n = [x_n] \le x_n < x_{n+1}-1 = a_{n+1}-1 \Rightarrow a_{n+1}-a_n > 1$ pentru acele valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $\sqrt{2n^2+6n+5} = k \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2n^2+6n+5-k^2 = 0$.
Pentru ca această ecuație să aibă soluții naturale se impune ca $\Delta = 9-10+2k^2 = p^2 \Rightarrow 2k^2-p^2 = 1$ (ecuație Pell) care au o infinitate de soluții, deci sunt și o infinitate de numere naturale care nu sunt soluții și pentru acestea avem $a_{n+1}-a_n = 1$ (s-a ținut seama că $1 < x_{n+1}-x_n < 2$).
Analog se arată că există o infinitate de numere naturale pentru care $x_n \in \mathbb{N}$ și atunci $[x_{n+1}]-x_n = [x_{n+1}]-[x_n] = 1$.

136**. Avem $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k(2k+1)}-\sqrt{(2k-1)(2k+2)}} =$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2k(2k+1)}+\sqrt{(2k-1)(2k+2)}$ și cum

$\sqrt{2k(2k+1)} > \sqrt{4k^2} = 2k$ și $\sqrt{(2k-1)(2k+2)} = \sqrt{4k^2+2k-2} > 2k$

$\Rightarrow a_n > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 4k = n(n+1)$, iar din $\sqrt{2k(2k+1)}+\sqrt{(2k-1)(2k+2)} <$

$< \frac{2k+2k+1}{2}+\frac{2k-1+2k+2}{2} = 4k+1 \Rightarrow a_n < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(4k+1) =$

$= n(n+1)+\frac{n}{2} < (n+1)^2$.

Așadar $n^2 < n(n+1) < a_n < (n+1)^2 \Rightarrow n < \sqrt{a_n} < n+1 \Rightarrow [\sqrt{a_n}] = 1$.

Nicolae Alb, O.L. Cluj, 2017

Scanned with OKEN Scanner

137**. Se procedează prin inducție.

138***. Evident că $x_n > 0, y_n > 0$. Notăm $x_n = \text{ctg}\alpha_n$ și $y_n = \text{tg}\beta_n$ cu $\alpha_n, \beta_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Avem $x_1 = \sqrt{3} = \text{ctg}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{6}$ și $y_1 = \sqrt{3} = \text{tg}\frac{\pi}{3} \Rightarrow \beta_1 = \frac{\pi}{3}$.

Din relațiile date rezultă: $x_{n+1} =$

$$= \text{ctg}\alpha_n + \sqrt{1 + \text{ctg}^2_{\alpha_1 n}} = \text{ctg}\alpha_n + \frac{1}{\sin\alpha_n} = \frac{1 + \cos\alpha_n}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha_n}{2}}{2\sin\frac{\alpha_n}{2}\cos\frac{\alpha_n}{2}} =$$

$$= \text{ctg}\frac{\alpha_n}{2} \Rightarrow \text{ctg}\alpha_{n+1} = \text{ctg}\frac{\alpha_n}{2} \Rightarrow \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2} \text{ și analog } \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_n = \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \text{ și } \beta_n = 2\alpha_n = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

Avem $x_n y_n = \text{ctg}\alpha_n \text{tg}\beta_n = \text{ctg}\alpha_n \text{tg}2\alpha_n = \frac{2}{1 - \text{tg}^2\alpha_n} > 2$ și din

$$\text{tg}^2\alpha_n < 1 \text{ și } \text{tg}\alpha_n < \text{tg}\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall\, n \geq 1 \Rightarrow x_n y_n < \frac{2}{1 - \text{tg}^2\alpha_1} = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} =$$

$$= 3 \Rightarrow 2 < x_n y_n < 3 \Rightarrow [x_n y_n] = 2.$$

139***. Din $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2k-1}{2k+3} \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k+3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n-1}{3(2n+1)} \text{ și cum } 0 < \frac{n-1}{3(2n+1)} < 1,$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, deci $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} = \left\{\frac{n-1}{3(2n+1)}\right\} = \frac{n-1}{3(2n+1)} \in \left[\frac{1}{15}, \frac{1}{7}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow n \in \{2,3,4, \ldots, 9,10\}$.

O.L. Satu Mare, 2017

140***. Fie $x_0 = k + \beta, x_1 = m + \alpha$, unde $m, k \in \mathbb{N}, m \geq k; \alpha, \beta \in [0,1)$.

$x_2 = [x_1] - x_0 = m - k - \beta, x_3 = m - k - 1 - m - \alpha = -k - 1 - \alpha,$

$x_4 = -m - 2 + \beta, x_5 = k - m - 1 + \alpha, x_6 = k + 1 - \beta, x_7 = m + 1 - \alpha,$

$x_8 = m - k - 1 + \beta, x_9 = -k - 2 + \alpha, x_{10} = -m - 1 - \beta,$

$x_{11} = -m + k - \alpha, x_{12} = k + \beta = x_0, x_{13} = m + \alpha = x_1$, deci șirul este periodic de perioadă $T = 12$, deci are 12 termeni distincți.

Marcel Chiriță, R.M.T., 1982

Scanned with OKEN Scanner

141***. Evident cu excepția lui x_0 rezultă $x_n \in \mathbb{Z}$.

Dacă $a > 0$ atunci rezultă că $x_{n+1} = 2\left[\frac{x_n}{3}\right] \geq 0$ și $x_{n+1} \leq \frac{2x_n}{3} < x_n$, deci

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_{n_0} = 0 \Rightarrow x_n = 0 \Rightarrow x_{n+1} = 2\left[\frac{0}{3}\right] = 0, \forall\, n \geq n_0$.

Dacă $a \in [-3,0) \Rightarrow x_1 = 2\left[\frac{x_0}{3}\right] = -2;$, prin inducție se deduce că $x_n = -2$, $\forall\, n \geq 1$.

Dacă $a \in [-6,-3) \Rightarrow x_1 = -4$ și prin inducție se deduce că $x_n = -4$, $\forall\, n \geq 1$.

Dacă $a < -6$ atunci din $x_n < -6 \Rightarrow x_{n+1} = 2\left[\frac{x_n}{3}\right] \leq -6$ și $x_{n+1} > x_n$, deci există un rang n_0 astfel încât $x_{n_0} = -6$ și atunci $x_n = -4, \forall\, n \geq n_0$.

Andrei Eckstein, R.M.T., 2013

142***. a) Avem $a_1 = 1 < 2018$. Prin inducție deducem că $a_n < 2018$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Presupunând că $a_k < 2018 \Rightarrow a_{k+1} = \left[\frac{a_k}{2}\right] + 1009 \leq \frac{2018}{2} +$ $+1009 = 2018$;

b) Din punctul a) rezultă $a_n \in \{0,1,2,\ldots,2017\}$ (1).

Avem $a_{n+1} = \left[\frac{a_n}{2}\right] + 1009 = \left[\frac{a_n}{2} + 1009\right] = \left[\frac{a_n + 2018}{2}\right] \geq \left[\frac{2a_n}{2}\right] = a_n$.

Așadar șirul este un șir crescător și mărginit de numere naturale (vezi 1).

Dacă $a_n < 2017 \Rightarrow a_{n+1} = \left[\frac{2017}{2}\right] + 1009 = 2017$ și deci șirul rămâne constant. Dacă $a_n \leq 2016 \Rightarrow a_{n+1} = \left[\frac{a_n + 2018}{2}\right] \geq \left[\frac{2a_n + 2}{2}\right] = a_n + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n + 1 \Rightarrow a_n \geq a_p + n - p$ (2), $\forall\, n \geq p, n, p \in \mathbb{N}^*$;

$a_2 = 1009, a_3 = 1513, a_4 = 1765$, $a_5 = 1891$. Dacă presupunem că $a_{131} \leq 2016$, atunci din (2) rezultă $a_{131} \geq a_5 + 131 - 5 \Rightarrow 1891 + 128 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{131} \geq 2017 \Rightarrow a_{131} = 2017$ (vezi și (1)).

Mircea Țeca, O.L. București, 2017

143***. Înlocuind succesiv pe $n \in \{0,1\}$, obținem $x_1 = x_1^2$ și $x_2 = x_2^2$ și cum $x_1, x_2 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$. Din relația de recurență se deduce că $x_{2n+1} = x_{n+1}^2 + x_n^2$ și $x_{2n} = x_{n+1}^2 - x_{n-1}^2$ (1). Prin scădere rezultă $x_{2n+1} - x_{2n} = x_n^2 + x_{n-1}^2 = x_{2n-1} \Rightarrow x_{2n+1} = x_n^2 + x_{2n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (2). Arătăm că și $x_{2n} = x_{2n-1} + x_{2n-2}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (3). Într-adevăr, $x_2 = x_1 + x_0$ și procedăm prin inducție. Presupunând că (3) este adevărată până la n, rezultă $x_{2n+2} - x_{2n} = x_{n+2}^2 + x_n^2 - x_{n+1}^2 + x_{n-1}^2$ (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x_{n+1} + x_n)^2 - x_n^2 - x_{n+1}^2 + (x_{n+1} - x_n)^2 = x_{n+1}^2 + x_n^2 = x_{2n+1}$,

Scanned with OKEN Scanner

deci (3) este adevărată (s-au utilizat (1) și (2)) și prin urmare avem egalitate $x_{2n+2} = x_{2n+1} + x_{2n}$.
Avem $x_{2n+2} = x_{m+1} + x_m$ care este adevărată pentru orice $m \leq 2n-1$, deci adevărată pentru $m = n$ și $m = n-1$. Din (2) și (3) rezultă că $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Cum $x_0 = 0$ și $x_1 = 1$, deducem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este șirul lui Fibonacci, adică $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Titu Andreescu

144***. Arătăm prin inducție după m, implicația $k^m \leq n < k^{m+1} \Rightarrow$ $\Rightarrow a_n = 1 + m$ (1). Pentru $m = 0$, implicația este evidentă deoarece $1 \leq n < k \Rightarrow \left[\frac{n}{k}\right] = 0 \Rightarrow a_n = a_{\left[\frac{n}{k}\right]} + 1 = a_0 + 1 = 1$.
Presupunem că (1) este adevărată pentru m. Avem $k^{m+1} \leq n < k^{m+2} \Rightarrow$ $\Rightarrow k^m \leq \frac{n}{k} < k^{m+1} \Rightarrow k^m \leq \left[\frac{n}{k}\right] < k^{m+1} \underset{\Rightarrow}{(1)} a_{\left[\frac{n}{k}\right]} = 1 + m \Rightarrow a_n = 1 + a_{\left[\frac{n}{k}\right]}$ $= 1 + (m+1)$, deci (1) este adevărată pentru $m+1$. Așadar, pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $m \leq \log_k n < m+1$ avem $a_n = 1 + m$ deci $m = [\log_k n] \Rightarrow a_n = 1 + m = 1 + [\log_k n]$.

Titu Andreescu

145***. Utilizăm relația $\left[\frac{[x]}{n}\right] \equiv \left[\frac{x}{n}\right]$ și rezultă $\left[\frac{\left[\frac{n}{m}\right]}{m}\right] = \left[\frac{n}{m^2}\right]$, deci

$$a_{\left[\frac{n}{m}\right]} = \left[\frac{\left[\frac{n}{m}\right]}{m}\right] + a_{\left[\frac{\left[\frac{n}{m}\right]}{m}\right]} = \left[\frac{n}{m^2}\right] + a_{\left[\frac{n}{m^2}\right]}, \text{ deci } a_n = \left[\frac{n}{m}\right] + a_{\left[\frac{n}{m}\right]} =$$

$$= \left[\frac{n}{m}\right] + \left[\frac{n}{m^2}\right] + a_{\left[\frac{n}{m^2}\right]} = \left[\frac{n}{m}\right] + \left[\frac{n}{m^2}\right] + \left[\frac{\left[\frac{n}{m^2}\right]}{m}\right] + a_{\left[\frac{\left[\frac{n}{m^2}\right]}{m}\right]} =$$

$$= \left[\frac{n}{m}\right] + \left[\frac{n}{m^2}\right] + \left[\frac{n}{m^3}\right] + a_{\left[\frac{n}{m^3}\right]}, \text{ deci din aproape în aproape rezultă}$$

$$a_n = \left[\frac{n}{m}\right] + \left[\frac{n}{m^2}\right] + \left[\frac{n}{m^3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{m^n}\right], \text{ unde } p = [\log_2 m].$$

Olimpiadă R. Moldova, 2007 (enunț parțial)

146***. Din $(a-1)^2 < b < a^2 \Rightarrow a \geq 2$ și b nu este pătrat perfect, adică $\sqrt{b}$ este irațional și $a - \sqrt{b} \in (0,1)$, cu $a^2 - b \geq 1$. Din relația de recurență rezultă că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este un șir de numere naturale nenule. Tot din relația de recurență rezultă $x_n\sqrt{b} - 1 < x_{n+1} - ax_n = [x_n\sqrt{b}] < x_n\sqrt{b} \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow (a+\sqrt{b})x_n - 1 < x_{n+1} < (a+\sqrt{b})x_n \Rightarrow (a^2-b)x_n - (a-\sqrt{b}) <$
$< (a-\sqrt{b})x_{n+1} < (a^2-b)x_n \Rightarrow ax_{n+1} - (a^2-b)x_n < x_{n+1}\sqrt{b} <$
$< ax_{n+1} - (a^2-b)x_n + a - \sqrt{b}$ (1).

Cu substituția $n \to n-1$ în (1) rezultă $ax_n - (a^2-b)x_{n-1} < x_n\sqrt{b} <$
$< ax_n - (a^2-b)x_{n-1} + 1 \Rightarrow [x_n\sqrt{b}] = ax_n - (a^2-b)x_{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (2).

Înlocuind $[x_n\sqrt{b}]$ din (2) în relația de recurență se obține:

$x_{n+1} = 2ax_n - (a^2-b)x_{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (3) care este o relație de recurență de ordinul doi, de unde rezultă $p = 2a$ și $q = a^2 - b \geq 1$. Dacă relației (3) i se atașează ecuația caracteristică $r^2 - 2ar + a^2 - b = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_{1,2} = a \pm \sqrt{b} \Rightarrow x_n = \alpha(a+\sqrt{b})^n + \beta(a-\sqrt{b})^n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Observație:

Pentru $a = 3$ și $b = 5$ rezultă $x_n = 2^{n-1}F_{2n+1}$, unde F_n este șirul lui Fibonacci cu $F_1 = F_2 = 1$ și $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Concursul „Argument", 2016

147***. Soluția 1

Se deduce ușor că $a_5 = 7$. Vom arăta că dacă $a_n \vdots 7$ există $m > n$ astfel încât $a_m \vdots 7$. Observăm că $a_{2n} = a_{2n-1} + a_n$ și $a_{2n+1} = a_{2n} + a_n$ și dacă $a_n \vdots 7 \Rightarrow a_{2n-1} \equiv a_{2n} \equiv a_{2n+1} \equiv a(mod7)$. De asemenea avem:

$\alpha)\ a_{4n-2} = a_{4n-3} + a_{2n-1}, a_{4n-1} = a_{4n-2} + a_{2n-1},$

$\beta)\ a_{4n} = a_{4n-1} + a_{2n}, a_{4n+1} = a_{4n} + a_{2n}$

$\gamma)\ a_{4n+2} = a_{4n+1} + a_{2n+1}, a_{4n+3} = a_{4n+2} + a_{2n+1}$. Din $\alpha)\ \beta)\ \gamma)$ rezultă $a_{4n-3+k} \equiv a_{4n-3} + ka_{2n}(mod7)$ și fie $a_{2n} \equiv 0\ (mod7)$ unul dintre numerele $a_{4n-3+k} \equiv 0(mod7)$.

Soluția 2

Presupunem prin absurd că există doar un număr finit de termeni ai șirului divizibili la 7. Fie un rang $n_0 \geq 5$ astfel încât $7|a_{n_0}$ și $7 \nmid a_n, \forall\, n \geq n_0$. Observăm că $a_{2n_0-1} \equiv a_{2n_0} \equiv a_{2n_0} + 1 \equiv a \neq 0(mod7)$ (Pentru $a_{2n_0} = a_{2n_0-1} + a_{n_0}$ și $a_{2n_0+1} \equiv a_{2n_0} + a_{n_0}$) de unde rezultă termenii $a_{4n_0-3}, a_{4n_0-2}, a_{4n_0-1}, a_{4n_0}, a_{4n_0+1}, a_{4n_0+2}, a_{4n_0+3}$, vor avea toate resturile distincte la împărțirea cu 7 deoarece $a_{4n_0-3+k} \equiv a_{4n_0-3+ka}(mod7)$ și cum 7 este prim, toate resturile modulo 7 sunt parcurse de mulțimea $(0, a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a)$ deci și restul lui a_{4n_0-3}, contradicție cu presupunerea făcută.

Concursul „Laurențiu Panaitopol", 2014, R.M.T. nr. 1/2014

Scanned with OKEN Scanner

148***. Din $[2a_k] = k \Rightarrow 2q_k - 1 < k \leq 2a_k, \frac{k}{2} \leq a_k < \frac{k+1}{2}$ de unde rezultă că numerele $a_k - 1, a_k - 2, \ldots, a_k - \left[\frac{k}{2}\right]$ sunt pozitive, iar numerele $a_k - \left[\frac{k}{2}\right] - 1, a_k - \left[\frac{k}{2}\right] - 2, \ldots, a_k - k$ sunt negative. Rezultă că:

$$ka_{k+1} = a_k - 1 + a_k - 2 + \cdots + a_k - \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{2}\right] + 1 - a_k + \left[\frac{k}{2}\right] + 2 - a_k + $$

$$+ \cdots + (k - a_k) = \left(2\left[\frac{k}{2}\right] - k\right)a_k + \frac{k(k+1)}{2} - \left[\frac{k}{2}\right]\left(\left[\frac{k}{2}\right] + 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ka_{k+1} = \left(\frac{2}{k}\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)a_k + \frac{k+1}{2} - \frac{1}{k}\left[\frac{k}{2}\right]\left(\left[\frac{k}{2}\right] + 1\right). \text{ Cum } a_k > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{k}\left[\frac{k}{2}\right] - 1 \leq 0 \text{ și } \frac{1}{k}\left[\frac{k}{2}\right]\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right) > \frac{k-2}{4} \text{ rezultă}$$

$$a_{k+1} < \frac{k+1}{2} - \frac{k-2}{4} = \frac{k+4}{4} < \frac{k}{2} = \frac{1}{2}[2a_k] \leq a_k.$$

Sorin Dumitrică, G.M. nr. 4/2015

149***. Adunându-le și înmulțindu-le membru cu membru, rezultă: $a_{n+1} + b_{n+1} = 2(a_n + b_n) \Rightarrow a_n + b_n = 2^n(a_0 + b_0) = 2^n$ și $a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n b_n \Rightarrow a_n b_n = 2^n a_0 b_0 = -2^{n+1}$. Rezultă că (a_n) și (b_n) sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2^n x - 2^{n+1} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2^n \pm \sqrt{2^{2n} + 2^{n+3}}}{2} =$

$= 2^{n-1} \pm \sqrt{2^{2n-2} + 2^{n+1}}$. Fie $a_n = 2^{n-1} + \sqrt{2^{2n-2} + 2^{n+1}}$ și $b_n = 2^{n-1} - \sqrt{2^{2n-2} + 2^{n+1}}$. Evident că pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n, b_n \notin \mathbb{Z}$.

Arătăm că $b_n \in (-2, -1)$.

Într-adevăr, $b_n = 2^{n-1} - \sqrt{2^{2n-2} + 2^{n+1}} < -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{n-1} + 1 < \sqrt{(2^{n-1})^2 + 2^{n+1}} \Rightarrow 2^n > 1$, evident și

$b_n = 2^{n-1} - \sqrt{2^{2n-2} + 2^{n+1}} > -2 \Rightarrow 2^{n-1} + 2 > \sqrt{2^{2n-2} + 2^{n+1}} \Rightarrow 4 > 0.$

Așadar $b_n \in (-2, -1) \Rightarrow [b_n] = -2$ și

$[a_n] = [S_n - b_n] = [2^n - b_n] = 1 + 2^n.$

Concursul „Argument", 2017

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 17 | Funcţii

§ 1. Exerciţii diverse

1*. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, f(x)=x+\left[\frac{x}{6}\right]-\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{2x}{3}\right]$ este periodică şi să se determine $\mathrm{Im}f$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $f(x)=\{x\}+\{2x\}+\{3x\}$.

a) Să se arate că f este periodică şi să se determine perioada principală.

b) Să se rezolve inecuaţia $f(x)\le 1$.

3. Fie $f:[0,\infty), n\in\mathbb{N}^*$ dat şi $f(x)=(-1)^{[x]}\left(x-2n\left[\frac{x}{2n}\right]-1\right)+4$.

Să se arate că f este periodică.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că:

$f(x+2)=\{f(x+1)\}+[f(x)], (\forall)\, x\in\mathbb{R}$. Să se arate că f este periodică.

5. Să se determine funcţiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că:

$$f\left(\left[\frac{m}{n}\right]\right)=\frac{f(m)}{f(n)}, \forall\, m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}.$$

6*. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sum_{k=1}^{n}\{kx\}$.

Să se arate că f este periodică şi să se determine perioada principală.

7. Fie $a\in\mathbb{R}^*$ şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se arate că $f(x+a)=f(x)+f(a)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x)=a\left[\frac{x}{a}\right]+f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right), \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

8*. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\{x\}+\{2x\}+\{3x\}$.

a) Să se arate că f este periodică şi să se determine perioada principală.

b) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=2$.

c) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=2{,}5$.

9. a) Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$.

$$f(x)=\left[\frac{x}{5}\right]+\left[\frac{x+1}{5}\right]+\left[\frac{x+2}{5}\right]+\left[\frac{x+3}{5}\right]+\left[\frac{x+4}{5}\right]+\left[\frac{x+5}{5}\right].$$

Să se determine $\mathrm{Im}f$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie $f:[0,50]\to\mathbb{N}, f(x)=[x]+[2x]+[3x]+\left[\frac{4x}{3}\right]$.

Să se determine Imf.

c) Fie $f:[0,100]\to\mathbb{R}_+, f(x)=[x]+[2x]+\left[\frac{5x}{3}\right]+[3x]+[4x]$.

Să se determine Imf.

10*. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[a+x]-[a]-x$.
Să se arate că f este periodică și să se reprezinte grafic.

11* a) Arătați că $x+\frac{100}{x}\geq 20$, pentru $\forall\, x>0$;

b) Determinați valoarea minimă a sumei

$$S_{(x)}=[x]+\left[\frac{100}{x}\right], \forall\, x>0.$$

12*. Să se determine două drepte paralele $y=mx+a, y=mx+b$ care să determine o bandă ce cuprinde graficul funcției $f(x)=[x]$.

13*. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left[\left[x+\frac{1}{2}\right]-x\right]$ (funcția dinte).

Să se arate că f are axă de simetrie.

14*. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}(-1)^{[x]}, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\\ 0\ , & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Arătați că f are o infinitate de axe de simetrie.

15**. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{1}{2}-\left|1-2\left\{\frac{x+1}{2}\right\}\right|$.

Să se arate că:

a) $-\frac{1}{2}\leq f(x)\leq\frac{1}{2}$;

b) $\sin\pi x=\cos\pi f(x)$.

16**. Fie $a,b\in\mathbb{R}$. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a[x]+b\{x\}$ este impară dacă și numi dacă $a=b$.

17*. Fie $f:\left[\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-\{x\}$. Să se arate că f este strict crescătoare.

18**. Să se arate că nu există funcții strict monotone $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(f(x))=\{x\}, \forall x\in[0,1]$.

19**. Arătați că funcția $f:\mathbb{N}\to[0,1]$, definită prin: $f(n)=\left\{\sqrt[3]{n^3+n^2}\right\}$ este strict crescătoare.

Scanned with OKEN Scanner

20*. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{[x^2+x+1]}{x^2+1}$.

a) Să se rezolve ecuațiile $f(x)=0$ și $f(x)=1$.

b) Să se arate că $f(x)\le\dfrac{3}{2}, \forall\, x\in\mathbb{R}$.

21*. Fie $D=\{x\in\mathbb{N}|x \text{ număr prim}\}$ și funcția $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\left\{\dfrac{x^2-1}{24}\right\}$.

Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

22*. Fie $a>0$ și funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=\left[\sqrt{n+a}-\sqrt{n}\right], \forall\, n\in\mathbb{N}$.

Să se determine Imf.

23*. Fie funcția $f:(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{3x^2+[x]}{|x|}$.

Să se determine Imf. Câte elemente are preimaginea lui 1?

24.** Fie funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, f(x)=\left[-\left\{\sqrt[p]{n}\right\}\right], p\in\mathbb{N}, p\ge 2$. Să se determine Im$f$.

25.** Fie funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, f(x)=\left[1-\left\{\sqrt[k]{n}\right\}\right]$, unde $n,k\in\mathbb{N}, k\ge 2$.

Să se determine Imf.

26.** Fie $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\left[\dfrac{[x]+1}{[x]-1}\right]$.

Să se determine domeniul maxim de definiție D și să se afle $f(D)$.

27*. Considerăm mulțimea $A_n=\left\{x\in\mathbb{R}|\dfrac{[x]}{\{x\}}=n\right\}, n\in\mathbb{N}$.

a) Determinați A_3.

b) Arătați că A_n este infinită dacă și numai dacă $n=0$.

28*.** Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\{x\}^2}{[x]}$.

Să se arate că $f(x+y)\le f(x)+f(y), \forall\, x,y\in(1,\infty)$.

29.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[x]+[-x]$.

a) Să se determine Imf.

b) Fiind date numerele reale $x_1,x_2,\cdots,x_{2009}$ cu proprietatea:

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2009})=-2008.$$

Câte dintre numerele $x_1,x_2,\cdots,x_{2009}$ sunt întregi?

30.** Fie dată funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(x)$ dată de

$$f(n)=n-\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{n}{8}\right]+\cdots.$$

Să se demonstreze că $f(n)=n-f\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

31**. Fie k un număr natural. Pentru un număr real $a \in [k^2, (k+1)^2]$, notăm $f(a) = 0$ dacă $a \in [k^2, k^2+k]$ și $f(a) = 1$ dacă $a \in [k^2+k, (k+1)^2)$. Să se arate că:

$$[\sqrt{a}] + f(a) = \left[\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right].$$

32**. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, există $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ astfel încât

$$\{x^n\sqrt{3}\} = \{y^n\sqrt{3}\}.$$

33**. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\} + \{2x\} + \cdots + \{nx\}$.
Să se determine $\sup f(x), x \in \mathbb{R}$.

34**. Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că funcția $f: \mathbb{N} \to \{-1,1\}$, dată de:

$$f(n) = (-1)^{\left[\frac{n}{k}\right]}, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

este periodică și să se determine perioada sa principală.

35**. Fie funcția $f: \mathbb{N}^* \to [0,1), f(n) = \left\{\sqrt{n(n+1)}\right\}$.
Să se arate că:

a) f este crescătoare;

b) $0{,}4k < f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(n+k) < 0{,}5k, k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\sqrt{n(n+1)}\right\} = \frac{1}{2}$.

§ 2. Probleme de concurs

36***. Fie $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$, unde $f(n) = [\sqrt{2n}] - [\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}]$.
Să se determine numerele naturale pentru care $f(n) = 1$.

37***. Să se determine $f \in \mathbb{Z}[x]$ de gradul doi, astfel încât $f(\sqrt{2}), f(\sqrt{5}), f(\sqrt{8})$ să aibă partea întreagă 0.

38***. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{[x]}{p}, p \in \mathbb{N}^* = \{1\}$.

a) Să se determine $g(x) = \left(\underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{de\ n\ ori}\right)$.

b) Să se calculeze $g(x_0)$ unde $x_0 = \frac{3p^n}{p+1}$.

39***. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $f(f(x)) = [x], \forall\, x \in \mathbb{R}$. Arătați că există numerele reale distincte a și b, astfel încât

$$|f(a) - f(b)| \geq |a - b|.$$

40***. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $f(f(x)) = [x], \forall\, x \in \mathbb{R}$. Să se arate că există $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ cu $|f(a) - f(b)| \geq |\sin a - \sin b|$.

Scanned with OKEN Scanner

41*. Fie $x \geq 1$ și $f(x) = \dfrac{\sqrt{[x]} + \sqrt{\{x\}}}{\sqrt{x}}$. Să se determine $\sup\limits_{x \geq 1} f(x)$.

42*. Fie $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, f(n) = \left[\dfrac{n}{[\sqrt{n}]}\right]$.

Să se determine valorile lui n pentru care $f(n) > f(n+1)$.

43*. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim funcțiile $f_n(x) = \{nx\}(1 - \{nx\})$. Să se demonstreze că:

a) Valoarea minimă și maximă a funcțiilor f_n nu depind de n.

b) Ecuația $f_n(x) = M$, unde M este valoarea maximă a lui f_n, are n soluții distincte $x_{n_1 1}, x_{n_1 2}, \cdots, x_{n_1 n}$.

c) Pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$\frac{x_{n_1 1} + x_{n_1 2} + \cdots + x_{n_1 n}}{x_{m_1 1} + x_{m_1 2} + \cdots + x_{m_1 m}} = \frac{n}{m}.$$

44*. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ având expresia $f_n(x) = \left\{x + \dfrac{1}{n}\right\}$. Să se determine toare tripletele (m, n, p) de numere naturale, cu $m < n < p$ pentru care $f_m \circ f_n \circ f_p(x) = \{x\}, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

45*. Fie p un număr prim, $p \geq 3$ și q un număr natural nedivizibil cu p. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{N}^*$ care satisface proprietățile:

a) $f(k) \notin \mathbb{Z}, \forall\, k = \overline{1, p-1}$;

b) $f(k) + f(p-k)$ este număr întreg divizibil cu p pentru orice $k = 1,2,3, \cdots, p-1$.

Să se demonstreze relația:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left[f(k)\frac{q}{p}\right] = \frac{q}{p}\sum_{k=1}^{p-1} f(k) - \frac{p-1}{2}.$$

46*. Fie $a_i \in \mathbb{R}^*, b_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$, iar $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} \{a_i x + b_i\} \text{ și } g(x) = \sum_{i=1}^{n} \{a_i x + b_i\}.$$

Să se arate că dacă $\dfrac{a_i}{a_j} \in \mathbb{Q}, \forall\, i, j \in \{1,2, \cdots, n\}$ atunci funcțiile f și g sunt periodice.

47*. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left[\dfrac{x-p}{p}\right] + \left[\dfrac{-x-1}{p}\right]$, unde $p \in \mathbb{Z}^*$.

Să se determine $\mathrm{Im} f$.

48*. Să se determine valorile reale ale parametrului a, pentru care funcția $f(x) = \{ax + \sin x\}$ să fie periodică.

Scanned with OKEN Scanner

49***. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\left[\frac{x}{12,5}\right]\cdot\left[\frac{-12,5}{x}\right]$. Să se determine $\mathrm{Im}f$.

50**. Determinați $x\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, f(n)=\{2^n\cdot x\}$ să fie monotonă pe $\mathbb{N}$.

51***. Găsiți mulțimea valorilor funcției $f(x)=[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$ cuprinse între 1 și 1000.

52***. Fie funcția $f(x)=x\left[x[x[x]]\right]$ definită pentru $n>0$.

a) Demonstrați că ecuația $f(x)=2002$ nu are soluție.

b) Rezolvați ecuația $f(x)=2001$.

53*. Să se rezolve inecuația $x\left[x[x[x]]\right]\le 2007$, pentru $x>0$.

54***. Fie $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$, definit prin: $f(n)=f\left(\left[\frac{2n}{3}\right]\right)+f\left(\left[\frac{2n-1}{3}\right]\right)$, cu $f(1)=1$. Să se determine o valoare $t\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $f(t)-f(t-1)>t$.

55***. Fie $r_1+r_2+\cdots+r_m$ numere raționale pozitive cu $r_1+r_2+\cdots+r_m=1$ și $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}, f(n)=n-[r_1n]-[r_2n]-\cdots-[r_mn]$.
Să se determine $\min\limits_{n\in\mathbb{N}^*}f(n)$ și $\max\limits_{n\in\mathbb{N}^*}f(n)$.

56***. Fie $a\in\mathbb{R}^*$ și $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu $g(x)=g(x+a),\forall x\in\mathbb{R}$.
Să se arate că $f(x+a)=f(x)+g(x)$ dacă și numai dacă:

$$f(x)=\left[\frac{x}{a}\right]g(x)+f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

57***. Fie funcția $f:(0,\infty)\to[0,1), f(x)=\left\{x+\frac{1}{x}\right\}$.

a) Rezolvați ecuația $f(x)=x$.

b) Pentru $x=\frac{k}{k+1}, k\in\mathbb{N}^*$, demonstrați că $f\big(f(x)\big)=f(x)$, cu $f(x)\neq x$.

c) Demonstrați că există o infinitate de numere raționale $q\in(0,1)$ pentru care $f\Big(f\big(f(q)\big)\Big)=f\big(f(q)\big)$ și numerele $q, f(q), f\big(f(q)\big)$ diferite.

58***. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ care îndeplinește condiția:

$$f(x+a+b)-f(x+b)=C\big[x+2a+[x]-2[x+a]-[b]\big]+1,$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, cu $a\in\mathbb{Q}$ și $b,c,d\in\mathbb{R}$. Demonstrați că funcția este periodică.

59***. Găsiți mulțimea valorilor funcției:

$$f(x,y,z)=\left\{\frac{xyz}{xy+yz+zx}\right\}, \text{unde } x,y,z\in\mathbb{N}^*.$$

Scanned with OKEN Scanner

ϕ 3. Determinări de funcții

60*. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$|f(x)|\le|xf(\{x\})|,\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

61*. Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right)$, unde $a\in\mathbb{R}^*$. Să se arate că g este periodică și $g(x)=f(x),\forall\, x\in[0,a]$.

62*. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f(x)+f([x])+f(\{x\})=x^2,\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

63*. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f(x)+2f([x])+2f(\{x\})=3x^2.$$

64*. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$f(x)=\{2x\}-\{x\}-\left\{x+\frac{1}{2}\right\} \text{ este constantă.}$$

65*. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f(x)+f([x])+f(\{x\})=2x,\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

66*. Se dau funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietățile:

$$f(x)+f([x])\cdot f(\{x\})=x \text{ și } g(x)=f(x)+[x]\{x\},\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Să se determine $f(x)$ și $g(x)$.

67*. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{N}, f(x)=\left[\sqrt{x}\right]^2$. Se cere:

a) Să se determine punctele fixe.

b) Să se determine $m\in\mathbb{N}$ pentru care ecuația:

$$f(x)+f(x+1)\cdot f(x+2)=m \text{ are soluții.}$$

68**. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația:

$$xf(x)=[x]f(\{x\})+\{x\}f([x]),\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

69**. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f([x])+f(\{x\})=2f(x)-x^2,\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

70**. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f(x)+f([x])+f(\{x\})=ax^2, \text{ unde } a\in\mathbb{R}^* \text{ este dat.}$$

71**. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$f(x)+f([x])+f(\{x\})=ax,(\forall)\, a\in\mathbb{R}$ unde a este un număr real fixat.

72**. Determinați funcțiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ care verifică relația:

$$\left[\sqrt{n+f_{(n)}^2}\right]=n,\forall\, n\in\mathbb{N}.$$

73**. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care:

$$2f(x)+f([x])+f(|x|)=3x,\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

74**. a) Să se arate că $\{x+y\}=\{\{x\}+\{y\}\},\forall x,y\in\mathbb{R}$;

b) Fie $f,g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x,y)=[x+y]-[x]-[y]$ și

$$g(x,y)=\{x+y\}-\{x\}-\{y\}.$$

Să se determine mulțimea valorilor funcțiilor f și g și să se stabilească legătura dintre funcții.

Scanned with OKEN Scanner

75**. Să se determine $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f([x])\cdot f(\{x\})=x-f(x),\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

76. Fie $a,b\in\mathbb{R}^*$. Să se determine $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f(x)=ax-bf([x])\cdot f(\{x\}),\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

77. Se dau funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietățile:

a) $f(x)+f([x])\cdot f(\{x\})=x$;

b) $g(x)=f(x)+[x]\{x\},\forall\, x\in\mathbb{R}$;

1. Să se determine funcțiile f și g;
2. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $g([\ln x])+g\left(\left[\ln x\sqrt{e}\right]\right)=3$.

78**. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f(x)+2f([x])+2f(\{x\})=3x^2,\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

79**. Determinați funcția strict crescătoare $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, care pentru fiecare $\forall\, n\in\mathbb{N}$ verifică egalitatea:

$$\left[\sqrt{n^2+f(1)}\right]+\left[\sqrt{n^2+f(2)}\right]+\cdots+\left[\sqrt{n^2+f(2n)}\right]=2n^2.$$

80**. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f(x)+f([x])+f(\{x\})=2x,(\forall)\, x\in\mathbb{R}.$$

81**. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația:

$$f(x)+f([x])\cdot f(\{x\})=x,(\forall)\, x\in\mathbb{R}.$$

82**. Fie a, b, c numere reale nenule cu $a+b\neq 0, c\neq 0$. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea: $af(x)+bf([x])+bf(\{x\})=cx$.

83**. Să se determine $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ dacă:

$$f(x)+\sqrt{f^2([x])+f^2(\{x\})}=x,\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

84. Fie $a\in[2,3)$ fixat. Determinați funcțiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$, știind că:

$$f([f(n)])=n+a,\forall\, n\in\mathbb{N}\text{ și }f(0)\in[1,2).$$

85**. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care:

$$f(x)=x^2,\forall\, x\in[0,1)\text{ și }f(x+1)=f(x)+x,\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

86***. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea:

$$f([x]y)=f(x)[f(y)],\forall\, x,y\in\mathbb{R}.$$

87**. Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f(x)\cdot f([x])\cdot f(\{x\})=x+f([x])+f(\{x\}),\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

88**. Să se determine funcțiile monotone crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ ce satisfac simultan condițiile:

a) $f(x)=x,\forall\, x\in\mathbb{Z}$;

b) $f(x+y)\geq f(x)+f(y),\forall\, x,y\in\mathbb{R}$.

89***. Fie $a\in[2,3)$ fixat. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ știind că:

$$f(1)-f(0)=1\text{ și }f([f(x)])=x+a,\forall\, x\in\mathbb{N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

90**. Fie $f(n)=an^2+bn+c, a,b,c\in\mathbb{N}, a\neq 0$. Să se determine a, b, c dacă:

$$\left[\frac{f(n)}{3}\right]+\left[\frac{f(n+1)}{3}\right]+\left[\frac{f(n+2)}{3}\right]=n^2+3n+2, \forall\, n\in\mathbb{N}, a\neq 0.$$

91***. Fie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, f(n)=an^2+bn+c, a,b,c\in\mathbb{Z}, a\neq 0$.
Să se determine a,b,c știind că:

$$\left[\frac{f(n)}{3}\right]+\left[\frac{f(n+1)}{3}\right]+\left[\frac{f(n+2)}{3}\right]=-n^2+11n+2, \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

92***. Determinați funcțiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ cu proprietatea:

$$f(n)=f\left(\left[\frac{n}{3}\right]\right)+f\left(\left[\frac{n}{9}\right]\right), \forall\, n\geq 3.$$

93***. Determinați funcțiile $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ care satisfac condițiile:

a) $f(0)=0$;

b) $f(x)=1+f\left(\left[\frac{x}{p}\right]\right)+f\left(\left[\frac{x}{p^2}\right]\right)$, unde $p>1$ este un număr real fixat.

94***. Fie a și p numere naturale, $a>0$ și $p>1$. Determinați funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ care verifică condițiile: $f(0)=0$ și $f(n)=1+af\left(\left[\frac{n}{p}\right]\right)$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

95***. Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ astfel încât pentru orice $x>0$ să avem:

$$f([f(x)])+\{f(x)\}=x.$$

Să se arate că $f([x])=[f(x)], \forall\, x\geq 0$.

96***. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisfac relația:

$$f(x)\cdot f([x])\cdot f(\{x\})=f(x)+f([x])+f(\{x\}), \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

97***. Fie $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}, f(n)=\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$.
Arătați că dacă există $m,n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $f(n)=f(m)$, atunci $m=n$ (f este injectivă).

98***. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ pentru care:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\sum_{k=1}^{n} k\left[\frac{n}{k}\right].$$

99***. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[x^n]-[x]$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
Să se determine $f(\mathbb{R})$.

100*. Să se arate că funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt bijective și să se afle inversele lor:

a) $f(x)=x+(-1)^{[x]}$;

b) $f(x)=x-4[x]+[2x]$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $f(x) = x - [2x]$;
d) $f(x) = x - 2[x]$;
e) $f(x) = x - (n+2)[x] + [nx]$.

101**. Să se arate că:
a) Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + [x]$ este injectivă și nesurjectivă.
b) Funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + \{x\}$ este surjectivă și neinjectivă.
c) Să se reprezinte grafic funcțiile f și g.

102*. Să se arate că nu există funcții injective sau surjective $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:
a) $f(f(x)) = [x], \forall\, x \in \mathbb{R}$;
b) $f(f(x)) = \{x\}, \forall\, x \in \mathbb{R}$;
c) $f(f(x)) = |x|, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

103*. Fie funcția $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, f(x) = \{ax\}$ cu $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
Să se arate că f este injectivă și nesurjectivă.

104*. Fie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, astfel încât $f(n) = \{g(n)\sqrt{2}\}$.
Să se arate că dacă g este injectivă, atunci f este injectivă.

105*. Fie $a, b, a+b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Să se arate că funcția:
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = \{na\} + \{nb\}$ este injectivă. Este funcția surjectivă?

106*. a) Să se arate că funcția $f: \mathbb{N}^* \to (0,2), f(n) = \{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n+1}\}$ nu este surjectivă.
b) Funcția $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) \equiv [n\sqrt{3}] - [n\sqrt{2}]$ este surjectivă?

107*. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ există $z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ astfel încât $f(x) - f(y) = z$.
Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \to [0,1), g(x) = \{f(x)\}$ este injectivă.

108*. Să se demonstreze că funcția $f: [k, k+1) \to [0,1), f(x) = \{x\}, k \in \mathbb{Z}$ fixat este inversabilă și să se calculeze inversa sa.

109**. Fie $a \in \mathbb{Z}$ și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [ax]$.
Să se determine valorile lui a pentru care f este bijectivă și $f^{-1} = f$.

110**. Fie $a \in \mathbb{Z}$ și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - [ax]$.
Să se determine valorile lui a pentru care:
a) f este injectivă;
b) f este bijectivă și $f^{-1} = f$;
c) dacă f nu este injectivă, atunci f este periodică;
d) pentru ce $a \in \mathbb{Z}$, f este surjectivă?

111*. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2[x]$.
a) Să se arate că f este bijectivă și să se determine inversa sa.
b) Să se arate că f nu este monotonă pe $\mathbb{R}$. Să se determine intervalele de lungime maximă pe care f este strict monotonă.

Scanned with OKEN Scanner

112**. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a[bx]$.
Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât f să fie bijectivă și $f^{-1} = f$.

113**. Fie $a \in \mathbb{Z}$ și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a(-1)^{[x]}$.
Să se arate că f este bijectivă și să se calculeze f^{-1}.

114**. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$2f(x) + f([x]) + 2f(\{x\} - [x]) = x, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Să se determine o funcție care verifică relația funcțională și să se studieze injectivitatea și surjectivitatea funcției găsite.

115*. Să se arate că funcția $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = [x]\{x\}$ este surjectivă.

116**. Se consideră că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\} - [x], \forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că funcția f este bijectivă și să se determine funcția inversă.

b) Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_a(x) = a\{x\} - [x], \forall\, x \in \mathbb{R}$, este bijectivă.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\operatorname{tg} x + 2 = 2[\operatorname{tg} x] + \sqrt{3}$.

117**. Fie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(n) = (-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Să se arate că f este bijectivă.

118**. Dacă $m \geq 2$ este natural, să se demonstreze că funcția:

$$f: \mathbb{N} \to [0,1), f(n) = \{m^n\sqrt{2}\} \text{ este injectivă.}$$

119***. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $f: \mathbb{N} \to [0,1), f(n) = \{an\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

a) Să se arate că f este injectivă dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

b) Dacă $a \in \mathbb{Q}$, să se determine numărul elementelor mulțimii $M = \{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$.

120**. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}^*$ și

$$A = \{a + b\sqrt{n} | a, b \in \mathbb{N}, a^2 - nb^2 = 1\}.$$

Să se arate că funcția $f: A \to \mathbb{N}, f(x) = [x]$ este injectivă, dar nu este surjectivă.

§ 4. Probleme de concurs

121**. a) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + c[x], c \in \mathbb{R}$.
Să se arate că f este bijectivă, dacă și numai dacă $c = 0$ sau $c = -2$;

b) Să se studieze în funcție de valorile lui c injectivitatea și surjectivitatea.

122***. Fie funcțiile $f, g, h, u : [0,1) \to \mathbb{R}$.

a) $f(x) = [7x] - 2[3x] - [2x]$;
b) $f(x) = [6x] - [3x] - 2[2x]$;
c) $f(x) = [10x] - [5x] - 3[2x]$;
d) $f(x) = [4x] + [3x] - [5x]$.

Scanned with OKEN Scanner

1) Să se determine imaginile funcțiilor.
2) Să se rezolve inecuațiile $f(x) < 0, g(x) \leq 0, h(x) \geq 0, u(x) \geq 0$.

123***. Să se determine $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât funcția:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n+1}{p}\right] + \left[\frac{n+2}{p}\right]$$ să fie bijectivă.

124***. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea:

$$f(x) + f([x]) + f(\{x\}) = x, \forall\, x \in \mathbb{R}$$ este bijectivă.

125**. Există funcții bijective $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să verifice relația:

$$f(x) \cdot f(|x|) \leq f(\{x\}) + f(1 - \{x\}), \forall\, x \in \mathbb{R}?$$

126**. Fie $f: [0, \infty) \to \left(\frac{1}{2}, 1\right], f(x) = \frac{[x]}{x}$. Se cere:

a) Să se arate că f este bine definită.

b) Să se arate că $\forall\, y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(n) \neq y$, $\forall\, x > n$.

c) Este f surjectivă?

127***. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$f(x) = [x] + a\{x\}^2 + b\{x\}$, unde $a, b \geq 0$, cu $a + b = 1$ și
$g(x) = [x] + \{x\}^n, n \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că funcțiile f, g sunt bijective și să se calculeze inversele lor.

128**. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \left[\frac{2x+3}{4}\right]$.

a) Să se arate că f nu este injectivă.
b) Să se arate că f este surjectivă.
c) Să se determine $M \subset \mathbb{R}$ astfel încât $f: M \to \mathbb{Z}$ să fie bijectivă.

129***. Fie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = \left[\frac{x}{3}\right]$. Să se arate că:

a) există o infinitate de funcții $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel încât $f \circ g = 1_N$;
b) nu există funcții $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel încât $h \circ f = 1_N$.

130*. Pentru ce numere $a_k \in \mathbb{Z}, k = \overline{1,n}$ funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + [a_1 x] + [a_2 x] + \cdots + [a_n x]$ este bijectivă și $f^{-1} = f$.

131***. Fie $f: \mathbb{N} \to [0,1), f(n) = \left\{2^{n+\frac{1}{2}}\right\}$. Studiați injectivitatea și surjectivitatea funcției f.

132**. Să se arate că există o funcție bijectivă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:

$$E(x,y) = f(x,y) - f(x) - f(y)$$

să ia doar valorile 0 și 1, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

133**. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \times [0,1)$, $f(x) = ([x], \{x\}), \forall x \in \mathbb{R}$ este bijectivă și determinați inversa sa.

Scanned with OKEN Scanner

134**. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care satisface relația:

$$f(x)+2f(x-2[x])=-[x],\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

135***. Fie $\mathbb{N}_{1m}=\{m,m+1,\cdots\}\subset\mathbb{N}$. Să se arate că:

a) funcția $f:\mathbb{N}_1\to\mathbb{N},\ f(n)=\left[\frac{n(n+1)}{3}\right]$ este injectivă.

Este f surjectivă?

b) Pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$, există $q\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $f:\mathbb{N}_q\to\mathbb{N}$,

$$f(n)=\left[\frac{n(n+1)}{p}\right]$$ să fie injectivă.

136***. Fie un număr real $a>0$. Să se arate că funcție $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ dată de:

$f(n)=n+[a\sqrt{n}]$ este injectivă și nesurjectivă.

137. Să se studieze injectivitatea și surjectivitatea funcțiilor:

a) $f:\mathbb{N}\to[0,1), f(x)=\{\sqrt{x}\}$;

b) $g:\mathbb{N}\to[0,2), g(x)=\{\sqrt{x}\}+\{\sqrt{x+1}\}$;

c) Există restricții ale lui f injective (sau surjective)?

138. Să se determine relația între numerele întregi a și b pentru ca funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+a[x]+b[2x]$ să fie bijectivă și $f^{-1}=f$.

139***. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât:

$$7f(x)-63x=16f([x])+16f(\{x\})-25.$$

a) Să se arate că f este strict monotonă și bijectivă. Care este inversa sa?

b) Să se arate că $g=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\ ori}$ este strict monotonă și bijectivă.

140***. Fie $a\in\mathbb{Q}$ și $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}, f(x)=\{ax^2+bx+c\}, b,c\in\mathbb{R}$.
Să se arate că f este funcție injectivă dacă și numai dacă $b\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

141***. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ și funcțiile $f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a[x]+b\{x\}$.
Demonstrați că această funcție este bijectivă dacă și numai dacă $a^2=b^2\neq 0$.

142***. a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=x+a\{x\}$ este injectivă;

b) Pentru ce valori ale lui a este bijectivă?

143***. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-3[2x]+2[3x]$.

a) Să se determine punctele fixe ale funcției.

b) Să se arate că f este bijectivă și să se afle inversa sa.

144**. Să se arate că nu există $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ injectivă astfel încât:

$$3f(x^3)=[f(x)]^3+2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

145. Determinați funcțiile injective $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Z}$, cu proprietatea că:

$$f(n)=\left[\frac{f(1)}{2}\right]+\left[\frac{f(2)}{3}\right]+\left[\frac{f(3)}{4}\right]+\cdots+\left[\frac{f(n)}{n+1}\right],\forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

Scanned with OKEN Scanner

146***. Spunem că o funcție $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ are proprietatea (P) dacă pentru orice $y\in\mathbb{N}$, ecuația $f(x)=y$ are exact 3 soluții.

a) Arătați că există o infinitate de funcții cu proprietatea (P).
b) Determinați funcțiile monotone cu proprietatea (P).
c) Cercetați dacă există funcții monotone $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ cu proprietatea (P).

147***. Fie funcția $g:\mathbb{N}^*\to[0,1)$, unde:

$$g(n)=\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}:\mathbb{N}^*\to[0,1).$$

Să se arate că g este injectivă și nesurjectivă.

148***. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[x]-\left\{x+\frac{1}{2}\right\}$. Arătați că funcția f este bijectivă.

149***. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și f o funcție bijectivă $f:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\}$ cu proprietatea P dacă relația

$$g(k)=f(1)+f(2)+\cdots+f(k)-n\left[\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(k)}{n}\right],$$

pentru $k=\overline{1,n}$, definește o funcție bijectivă $g:\{1,2,\ldots,n\}\to\{0,1,2,\ldots,n\text{-}1\}$. Arătați că există o funcție cu proprietatea (P) dacă și numai dacă n este par.

150***. Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$.

a) Demonstrați că f este injectivă și nu este surjectivă.
b) Determinați $A\subset\mathbb{N}^*$ astfel încât funcția $g:\mathbb{N}^*\to A$, $g(n)=f(n)$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ să fie bijectivă.

151***. Se consideră mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,[x^3]=[x]^3\}$.

a) Să se determine A.
b) Construiți o funcție bijectivă de la A la $\mathbb{R}$.
c) Există o funcție surjectivă de la A la $\mathbb{Q}$?

152. Să se determine funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ injectivă cu proprietatea:

$$\left[\frac{f(n)}{2}\right]+\left[\frac{f(n+1)}{2}\right]=n,\forall\, n\in\mathbb{N}.$$

153. Determinați câte dintre numerele naturale cuprinse între 0 și 2013 se pot scrie sub forma:

$$[x]+[2x]+[3x]+[4x], \text{ unde } x\in\mathbb{R}.$$

154***. Fie funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$,

$$f(x)=\left[\frac{ax+b}{cx+d}\right], \text{unde } a,b,c,d\in\mathbb{N} \text{ și } c+d\neq 0.$$

Să se arate că f este injectivă dacă și numai dacă $c=0$ și $a\geq d$.

Scanned with OKEN Scanner

155*. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+m[x]$.

a) Pentru ce valori ale lui $m\in\mathbb{R}$ f este injectivă.

b) Pentru ce valori ale lui $m\in\mathbb{R}$ f este surjectivă.

c) Să se arate că f este bijectivă dacă și numai dacă $m\in\{-2,0\}$.

156**. Fie $r_1, r_2, r_3, , \dots, r_m$ numere raționale pozitive cu $\sum_{k=1}^{m} r_k = 1$.

Definim funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\ \ f(n)=n-\sum_{k=1}^{m}[r_k n]$.

Determinați minimul și maximul funcției f.

157***. Fie funcția $h:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*, h(n)=\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]$.

Determinați toate valorile lui $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $h(n)>h(n+1)$.

158***. Fie p_1, p_2, p_3 numere reale strict pozitive și funcțiile

$f, g:[0,\infty)\to[0,\infty), f(x)=[\sqrt{x}]$ și $g(x)=\left[\sqrt{x-[\sqrt{x}]^2}\right]$.

Să se demonstreze inegalitatea $g(p_1)f(p_2)f(p_3)+f(p_1)g(p_2)f(p_3)+$
$+f(p_1)f(p_2)g(p_3)\le f(p_1p_2p_3)+g(p_1p_2p_3)$.

159***. Fie funcția $h:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ cu $f(1)=1$ și

$f(n)=f\left(\left[\frac{2n}{3}\right]\right)+f\left(\left[\frac{2n-1}{3}\right]\right)$.

Să se găsească o valoare $m\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $f(m)-f(m-1)>m$.

160**. Determinați polinoamele $P, Q\in\mathbb{R}[x]$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{p(x)+\sin q(x)\}$ este polinomică, unde $p, q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt funcțiile polinomiale asociate polinoamelor P respectiv Q.

161**. Fie $\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ cu $\alpha>\beta>0$ și $[\alpha]=[\beta]$.

Să se arate că funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=[n\alpha]-[n\beta]$ este nemărginită, neinjectivă și surjectivă.

162**. Fie $f, g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=[n\sqrt{3}]+[\sqrt{2}]$ și $g(n)=f(n+1)-f(n)$.

a) Să se determine $\mathrm{Im}g$.

b) Să se arate că $g(n)=3$ pentru o infinitate de valori ale lui $n\in\mathbb{N}$.

c) Funcția g este periodică?

163**. Fie $f:[0,a]\to[0,b]$ o funcție strict crescătoare și bijectivă. Notăm $n(f)$ numărul de numere întregi din mulțimea $\{f(1), f(2), \dots, f([a])\}$ sau numărul de puncte $(k, f(k))$ de coordonate întregi, $k=\overline{1,[a]}$, situate pe graficul funcției f. Să se arate că avem egalitatea:

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{k=1}^{[a]}[f(k)]+\sum_{k=1}^{[b]}[f^{-1}(k)]=[a][b]+n(f).$$

164**. Fie $f:[1,a]\to[1,b]$ o funcție strict descrescătoare și bijectivă. Să se arate că: $\sum_{k=1}^{[a]}[f(k)]=\sum_{k=1}^{[b]}[f^{-1}(k)]$.

165**. Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și orice funcție $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, cu $f(0)=0$ avem: $\sum_{k=1}^{n}f\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right](f(k)-f(k-1))$.

166**. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n^2}{k^2}\right]=\sum_{k=1}^{n^2}\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right],\forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

167**. Fie $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ o funcție strict crescătoare și surjectivă cu $f(0)=0$. Să se arate că $\sum_{k\geq1}\left[\frac{n}{f(k)}\right]=\sum_{k\geq1}\left[f^{-1}\left(\frac{n}{k}\right)\right]$.

168**. Fie $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*, f(n)=n+[\sqrt{x}]$. Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$ șirul $m, f(m), f(f(m)), \ldots$ conține cel puțin un pătrat perfect.

Scanned with OKEN Scanner

soluţii 17 | Funcţii

ϕ 1. Exerciţii diverse

1*. Avem $f(x+6) = x+6+\left[\frac{x+6}{6}\right] - \left[\frac{x+6}{2}\right] - \left[\frac{2(x+6)}{3}\right] =$

$= x+6+\left[\frac{x}{6}\right]+1-\left[\frac{x}{2}\right]-3-\left[\frac{2x}{3}\right]-4 = f(x).$

Avem $f(x_0) = 0$, pentru $x_0 \in \{0,2,3,4,5\}$ şi $f(1) = 1$. Aşadar, $\text{Im}f = \{0,1\}$.

2. a) Calculăm $f(x+1) = \{x+1\}+\{2x+2\}+\{3x+3\} =$

$= \{x\}+\{2x\}+\{3x\} = f(x)$ şi dacă $T = 1$ este o perioadă a funcţiei.

Să analizăm prin absurd că există o perioadă $t \in (0,1)$, adică $f(x+t) =$

$= f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$. Dar pentru $x = 0 \Rightarrow f(t) = f(0) = 0 \Rightarrow f(t) = 0$, absurd.

b) Rezolvăm ecuaţia în intervalul $[0,1)$ se găseşte

$S = \left[0,\frac{1}{6}\right] \cup \left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right\}$ la care se adaugă prin periodicitate soluţiile din $[1,2)$.

c) $x_k \equiv k+\frac{5}{6}, k \in \mathbb{Z}$.

O.L. Constanţa, 2009

3. Calculăm $f(x+2n) = (-1)^{[x]}\left(x+2n-2n\left[\frac{x+2n}{2n}\right]-1\right)+4 =$

$= (-1)^{[x]}\left(x+2n-2n\left(1+\left[\frac{x}{2n}\right]-1\right)+4\right) =$

$= (-1)^{[x]}\left(x-2n\left[\frac{x}{2n}\right]-1\right)+4 = f(x).$

Aşadar $T = 2n$ este perioadă a funcţiei f.

4. Luăm părţile întregi şi părţile fracţionare ale ambilor membri, rezultă

$f(x+2) = f(x)$ (1) şi $\{f(x+2)\} = \{f(x+1)\}, \forall\, x \in \mathbb{R}$ (2).

Făcând substituţia $x \to x-1$ în (2) rezultă

$\{f(x+1)\} = \{f(x)\}, \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \{f(x+2)\} = \{f(x)\}$ (3).

Din (1) şi (3) rezultă $[f(x+2)]+\{f(x+2)\} = [f(x)]+\{f(x)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x+2) = f(x)$, adică funcţia este periodică cu $T = 2$.

O.L. Ilfov, 2010

Scanned with OKEN Scanner

5. Pentru $m = n \Rightarrow f(1) = 1$. Pentru $m = 1$ și $n \geq 2 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{f(n)} \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\Rightarrow f(n) = 1$. Se deduce că există o singură funcție $f(n) = 1$.

Lucian Dragomir, R.M.C.S., 2011

6*. Avem $f(x+1) = f(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$, deci $T = 1$ este perioadă a funcției.
Să presupunem că există $T \in (0,1)$ perioada funcției $f(x+t) = f(x)$,
$\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \{x+t\} + \{2x+2t\} + \cdots + \{nx+nt\} = \{x\} + \{2x\} + \cdots + \{nx\}$,
pentru $x = 0 \Rightarrow \{t\} + \{2t\} + \cdots + \{nt\} = 0 \Rightarrow \{kt\} = 0 \Rightarrow t = 0$, fals.

Mihaly Bencze, Octogon nr. 17

7. Avem $f(x+a) = a\left[\frac{x+a}{a}\right] + f\left(a\left\{\frac{x+a}{a}\right\}\right) = a\left(1 + \left[\frac{x}{a}\right]\right) + f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right) =$
$= a + f(x)$ (s-au utilizat identitățile $[x+m] = m + [x]$ și $\{x+m\} = \{x\}$,
$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, m \in \mathbb{Z}$.)

8*. a) Arătăm că $T = 1$ este perioada principală. Avem:
$f(x+1) = \{x+1\} + \{2(x+1)\} + \{3(x+1)\} = \{x\} + \{2x\} + \{3x\} = f(x)$.
(S-a utilizat relația $\{k+x\} = \{x\}, \forall\, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$).
Fie $0 < t < 1$ o altă perioadă, atunci: $f(x+t) = f(x)$ și pentru $x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \{t\} + \{2t\} + \{3t\} = 0$, dar cum $\{kt\} \geq 0 \Rightarrow t = 0$, fals.

b) Se găsește $x = k + \frac{5}{6}$, cu $k \in \mathbb{Z}, f\left(k + \frac{5}{6}\right) = 2$.

c) Vezi ex. 5.

9. a) Se aplică identitatea lui Hermite pentru $n = 5$ rezultă
$f(x) = \left[5\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{5} + 1\right] = [x] + \left[\frac{x}{5}\right] + 1 \quad (1)$.
Dacă notăm $[x] = k, \{x\} = t \in [0,1)$ și (1) devine:
$E(k) = k + \left[\frac{k+t}{5}\right] + 1 = k + \left[\frac{k}{5}\right] + 1$, unde s-a aplicat relația
$\frac{k}{n} \leq u < \frac{k+1}{n} \Rightarrow [u] = \left[\frac{k}{n}\right]$, deci $\frac{k}{5} \leq \frac{k+t}{5} < \frac{k+1}{5} \Rightarrow \left[\frac{k+t}{5}\right] = \left[\frac{k}{5}\right]$.
Se consideră pe rând $k = 5p + r, r \in \{0,1,2,3,4\}$ și pentru $E(k)$ rezultă valorile $6p+1, 6p+2, 6p+3, 6p+4, 6p+5$, deci $E(k) \in \mathbb{N} - \{6p\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{Im}f = \mathbb{N} - \{6p\}, p \in \mathbb{N}$.

b), c) Se procedează ca la punctul a).

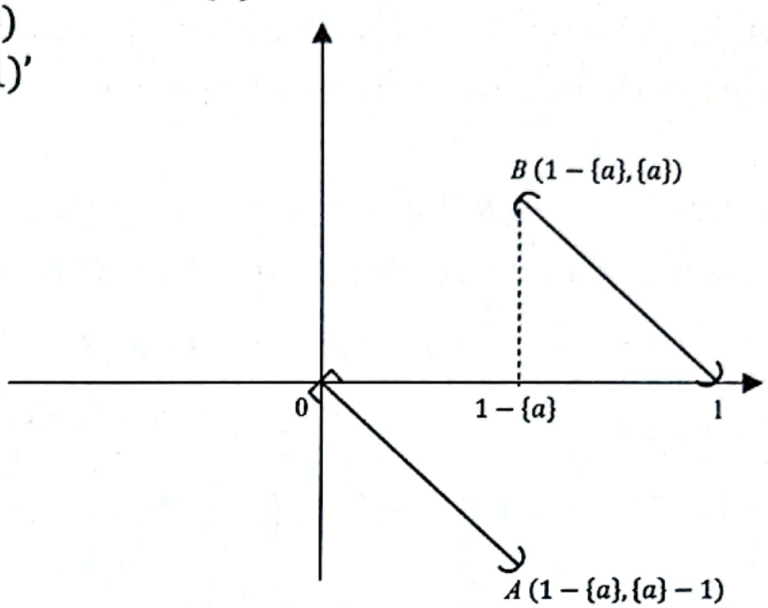
10*. Evident pentru $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = [x] - x = -\{x\}$ care este periodică cu $T = 1$ și care se reprezintă grafic.
Fie $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, atunci funcția are tot perioada $T = 1$. Într-adevăr, avem
$f(x+1) = [a+x+1] - [a] - x - 1 = [a+x] - [a] - x = f(x)$.
Observăm că $f(0) = f(1) = 0$. Vom determina funcția pe intervalul $[0,1]$.
Avem $f(x) = [[a] + \{a\} + x] - [a] - x = [a] + [\{a\} + x] - [a] - x =$

Scanned with OKEN Scanner

$= [\{a\} + x] - x = \begin{cases} -x, & \text{dacă } 0 \le \{a\} + x < 1 \\ 1 - x, & \text{dacă } 1 \le \{a\} + x < 2 \end{cases} =$

$= \begin{cases} -x, & x \in [0, 1 - \{a\}) \\ 1 - x, & x \in [1 - \{a\}, 1) \end{cases}$,

deci graficul este dat.

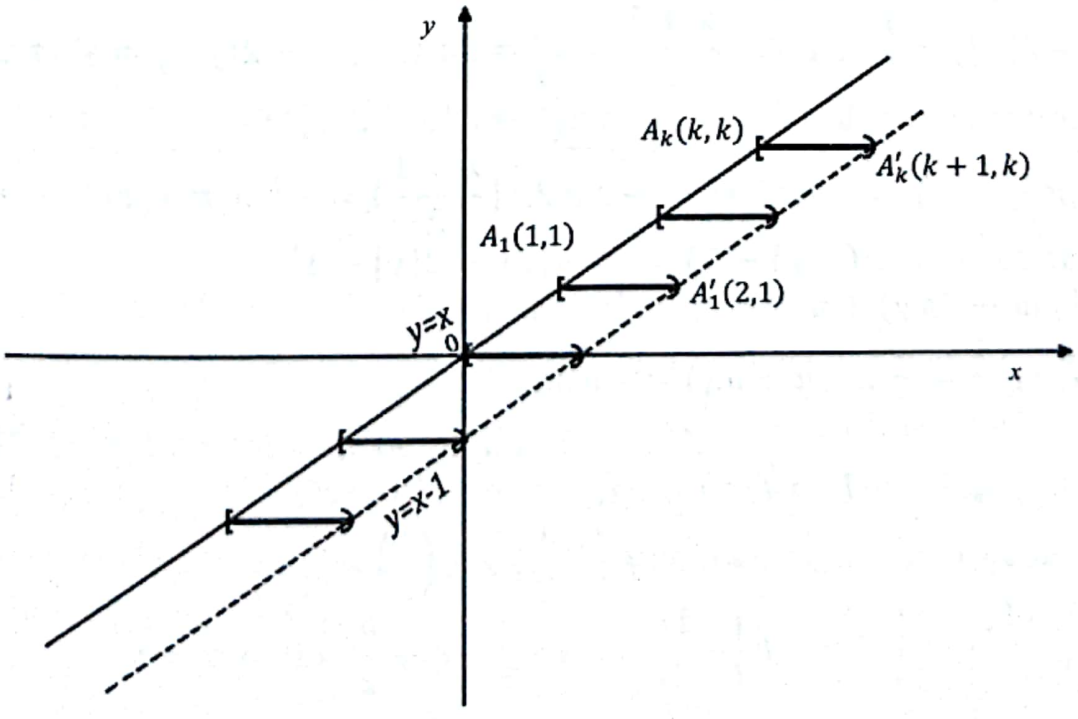


11*. a) Deoarece $x > 0$ atunci inegalitatea devine $(x - 10)^2 \ge 0$ care este evidentă.

b) Din $[a] > a - 1 \Rightarrow [x] + \left[\frac{100}{x}\right] > x + \frac{100}{x} - 2 \ge 18$. Dar cum $s_x = [x] + \left[\frac{100}{x}\right] \in \mathbb{N}$ și $s_x \ge 19$. Pentru $x = 10{,}1$ se obține $s_x = 19$ și $s_{min} = 19$.

Concursul „Teodor Topan", 2014, Concursul „Laurențiu Panaitopol", 2014

12*.



Scanned with OKEN Scanner

Utilizând graficul funcției $f(x)=[x]$ se observă că coordonatele capetelor unui segment paralele cu axa OX, ce face parte din graficul funcției $[A_K, A_k')$, sunt $A_k(k,k), A_k'(k,k+1)$. Prin punctele A_k trece dreapta $y=x$, iar prin punctele A_k' trece dreapta $y=x-1$.

Cristian Andrei, Gh. Andrei

13*. Dreptele $x=\frac{k}{2}, k\in\mathbb{Z}$ sunt axe de simetrie.

14*. Avem $x=a$ este axa de simetrie dacă: $f(2a-x)=f(x), \forall\, x\in\mathbb{R}$.

Arătăm că $x=\frac{2k+1}{2}$ sunt axe de simetrie, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

$$f(2a-x)=\begin{cases}(-1)^{[2a-x]}, 2a-x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\\ 0\quad\quad\quad, 2a-x\in\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}(-1)^{2a+[-x]}, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\\ 0\quad\quad\quad, x\in\mathbb{Z}\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}(-1)^{2k+1-[x]-1}, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\\ 0\quad\quad\quad\quad, x\in\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}(-1)^{[x]}, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\\ 0\quad\quad, x\in\mathbb{Z}\end{cases}=f(x).$$

15**. a) Avem $-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}-\left|1-2\left\{\frac{x+1}{2}\right\}\right|\le\frac{1}{2}$, cu inegalitatea din dreapta evident adevărată, iar cea din stânga echivalentă cu $\left|1-2\left\{\frac{x+1}{2}\right\}\right|\le 1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -1\le 1-2\left\{\frac{x+1}{2}\right\}\le 1\Leftrightarrow\left\{\frac{x+1}{2}\right\}\le 1 \text{ și } \left\{\frac{x+1}{2}\right\}\ge 0.$$

Observație: Dacă $\left\{\frac{x+1}{2}\right\}\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}$, iar dacă $x=2k\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}$.

Așadar, se realizează egalitățile în punctul a).

b) Avem $\cos\pi f(x)=\cos\pi\left(\frac{1}{2}-|1-2\{y\}|\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi|1-2\{y\}|\right)=$

$$=\sin\pi(1-2\{y\})=\left(\text{s-a notat }\frac{x+1}{2}=y\right)=\sin\pi(\pm(1-2\{y\}))=\sin\pi x.$$

Într-adevăr dacă $\sin\pi(1-2\{y\})=\sin\pi(1-(2y-2[y]))=$

$$=\sin(2[y]\pi-2\pi y)=-\sin 2\pi y=-\sin 2\pi\left(\frac{x+1}{2}\right)=-\sin(\pi+\pi x)=$$

$=\sin\pi x$, iar dacă $\sin\pi(2\{y\}-1)=\sin\pi[2y-2[y]-1]=$

$$=-\sin(2[y]\pi-2\pi y)+\pi=\sin(2[y]\pi-2\pi y)=$$

$$=-\sin 2\pi\frac{x+1}{2}=-\sin(\pi+\pi x)=\sin\pi x.$$

Alexandru Lupas, Arhimede nr. 11-12/2002

16**. Evident dacă $a=b\Rightarrow f(x)=ax$, care este impară.

Reciproc, dacă f este impară, atunci $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a\left[\frac{1}{2}\right]+b\left\{\frac{1}{2}\right\}+a\left[-\frac{1}{2}\right]+b\left\{-\frac{1}{2}\right\}=0\Leftrightarrow\frac{b}{2}-a+\frac{b}{2}=0\Rightarrow a=b.$$

Scanned with OKEN Scanner

17*. Fie $f(x)=x^2-\{x\}=x^2-x+[x]$ și $a,b\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)$. Calculăm raportul $R(a,b)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{(a^2-a+[a])-(b^2-b+[b])}{a-b}=$

$=a+b-1+\frac{[a]-[b]}{a-b}>0.$

Întrucât funcția parte întreagă este funcție crescătoare,

$\frac{[a]-[b]}{a-b}\geq 0$, dar $a+b-1>0$, deci $R(a,b)>0$.

18.** Cum f este strict monotonă, funcția f este strict crescătoare, dar funcția $h(x)=\{x\}=\begin{cases}x, & x\in[0,1)\\ 0, & x=1\end{cases}$ nu este strict crescătoare.

19.** Avem $n\leq\sqrt[3]{n^3+n}<x+1\Rightarrow\left[\sqrt[3]{n^3-n^2}\right]=n$, atunci

$f(n)=\sqrt[3]{n^3+n^2}-n=\frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2}+\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2}=$

$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}$ crescătoare (întrucât numitorul este o funcție strict descrescătoare).

20*. a) Avem $f(x)=0\Leftrightarrow[x^2+x+1]=0\Rightarrow 0\leq x^2+x+1<1\Rightarrow$
$\Rightarrow x\in[-1,0)$ și $f(x)=1\Rightarrow[x^2+x+1]=x^2+1\Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+1\in\mathbb{N}^*$ și $x^2+x<x^2+1\leq x^2+x+1\Rightarrow x\in[1,0)\Rightarrow x=0$.

b) Avem $f(x)\leq\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=1+\frac{x}{x^2+1}\leq 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

21*. Pentru $x=2\Rightarrow f(2)=\frac{1}{8}$. Fie x prim, $x=2k+1$,

$\frac{x^2-1}{2n}=\frac{(x-1)(x+1)}{2n}=\frac{k(k+1)}{6}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left\{\frac{x^2-1}{2n}\right\}=0$,

dacă $k\in\{3p,3p+2\}$. Pentru $k=3p+1\Rightarrow x=2k+1=2(3p+1)+1=$
$=6p+3$ nu este prim. Prin urmare $\mathrm{Im}f=\left\{0,\frac{1}{8}\right\}$.

Ludovic Longaver, Argument nr. 11

22*. Funcția $S(n)=\sqrt{n+a}-\sqrt{n}=\frac{a}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}$, $n\in\mathbb{N}$ este descrescătoare, deci f este descrescătoare. Avem $0\leq f(n)\leq f(0)=[\sqrt{a}]$, $\forall n\in\mathbb{N}$, deci $\mathrm{Im}f\ C\{0,1,2,\ldots,[\sqrt{a}]\}$. Rezultă evident și reciproc, deci $\mathrm{Im}f=\{0,1,2,\ldots,[\sqrt{a}]\}$.

Ovidiu Pop, G.M. nr. 11/2000

Scanned with OKEN Scanner

23*. Avem $f(x)=\dfrac{3x^2+x-\{x\}}{|x|}>\dfrac{3x^2+x-1}{|x|}>1\Rightarrow \text{Im}f=(1,\infty)$.
Zero elemente, deoarece nu există $x_0\in D$ astfel încât $f(x_0)=1$.

24**. Dacă $n=k^p\Rightarrow f(n)=0$. Dacă $n\neq k^p$ atunci avem:

$$f(n)=\left[-\left(\sqrt[p]{n}-\left[\sqrt[p]{n}\right]\right)\right]=\left[\left[\sqrt[p]{n}\right]-\sqrt[p]{n}\right]=$$
$$=\left[\sqrt[p]{n}\right]+\left[-\sqrt[p]{n}\right]=\left[\sqrt[n]{p}\right]-\left[\sqrt[p]{n}\right]-1=-1,$$

întrucât $[-x]=-[x]-1,\forall\, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$. Așadar Im$f$= $\{0,-1\}$.

25**. $f(n)=1+\left[-\left\{\sqrt[k]{n}\right\}\right]=1+\left[-\sqrt[k]{n}+\left[\sqrt[k]{n}\right]\right]=1+\left[\sqrt[k]{n}\right]+\left[-\sqrt[k]{n}\right]=$

$$=1+\begin{cases}0, & \text{dacă } \sqrt[k]{n}\in\mathbb{N}\\ -1, & \text{dacă } \sqrt[k]{n}\notin\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1, & \text{dacă } \sqrt[k]{n}\in\mathbb{N}\\ 0, & \text{dacă } \sqrt[k]{n}\notin\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow \text{Im}f=\{1,0\}.$$

26**. Trebuie ca $[x]-1\neq 0\Rightarrow [x]\neq 1\Rightarrow x\notin[1,2)\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{[1,2)\}=D$.

$$f(x)=\left[\frac{[x]-1+2}{[x]-1}\right]=\left[1+\frac{2}{[x]-1}\right]=1+\left[\frac{2}{[x]-1}\right];$$

– dacă $[x]-1\geq 3\Rightarrow [x]\geq 4\Rightarrow x\geq 4\Rightarrow x\in[4,\infty)$, atunci $\left[\dfrac{2}{[x]-1}\right]=0$
$\Rightarrow f(x)\equiv 1$;
– dacă $[x]-1\leq -3\Rightarrow [x]\leq -2\Rightarrow x<-1\Rightarrow x\in(-\infty-1)$,
atunci $\left[\dfrac{2}{[x]-1}\right]=-1\Rightarrow f(x)=0$;
– dacă $[x]-1=-2\Rightarrow [x]=-1\Rightarrow x\in[-1,0)\Rightarrow f(x)=0$;
– dacă $[x]-1=-1\Rightarrow [x]=0\Rightarrow x\in[0,1)\Rightarrow f(x)=-1$;
– dacă $[x]-1=1\Rightarrow [x]=2\Rightarrow x\in[2,3)\Rightarrow f(x)=3$;
– dacă $[x]-1=2\Rightarrow [x]=3\Rightarrow x\in[3,4)\Rightarrow f(x)=2$.

Așadar $f(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x\in(-\infty,0)\\ -1, & \text{dacă } x\in[0,1)\\ 3, & \text{dacă } x\in[2,3)\\ 2, & \text{dacă } x\in[3,4)\\ 1, & \text{dacă } x\in[4,\infty)\end{cases}\Rightarrow f(D)=\{0,-1,1,2,3\}.$

27*. a) $[x]=3\{x\}\Leftrightarrow k=3t\in\mathbb{Z}\Rightarrow t\in\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right\}\Rightarrow k\in\{1,2\},x\in\left\{\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right\}$;

b) Dacă $n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow [x]=\{x\}\Leftrightarrow k=nt\in\mathbb{Z}\Rightarrow t\in\left\{\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\cdots,\dfrac{n-1}{n}\right\}$.

Așadar pentru $t=\dfrac{p}{n}\Rightarrow k=p\Rightarrow x_p=p+\dfrac{p}{n}, p\in\{1,2,\cdots,n-1\}$, deci mulțimea A_n este finită. Evident pentru $x=0\Rightarrow [x]=0\Rightarrow x\in[0,1)$.

Pepina Dincă, Concursul „Laurențiu Panaitopol", 2016

28***. Fie $x=m+\alpha, y=b+\beta$, unde $m,n\in\mathbb{Z}$ și $\alpha,\beta\in[0,1)$. Vom considera două cazuri:

Scanned with OKEN Scanner

a) $\alpha+\beta\in[0,1)$, atunci $f(x+y)=\dfrac{\{x+y\}^2}{[x+y]}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{m+n}$ și inegalitatea este echivalentă cu $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{m+n}<\dfrac{\alpha^2}{m}+\dfrac{\beta^2}{n}$ (1) care este o inegalitate cunoscută.

b) Dacă $\alpha+\beta\in[1,2)$, atunci $f(x+y)=\dfrac{(\alpha+\beta-1)^2}{m+n+1}\le\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{m+n}\le$

$\le\dfrac{\alpha^2}{m}+\dfrac{\beta^2}{n}\le f(x)+f(y)$.

Concursul „Arhimede", 2011

29**. a) Evident $f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}[x]-[x], & x\in\mathbb{Z}\\ [x]-[x]-1, & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}=$

$=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Z}\\ -1, & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow \text{Im}f=\{0,-1\}$;

b) Din $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2009})=-2008$ și din punctul a) rezultă că un singur număr dintre numerele date este întreg.

Mihai Manea, Maria Stroe, G.M.(S) 12/2011

30**. Utilizăm relația $\left[\dfrac{[x]}{n}\right]=\left[\dfrac{x}{n}\right],\forall\, x\in\mathbb{R}$ și $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Avem $f\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]\right)=\left[\dfrac{n}{2}\right]-\left[\dfrac{\left[\frac{n}{2}\right]}{2}\right]-\left[\dfrac{\left[\frac{n}{2}\right]}{4}\right]-\left[\dfrac{\left[\frac{n}{2}\right]}{8}\right]+\cdots=\left[\dfrac{n}{2}\right]-\left[\dfrac{n}{4}\right]+\left[\dfrac{n}{8}\right]-\left[\dfrac{n}{16}\right]$,

deci $f(n)=n-f\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]\right),\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

31**. Egalitatea este echivalentă cu $f(a)=\left[\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}\right]-[\sqrt{a}]$.

Dacă $a\in[k^2,k^2+k)\Rightarrow 4k^2+1\le 4a+1<(2k+1)^2$.

$\sqrt{4k^2+1}<\sqrt{4a+1}<2k+1\Rightarrow$

$\Rightarrow k<\dfrac{1+\sqrt{4k^2+1}}{2}<\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}<k+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}\right]=k$ și $[\sqrt{a}]=k\Rightarrow f(a)=0$.

Dacă $a\in[k^2+k,(k+1)^2)\Rightarrow k+1\le\dfrac{\sqrt{4a+1}+1}{2}<k+2\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\dfrac{\sqrt{4a+1}+1}{2}\right]=k+1$ și $[a]=k\Rightarrow f(a)=1$ și $[\sqrt{a}]=k$.

Ovidiu Pop, G.M. nr. 11/2012

Scanned with OKEN Scanner

32**. Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$ și $x = \sqrt[n]{\frac{p}{\sqrt{3}}}$, $y = \sqrt[n]{\frac{q}{\sqrt{3}}} \Rightarrow x^n = \frac{p}{\sqrt{3}}, y^n = \frac{q}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^n\sqrt{3} = p$ și $y^n\sqrt{3} = q \Rightarrow \{p\} = \{q\} = 0 \Rightarrow \{x^n\sqrt{3}\} = \{y^n\sqrt{3}\} = 0.$

33**. $f(x+1) = f(x)$ funcția periodică cu $T = 1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \{kx\} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} [kx - [kx]] = k - \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} [kx] = k - (k-1) = 1.$

(Funcția $[kx]$ este constantă pe o vecinătate mică a lui 1 și este egală cu $k-1$. De exemplu, $x_n = \frac{n}{n+1} \to 1, (n \to \infty), [kx_n] = \left[k\frac{n}{n+1}\right] = k-1.$)

Deci Sup $f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \frac{1+1+\cdots+1}{\text{de } n \text{ ori}} = n.$

Mihai Piticari, Vladimir Cerbu, Concursul „Vasile Polesciuc", 2012

34**. Vom arăta $T = 2k$ este perioada principală.

Într-adevăr $f(n+2k) = (-1)^{\left[\frac{n+2k}{k}\right]} = (-1)^{\left[2+\frac{n}{k}\right]} = (-1)^2(-1)^{\left[\frac{n}{k}\right]} = f(n)$, deci $T = 2k$ este perioadă. În cazul $k = 1 \Rightarrow T = 2$. Fie $k \geq 2$. Să presupunem prin absurd că există T_0 perioada principală cu $1 \leq T_0 \leq 2k-1$. Vom stabili afirmația: $\exists\, T \in \{k, k+1, \cdots, 2k-1\}$ $(*)$ perioadă a lui f.

Dacă $T_0 \geq k \Rightarrow T = T_0$. Presupunem că $T_0 \in \{1,2,\ldots,k-1\} \Rightarrow 2T_0 < 2k$ și fie m cel mai mare număr natural astfel încât $mT_0 < 2k \Rightarrow (m+1)T_0 \geq$ $\geq 2k$.

Dacă luăm $T = mT_0 < 2k$ și $T + T_0 \geq 2k \Rightarrow T \geq 2k - T_0 > k+1 > k$.

$k < 2k$ și prin urmare afirmația $(*)$ este adevărată, de unde rezultă $\left[\frac{T}{k}\right] = 1$. Avem $f(0) = f(T) \Rightarrow (-1)^0 = (-1)^{\left[\frac{T}{k}\right]} \Leftrightarrow 1 = -1$, absurd.

Așadar, perioada principală este $T_k = 2k$.

Cristinel Mortici

35**. a) Deoarece $n \leq \sqrt{n(n+1)} < n+1 \Rightarrow \left[\sqrt{n(n+1)}\right] = n$, deci $f(n) = \sqrt{n(n+1)} - n = \left\{\sqrt{n(n+1)}\right\}$.

Evident se arată ușor că $f(n-1) < f(n)$.

Avem $f(n-1) < f(n) \Rightarrow \sqrt{n(n-1)} - n - 1 < \sqrt{n(n+1)} - n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4n^2 - 4n < 4n^2 - 4n + 1 \Rightarrow f$ crescătoare.

b) Evident $0{,}4 < \sqrt{n(n+1)} - n < 0{,}5$ care se demonstrează cu ușurință și $0{,}4k < \sum\limits_{x=1}^{k} f(n+i) < 0{,}5k.$

Scanned with OKEN Scanner

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n(n+1)}\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)}-n-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n(n+1)}+n}=\dfrac{1}{2}$.

Andrei Cristian, G.M. nr. 1/1988

§ 2. Probleme de concurs

36***. Vom utiliza identitatea din capitolul Egalități,
$[\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}]=[\sqrt{4n-1}],\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.
Atunci, funcția f devine: $f(n)=[2\sqrt{n}]-[\sqrt{4n-1}]=[\sqrt{4n}]-[\sqrt{4n-1}]$ și cum numerele $4n-1, 4n$ sunt numere naturale consecutive, sunt posibile variantele:

a) $k^2\le 4n-1<4n<(k+1)^2, k\in\mathbb{N}^*$ sau

b) a) $k^2<4n-1<4n=(k+1)^2$ și atunci

$f(n)=\begin{cases}1, & \text{dacă } n \text{ este pătratul perfect}\\ 0, & \text{dacă } n \text{ nu este pătratul perfect}\end{cases}$

Prin urmare $f(n)=1$, dacă $n=k^2, k\in\mathbb{N}^*$.

Australia, 1993, (35/165)

37***. $f(x)=ax^2+bx+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{Z}$ și $a\neq 0$.
$f(\sqrt{2})=2a+b\sqrt{2}+c\Rightarrow[f(\sqrt{2})]=0\Rightarrow[2a+c+b\sqrt{2}]=0\Rightarrow$
$\Rightarrow[b\sqrt{2}]=-[2a+c]=-2a-c.$
$f(\sqrt{5})=5a+b\sqrt{5}+c\Rightarrow[f(\sqrt{5})]=0\Rightarrow[5a+b\sqrt{5}+c]=0\Rightarrow$
$\Rightarrow[b\sqrt{5}]=-[5a+c]=-5a-c.$
$f(\sqrt{8})=8a+b\sqrt{8}+c\Rightarrow[f(\sqrt{8})]=0\Rightarrow[8a+2\sqrt{2}b+c]=0\Rightarrow$
$\Rightarrow[2b\sqrt{2}]=-[8a+c]=-8a-c$. Așadar $[b\sqrt{8}]+[b\sqrt{2}]>2[b\sqrt{5}]$ (1).
Cum $x-1\le[x]<x\Rightarrow b\sqrt{8}+b\sqrt{2}=2b\sqrt{5}-2\Rightarrow|b|<9$.
Dacă egalitatea (1) este adevărată pentru valori pozitive ale lui b, atunci va fi adevărată și pentru valorile corespunzătoare negative. Analizând cazurile $b\in\{0,1,2,\cdots,8\}\Rightarrow b\in\{0,3,4\}$. Eliminând cazul $b=0\Rightarrow a=0$ și $c=0$ rezultă:

a) $b=3\Rightarrow\begin{cases}5a+c=-6\\ 8a+c=-8\end{cases}\Rightarrow 3a=-2\Rightarrow a\notin\mathbb{Z}$;

b) $b=4\Rightarrow\begin{cases}5a+c=-8\\ 8a+c=-11\end{cases}\Rightarrow a=-1$ și $c=-3$.

Așadar $f(x)=-x^2+4x-3$.

c) Dacă $b=-4\Rightarrow\begin{cases}5a+c=9\\ 8a+c=12\end{cases}\Rightarrow a=1, c=4$ și
$f(x)=x^2-4x+4$.

O.J. Dolj

Scanned with OKEN Scanner

38***. a) Utilizăm identitatea $\left[\frac{x}{d}\right]=\left[\frac{[x]}{d}\right], d\in\mathbb{N}^*, x\in\mathbb{R}$ și

$f(x)=\frac{1}{p}\left[\frac{x}{p}\right]$ și $f_{(p)}^3=\frac{1}{p}\left[\frac{f}{p}\right]=\frac{1}{p}\left[\frac{[x]}{p^2}\right]=\frac{1}{p}\left[\frac{x}{p^2}\right]\Rightarrow g(x)=f_{(x)}^{(n)}=\frac{1}{p}\left[\frac{x}{p^{n-1}}\right];$

b) $g(x_0)=\frac{1}{p}\left[\frac{3p^n}{(p+1)p^{n-1}}\right]=\frac{1}{p}\left[\frac{3p}{p+1}\right]=\frac{1}{p}\left[\frac{3(p+1)-3}{p+1}\right]=$

$=\frac{1}{p}\left[3-\frac{3}{p+1}\right]=\frac{1}{p}\left(3+\left[\frac{-3}{p+1}\right]\right)=\frac{2}{p}\ (p\geq 2).$

39***. Soluția 1

Se arată mai întâi că $f(k)\in\mathbb{Z}$.

Avem $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f([x])=[f(x)]\Rightarrow f(k)\in\mathbb{Z}, \forall\, k\in\mathbb{Z}$.

Să presupunem prin absurd că $|f(a)-f(b)|<|a-b|, \forall\, a,b\in\mathbb{R}$, atunci $|f(k+1)-f(k)|<1\Rightarrow f(k+1)=f(k), \forall\, k\in\mathbb{Z}$, de unde rezultă $f(k)=f(0), \forall\, k\in\mathbb{Z}$, adică $f\left(f(k)\right)=f\left(f(0)\right)=0$, fals.

Soluția 2

Se observă că $f(0)\neq f(1)$. (Dacă $f(0)=f(1)\Rightarrow f\left(f(0)\right)=f\left(f(1)\right)\Rightarrow$ $\Rightarrow [0]=[1]$, fals). Dacă $|f(0)-f(1)|\geq|0-1|$, atunci soluția este dată. În caz contrar, adică $|f(0)-f(1)|<|0-1|$,

$|f(0)-f(1)|<|0-1|=\left|f\left(f(0)\right)-f\left(f(1)\right)\right|\Rightarrow$

$\Rightarrow\left|f\left(f(0)\right)-f\left(f(1)\right)\right|>|f(0)-f(1)|$, deci $f(0)=a$ și $f(1)=b$.

Există funcție cu proprietatea dată, $f(x)=[x]$.

Cristinel Mortici, O.J., 2011

40***. Avem $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f([x])=[fx], \forall\, x\in\mathbb{R}$ de unde rezultă că $f(k)\in\mathbb{Z}$.

Avem $|\sin a-\sin b|=2\left|\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}\right|\leq 2\left|\sin\frac{a-b}{2}\right|\leq|a-b|$, $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$. Arătăm că există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $|f(a)-f(b)|\geq|a-b|$. Presupunem prin absurd că $|f(a)-f(b)|<|a-b|, \forall\, a,b\in\mathbb{R}, a\neq b$, de unde rezultă că $|f(k+1)-f(k)|<1, \forall\ k\in\mathbb{R}$, deci f este constantă pe $\mathbb{Z}$, fals. Prin urmare există $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $|f(a)-f(b)|\geq|a-b|\geq$ $\geq|\sin a-\sin b|$.

Concurs „Danubius", Cristian Moanța

41***. Fie $x=k+t, k\in\mathbb{Z}$ și $t=\{x\}\in[0,1)$.

Avem $f(x)=\frac{\sqrt{k}+\sqrt{t}}{\sqrt{k+t}}\Rightarrow f_{(x)}^2=\frac{k+t+2\sqrt{kt}}{k+t}=1+\frac{2\sqrt{kt}}{k+t}\leq 2\Rightarrow$

$\Rightarrow 0<f_{(x)}^2\leq 2\Rightarrow 0<f(x)\leq\sqrt{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x \in [1,2) \Rightarrow k = 1$ și $f^2_{(x)} = 1 + \dfrac{2\sqrt{t}}{t+1}$

și cum $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \dfrac{2\sqrt{t}}{t+1} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f^2_{(x)} = 2, \sup f(x) = \sqrt{2}.$

Concurs Serbia, 2005

42*.** Arătăm că dacă $n+1$ este pătrat perfect atunci are loc inegalitatea. Într-adevăr, fie $n+1 = m^2$, atunci:

$f(n) = \left[\dfrac{m^2-1}{m-1}\right] = m+1$ și $f(n+1) = \left[\dfrac{m^2}{m}\right] = m \Rightarrow f(n) > f(n+1).$

Fie $n = m^2 + r, 0 < r \leq 2m, < m^2 + r < (m+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m < \sqrt{m^2+r} < m+1 \Rightarrow \left[\sqrt{m^2+r}\right] = m.$ Avem:

$f(n) = \left[\dfrac{m^2+r}{m}\right] = m + \left[\dfrac{r}{m}\right]$ și $f(n+1) = \left[\dfrac{m^2+r+1}{m}\right] = m + \left[\dfrac{r+1}{m}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow f(n) \leq f(n+1)$ și prin urmare inegalitatea are loc dacă $n+1$ este pătrat perfect.

43*.** a) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim funcțiile

$f_n: [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \{nx\}(x - \{nx\}).$

Evident $\min f_n(x) = m = 0, (f_n(x) \geq 0)$. Aplicând inegalitatea mediilor

$(m_g \leq m_{aut}) \Rightarrow f_n(x) \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow M = \dfrac{1}{4}$ și se atinge pentru $\{nx\} = \dfrac{1}{2}.$

b) $f_n(x) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \{nx\} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_{n_1 1} = \dfrac{1}{2n}, x_{n_1 2} = \dfrac{3}{2n}, \cdots, x_{n_1 n} = \dfrac{2n-1}{2n}.$

c) Se aplică punctul b), rezultă $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2n}}{\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{2k-1}{2m}} = \dfrac{\dfrac{1}{2n} \cdot n^2}{\dfrac{1}{2m} \cdot m^2} = \dfrac{n}{m}.$

Concursul „Gh. Țițeica", 2005, G.M. nr. 9/2005

44*.** Utilizăm relația $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$; avem $\{\{a\} + b\} = \{\{a\} + [a] + b\} =$

$= \{a + b\}.$

Așadar avem: $(f_n \circ f_p)(x) = \left\{\left\{x + \dfrac{1}{p}\right\} + \dfrac{1}{n}\right\} = \left\{x + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{n}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x\} = f_m \circ f_n \circ f_p(x) = f_m(f_n \circ f_p)(x) = \left\{\left\{x + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{n}\right\} + \dfrac{1}{m}\right\} =$

$= \left\{n + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p}\right\}, \forall\, x \in \mathbb{R}$ și are loc dacă și numai dacă $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} \in \mathbb{Z}.$

Dar cum $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, fie $1 \leq m < n < p$ și $n \geq 2, p \geq 3 \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow 0<\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1+\frac{5}{6}$, deci $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1$.

Avem $\frac{1}{m}<\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}<\frac{3}{m}\Rightarrow 1<m<3\Rightarrow m=2$ și $\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$.

Procedând analog rezultă $\frac{1}{n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{p}<\frac{1}{2}\Rightarrow 2<n<4\Rightarrow n=3$.

În final $\frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\Rightarrow p=6$. Prin urmare avem tripletul $(m,n,p)=$ $=(2,3,6)$.

Mircea Rus, RMT, 2011

45***. Din b) rezultă că $\frac{qf(k)}{p}+\frac{qf(p-k)}{p}\in\mathbb{Z},\forall\, k=\overline{1,p-1}$ $(*)$,

dar cum $\frac{qf(k)}{p}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{qf(p-k)}{p}\notin\mathbb{Z}$ și $0<\left\{\frac{qf(k)}{p}\right\}+\left\{\frac{qf(p-k)}{p}\right\}<2$.

Deoarece $\left\{\frac{qf(k)}{p}\right\}+\left\{\frac{qf(p-k)}{p}\right\}=\frac{qf(k)+qf(p-k)}{p}-\left[\frac{qf(k)}{p}\right]-$ $-\left[\frac{qf(p-k)}{p}\right]$ și ținând seama de $(*)$ rezultă că membrul stâng este un număr întreg și: $\left\{\frac{qf(k)}{p}\right\}+\left\{\frac{qf(p-k)}{p}\right\}=1,\forall\, k=\overline{1,p-1}$.

Prin însumare membru cu membru rezultă că:

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left\{\frac{qf(k)}{p}\right\}=\frac{p-1}{2}\Rightarrow\sum_{k=1}^{p-1}\frac{qf(k)}{p}-\sum_{k=1}^{p-1}\left[\frac{qf(k)}{p}\right]=\frac{p-1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{p-1}\left[\frac{qf(k)}{p}\right]=\frac{q}{p}\sum_{k=1}^{p-1}f(k)-\frac{p-1}{2}.$$

Titu Andreescu, Dorin Andrica, Trident, 2006

46***. Fie $a_2=a_1\frac{m_1}{n},a_3=a_1\frac{m_2}{n},\cdots,a_n=a_1\frac{m_{n-1}}{n},m_k\in\mathbb{Z}^*,\forall\, k,n\in\mathbb{N}^*$.

Funcțiile sunt periodice cu $T=\frac{n}{a_1}\cdot m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_{n-1}$, deoarece $a_iT\in\mathbb{Z}$ și $\{a_i(x+T)+b_i\}=\{a_ix+b_i+a_iT\}=\{a_ix+b_i\}$.

Vasile Popa, RG nr. 21-22

47***. Considerăm cazurile $p=1,p=-1,p\neq\pm1$. Dacă

$p=1\Rightarrow f(x)=[x-1]+[-x-1]=[x]+[-x]-2=\begin{cases}-2, & \text{dacă } x\in\mathbb{Z}\\ -3, & \text{dacă } x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

Dacă $p=-1\Rightarrow f(x)=[-x-1]+[x+1]=[-x]+[x]=$

$= \begin{cases} 0, \text{dacă } x \in \mathbb{Z} \\ -1, \text{dacă } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

Dacă $p \neq \pm 1$ atunci $f(x) = \left[\frac{x}{p}\right] - 1 + \left[\frac{-x-1}{p}\right] =$

$= \left[\frac{-x-1}{p} + \left[\frac{x}{p}\right]\right] - 1 = \left[\frac{-x-1}{p} + \frac{x}{p} - \left\{\frac{x}{p}\right\}\right] - 1 =$

$$= \left[-\frac{1}{p} - \left\{\frac{x}{p}\right\}\right] - 1 = \begin{cases} -1, & \text{dacă} \quad 0 \leq -\frac{1}{p} - \left\{\frac{x}{p}\right\} < 1 \\ -2, & \text{dacă} -1 \leq -\frac{1}{p} - \left\{\frac{x}{p}\right\} < 0 \\ -3, & \text{dacă} -2 \leq -\frac{1}{p} - \left\{\frac{x}{p}\right\} < -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{Im} f = \{-3, -2, -1, 0\}$.

48***. Funcția f este periodică dacă există $T \neq 0$ astfel încât
$f(x) = f(x+T), \forall x \in \mathbb{R}, \{a(x+T) + \sin(x+T)\} = \{ax + \sin x\} \Rightarrow$
$\Rightarrow aT + \sin(x+T) - \sin x - m, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin(x+T) - \sin x = k - aT, \forall x \in \mathbb{R}$ (1) egalitate care are loc pentru o infinitate de valori ale lui x.

Avem $\sin(x+T) - \sin x = m - aT$
$\sin(x+2T) - \sin(x+T) = m - aT$
$\sin(x+3T) - \sin(x+2T) = m - aT$
.....

și deci $\sin(x+nT) - \sin x = n(m - aT)$ (2)
și cum membrul stâng este funcție mărginită, rezultă
$k - aT = 0 \Rightarrow a = \frac{m}{T}$ și utilizând (1) rezultă $\sin\frac{T}{2} = 0 \Rightarrow T = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}^*$
și prin urmare $a = \frac{m}{2k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*, m \in \mathbb{Z}$.

Concurs, Belarus, 2000

49***. Evident pentru $x \in (0,1,2,5)$, $f(x) = 0$, iar dacă $x \in [1,2,5k,12, 5(k+1)]$, atunci $f(x) = -k$, deci $\text{Im} f = \mathbb{Z} - \mathbb{N}^*$.

Avem: $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 12,5 \\ -k, & x \in [1,2,5k,\ 12,5(k+1)) \end{cases}$.

New York, 1975

50**. Evident că orice $n \in \mathbb{Z}$ satisface cerința, pentru că $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Putem presupune $x \in (0,1)$, deoarece:
$f(n) = \{2^n \cdot x\} = \{2^n \cdot [x] + 2^n \cdot \{x\}\} = \{2^n \cdot \{x\}\}$.
Vom considera scrierea liniară a numărului

Scanned with OKEN Scanner

$x = 0, x_1x_2x_3x_4 \cdots = \sum_{k\geq 1} \frac{x_k}{2^k}$, unde $x_k \in \{0,1\}, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$. Să observăm că:

$$f(n) = \left\{2^n \cdot \sum_{k\geq 1} \frac{x_k}{2^k}\right\} = \left\{x_1 \cdot 2^{n-1} + \cdots + x_n + \sum_{k\geq n+1} \frac{x_k}{2^k}\right\} =$$

$$= \sum_{k\geq n+1} \frac{x_k}{2^k} = 0, x_{n+1}x_{n+2}\cdots.$$

Dacă f este crescătoare, avem analog $x_{n+1} \geq x_{n+2}$, adică $x_n = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, sau există $m \in \mathbb{N}^*$ cu $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 1$ și $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = 0$.

Cazul $x = 0,(1) = 1$ nu convine.

Obținem $x = \underbrace{0,11\cdots 11}_{m \text{ cifre}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m} = 1 - \frac{1}{2^m}$, unde $m \in \mathbb{N}^*$.

În concluzie $x = a - \frac{1}{2^m}$, cu $a \in \mathbb{Z}$ și $m \in \mathbb{N}$.

Marius Ghergu, G.M. nr. 8/2006

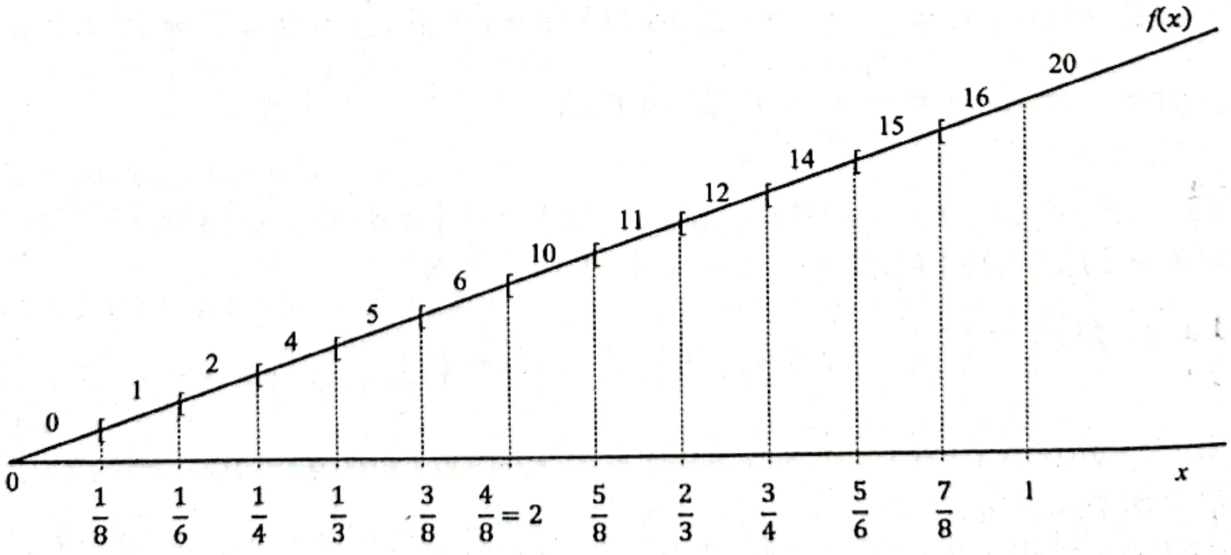
51***. Evident funcția f este crescătoare cu $f(0) = 0$ și $f(50) = 1000$ și vom considera $x \in (0,50]$.

Avem $f(x+1) = f(x) + 20$ sau $f(x+n) = f(x) + 20n, n \in \mathbb{N}^*$ și este suficient să găsim mulțimea valorilor funcției pe intervalul $(0,1]$.

Vom considera diviziunile intervalului $(0,1]$

pentru $[2x]$; $\frac{1}{2}, 1$, pentru $[4x]$; $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1$, pentru $[6x]$; $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1$,

pentru $[8x]$; $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1$, utilizăm metoda intervalelor luând intervalele de forma $[a,b)$.



Scanned with OKEN Scanner

Adică dacă $\frac{7}{8} \leq x < 1 \Rightarrow [2x] = 1, [4x] = 3, [6x] = 5, [8x] = 7$ și pentru $x = 1, f(1) = 20$. Prin urmare avem mulțimea valorilor lui $f(x)$ pe intervalul $(0,1]$.

Pentru $x \in (0,50]$, funcția are valorile $f(x) = 20n + k$ unde $k \in \{1, 2, 4, 5, 6, 10, 12, 14, 16, 20\}$ și $n \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 49\}$.

Așadar $f(x)$ are $12 \cdot 50 = 600$ valori.

AIME, 1985

52***. Cum funcția f este crescătoare, observăm că $f(x) = x^4, \forall\, x \in \mathbb{N}^*$, deci $f(6) = 1296$ și $f(7) = 2401$.

a) Dacă ecuația ar avea soluție, rezultă că $x \in (6,7)$ și din

$x < 7 \Rightarrow [x] \leq 6 \Rightarrow x[x] < 42 \Rightarrow x[x] \leq 41 \Rightarrow x[x[x]] < 741 = 287.$

$x[x[x]] \leq 286 \Rightarrow x\left[x[x[x]]\right] < 286 \cdot 7 = 2002;$

b) Soluția dacă există se află în intervalul $(6,7)$.

Din $x[x[x]] \leq 286 \Rightarrow \left[x[x[x]]\right] < 286$ $(*)$.

Vom arăta că ultima inegalitate este chiar egalitate. Într-adevăr, dacă $(*)$ este inegalitate strictă, atunci există $x_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât:

$\left[x_0[x_0[x_0]]\right] \leq 285 \Rightarrow f(x_0) < 7 \cdot 285 = 1995 < 2001.$

Prin urmare ecuația $f(x) = 2001 \Rightarrow x \cdot 286 = 2001 \Rightarrow x = \frac{2001}{286}$.

S.U.A. Talent 2001-2002

53*. Utilizând problema precedentă rezultă $x \in (0,7)$.

Ecaterinbury/2006-2007

54***. Considerând $n \in \{3k-1, 3k, 3k+1\}, k \in \mathbb{N}^*$ și utilizând relația dată, rezultă:

a) $f(3k-1) = 2f(2k-1)$;

b) $f(3k) = 2f(2k) + f(2k-1)$; (1)

c) $f(3k+1) = 2f(2k)$.

Putem calcula valorile particulare și se obține:

$f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 4, f(5) = 6, f(6) = 7, f(7) = 8,$

$f(8) = 12, f(9) = 13, f(10) = 14, f(11) = 16, f(12) = 20,$

dar nicio situație nu verifică inegalitatea cerută.

Din (1) rezultă

a') $f(3k) - f(3k-1) = f(2k) - f(2k-1)$,

b') $f(3k+1) - f(3k) = f(2k) - f(2k-1)$,

c') $f(3k+2) - f(3k+1) = f(2k+1) - f(2k)$.

Încercăm să găsim un șir de numere naturale $n_0 > n_1 > n_2 \cdots > n_m$ pentru care au loc egalitățile: $f(n_0) - f(n_0 - 1) = 2\big(f(n_1) - f(n_1 - 1)\big) =$

$= 2^2\big(f(n_2) - f(n_2 - 1)\big) = \cdots = 2^m\big(f(n_m) - f(n_m - 1)\big),$

Scanned with OKEN Scanner

cu $n_0 = 3k+2, n_1 = 2k+1$ și pentru care este necesar ca $2k+1 \equiv$
$\equiv 2 (\text{mod } 3)$.
Putem considera $n_0 = 3^m - 1$ atunci $n_m = 2^m - 1$ și obținem:
$f(3^m-1) - f(3^m-2) = 2^m\big(f(2^m-1) - f(2^m-2)\big)$ (2).
Din relația (2) obținem pentru:

$m = 2 \Rightarrow f(8) - f(7) = 2^2\big(f(3) - f(2)\big) = 4 < 8;$
$m = 3 \Rightarrow f(26) - f(25) = 2^3\big(f(7) - f(6)\big) = 8 < 26;$
$m = 4 \Rightarrow f(80) - f(79) = 2^4\big(f(15) - f(14)\big) = 16 < 80;$
$m = 5 \Rightarrow f(242) - f(241) = 2^2\big(f(31) - f(30)\big) = 256 > 242;$

Din b') $\Rightarrow f(31) - f(30) = f(20) - f(19) = 2\big(f(13) - f(12)\big) = 24 = 8.$
Prin urmare, $t = 242$.

Anglia, 2012

55*.** Putem scrie $f(n) = n(r_1 + r_2 + \cdots + r_m) - \sum_{k=1}^{m} [r_k n] = \sum_{k=1}^{n} \{r_k n\}$, unde

$r_k = \frac{a_k}{b_k}, a_k, b_k \in \mathbb{N}^*$, cu $a_k < b_k$.

Prin urmare avem $f(n) = \sum_{k=1}^{m} \left\{\frac{a_k}{b_k} n\right\}$ (1) și din scrierea lui f rezultă că
$f(n)$ este număr natural $0 \le f(n) \le m-1$ și $f_{min} = 0, f_{max} = m-1 \Leftrightarrow$
$f(n_{min}) = 0$ și $f(n_{max}) = m-1$. Rezultă:
$f_{min} = 0$, dacă $\left\{\frac{a_k}{b_k} n\right\} = 0, k = 1,2,\cdots,m$ și $n_{min} = b_1 b_2 \cdots b_m$.
Căutăm n_{max}.
Avem: $m - 1 = \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{a_k}{b_k}\right) = \sum_{k=1}^{m} \left\{1 - \frac{a_k}{b_k}\right\} = \sum_{k=1}^{m} \left\{-\frac{a_k}{b_k}\right\}$,
dar, cum $f(n) = \sum_{k=1}^{m} \left\{\frac{a_k}{b_k} n\right\} \Rightarrow \left\{\frac{a_k}{b_k} n\right\} = \left\{-\frac{a_k}{b_k}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left\{\frac{a_k}{b_k} n + \frac{a_k}{b_k}\right\} = 0 \Rightarrow \left\{\frac{a_k}{b_k}(n+1)\right\} = 0$ și $n_{max} = b_1, b_2, \cdots, b_m - 1$.

Canada, 1996

56*.** „ $\Leftarrow$ " $f(x+a) = \left[\frac{x+a}{a}\right] g(x) + f\left(a\left\{\frac{x+a}{a}\right\}\right) =$
$= \left(1 + \left[\frac{x}{a}\right]\right) g(x) + f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right) = g(x) + f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$
„ $\Rightarrow$ " Fie $m = \left[\frac{x}{a}\right] \in \mathbb{Z}$ și $t = \left\{\frac{x}{a}\right\} \in [0,1) \Rightarrow \frac{x}{a} = m + t \Rightarrow x = am + at.$

Scanned with OKEN Scanner

Se disting cazurile:

1) Pentru $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(ma + at) = f\big((m-1)a + at + a\big) =$

$= f\big((m-1)a + at\big) + g\big((m-1)a + at\big) =$

$= f\big((m-1)a + at\big) + g(ma + at) =$

$= f\big((m-1)a + at\big) + g(x) = f\big((m-2)a + at\big) + g\big((m-2)a + at\big) =$

$= f\big((m-2)a + at\big) + g\big((m-2)a + at\big) + g(x) =$

$= f\big((m-2)a + at\big) + g\big((m-1)a + at\big) + g(x) =$

$= f\big((-2)a + at\big) + 2g(x) = \cdots = f(at) + mg(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \left[\frac{x}{a}\right] g(x) + f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right), \forall x \in \mathbb{R}.$

2) $m \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$, atunci $m = -p, p \in \mathbb{N}^*$ și conform enunțului $f(x) = f(x + a) - g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Avem

$f(x) = f(-pa + at) = f\big((-p+1)a + at\big) - g(x) =$

$= f\big((-p+2)a + at\big) - 2g(x) = \cdots = f(at) - pg(x) =$

$= f(at) + mg(x) = \left[\frac{x}{a}\right] g(x) + f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}.$

3) $m = 0 \Rightarrow x = at = a\left\{\frac{x}{a}\right\}$ și

$f(x) = f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right) + 0 \cdot g(x) = \left[\frac{x}{a}\right] g(x) + f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right).$

57***. a) Evident $\left\{x + \frac{1}{x}\right\} = x$, rezultă $x \in (0,1)$ și ecuația devine:

$\left\{x + \frac{1}{x}\right\} = \{x\} \Rightarrow \left\{x + \frac{1}{x} - x\right\} = 0 \Rightarrow \left\{\frac{1}{x}\right\} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*.$

b) Avem $f\left(\frac{k}{k+1}\right) = \left\{\frac{k}{k+1} + \frac{k+1}{k}\right\} = \left\{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right\} = \left\{\frac{1}{k(k+1)}\right\} =$

$= \frac{1}{k(k+1)}, k \in \mathbb{N}^*$ și $f\left(f\left(\frac{k}{k+1}\right)\right) = f\left(\frac{1}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{k(k+1)}$

și evident $\frac{k}{k+1} \neq \frac{1}{k(k+1)}, \forall\, k \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$

c) Fie $q = \frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}}$, unde $(F_n)_{n\geq}$ este șirul lui Fibonacci. Atunci:

$f\left(\frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}}\right) = \left\{\frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}}\right\} = \left\{-\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} + \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}\right\} =$

$= \left\{\frac{F_{2n}^2}{F_{2n-1}F_{2n+1}}\right\} = \left\{\frac{F_{2n}^2}{F_{2n}^2 + 1}\right\} = \frac{F_{2n}^2}{F_{2n}^2 + 1} = \frac{k}{k+1},$

unde s-au utilizat relațiile cunoscute:

Scanned with OKEN Scanner

$F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n-1}$ și $F_{2n-1}F_{2n+1} - F_{2n}^2 = (-1)^{2n} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow F_{2n-1}F_{2n+1} = F_{2n}^2 + 1.$
Utilizând punctul b) rezultă că din:

$$f(q) = \frac{k}{k+1} \Rightarrow (f(q)) = f\left(\frac{k}{k+1}\right) \Rightarrow f\Big(f(f(q))\Big) =$$
$$= f\left(f\left(\frac{k}{k+1}\right)\right) = f\left(\frac{k}{k+1}\right) = f(f(q)).$$

COMC, 2010

58*.** Trebuie arătat că există $T \neq 0$ astfel încât $f(x+T) = f(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$ sau arătăm că $f(x+b+T) \equiv f(x+b), \forall\, x \in \mathbb{R}$, unde $b \in \mathbb{R}$. Să calculăm:
$f(x+a+b) - f(x+b) = c[2\{x+a\} - \{x\}] + d - c[b]$, (1),
de unde deducem că $f(x+a+b) - f(x+b) =$
$= f(x+n+a+b) - f(x+n+b), \forall\, x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{Z}$ (2).
Vom considera cazurile I. $a \in \mathbb{Z}$, II. $a \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.
În cazul $a \in \mathbb{Z}$, din (1) rezultă $c[2\{x+a\} - \{x\}] + d - c[b] =$
$= c[2\{x\} - \{x\}] + d - c[b] = c[\{x\}] + d - c[b] = d - c[b]$ (3),
adică $f(x+a+b) - f(x+b) = d - c[b], \forall\, x \in \mathbb{R}$ (3′).
Din (2) și (3′) rezultă: $f(a+b) - f(b) = f(2a+b) - f(a+b) = \cdots =$
$= f\big((n+1)a+b\big) - f(na+b) = d - c[b], n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow f\big((n+1)a+b\big) - f(b) = n(d - c[b]), \forall\, n \in \mathbb{Z},$
dar cum f este mărginită rezultă $d - c[b] = 0$ și din (3′)
$f(x+a+b) = f(x+b)$ rezultă că f este periodică, cu perioada $T = a$.
II. Fie $a \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $ka \in \mathbb{Z}$ și utilizând (2) rezultă că pentru orice $x \in \mathbb{R}$,
$f(x+a+b) - f(x+b) = f(x+ka+a+b) - f(x+ka+b) =$
$= f(x+2ka+a+b) - f(x+2ka+b) = \cdots =$
$= f(x+nka+a+b) - f(x+nka+b)$, unde $n \in \mathbb{Z}$ (4).
Utilizând (4) avem:
$S_1(x) = f(x+ka+a+b) - f(x+ka+b) + f(x+ka+b) -$
$-f(x+ka-a+b) + f(x+ka-a+b) - f(x+ka-2a+b) + \cdots +$
$+f(x+2a+b) - f(x+a+b) = f(x+ka+a+b) - f(x+a+b)$
și $S_2(x) = f(x+2ka+a+b) - f(x+2ka+b) + f(x+2ka+b) -$
$-f(x+2ka-a+b) + f(x+2ka-a+b) - f(x+2ka-2a+b) + \cdots +$
$+f(x+ka+2a+b) - f(x+ka+a+b) =$
$= f(x+2ka+a+b) - f(x+ka+a+b).$
Comparând dezvoltările $S_1(x)$ și $S_2(x)$ rezultă că $S_1(x) = S_2(x) = \cdots =$
$= S_n(x) \equiv S(x)$. Atunci se obține:

$$f(x+ka+a+b) - f(x+a+b) = S(x)$$
$$f(x+2ka+a+b) - f(x+a+b) = 2S(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

.....

$$f(x+nka+a+b)-f(x+a+b)=nS(x),$$

dar cum funcția f este mărginită, rezultă că $S(x)=0$ și atunci:
$f(x+ka+a+b)=f(x+a+b)$ și deci f este periodică cu $T=ka$.

Taiwan, 1997

59***. Se observă că f are valorile în intervalul $[0,1)$, de exemplu:
$f(1,1,1)=\frac{1}{3}, f(1,2,2)=\frac{1}{2}, f(3,3,3)=0, f(1,2,3)=\frac{6}{11}$ etc.

Notăm $F(x,y,z)=\frac{xyz}{xy+yz+zx}=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$, de unde rezultă:

$F(kx,ky,kz)=kF(x,y,z)$.

Vom utiliza rezultatul: dacă $(a,m)=1$, atunci valorile expresiilor $ak+b(\text{mod}\, n)$ sunt $\{0,1,2,\cdots,m-1\}$. Într-adevăr $ak+b\equiv c_i(\text{mod}\, m)$ și $n+1\leq k<n+m$ $(c_i)_{1\leq i\leq m}=\{0,1,2,\cdots,m-2,m-1\}$. În cazul dat, cum $(a,m)=1$ și $k\in M=\{0,1,2,\cdots,m-1\}$, atunci $ak(\text{mod}\, m)\in M$. Fie $\{F(x,y,z)\}=\frac{p}{q}$, unde $p,q\in\mathbb{N}^*, 0<p<q$. Dacă $k\in\{0,1,2,\cdots,q-1\}$

atunci $\{F(kx,ky,kz)\}=\{kF(x,y,z)\}=\left\{\frac{kp}{q}\right\}\in\left\{\frac{0}{q},\frac{1}{q},\frac{2}{q},\cdots,\frac{q-1}{q}\right\}$.

Deducem că dacă $f(x,y,z)$ este o fracție ireductială cu numitorul q, atunci toate fracțiile ireducționabile cu numitorul q (subunitare) sunt în mulțimea valorilor funcției $f(x,y,z)$. De asemenea, orice număr rațional din intervalul $[0,1)$ este o valoare a funcției $f(x,y,z)$. Așadar, $\text{Im}f(x,y,z)=\mathbb{Q}\cap[0,1)$.

Sankt-Petersburg, 1999, Hrabnov

§ 3. Determinări de funcții

60*. Pentru $x\in[0,1)\Rightarrow\{x\}=x\Rightarrow|f(x)|\leq|xf(x)|=|x||f(x)|\Rightarrow$
$\Rightarrow|f(x)|(1-|x|)\leq 0, \forall x\in[0,1)\Rightarrow f(x)=0$ și $f(\{x\})=0\Rightarrow|f(x)|\leq$
$\leq 0\Rightarrow f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$. Prin urmare $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, O.L. București, 1997

61*. Din $0\leq\left\{\frac{x}{a}\right\}<1\Rightarrow 0\leq a\left\{\frac{x}{a}\right\}<a, \forall x\in\mathbb{R}$.

Dacă $x\in[0,a)\Rightarrow 0\leq\frac{x}{a}<1$ și $\left\{\frac{x}{a}\right\}=\frac{x}{a}\Rightarrow g(x)=f\left(a\frac{x}{a}\right)=f(x)$.

Avem $g(x+a)=f\left(a\left\{\frac{x+a}{a}\right\}\right)=f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right)=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$

și prin urmare $T=a$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu

Scanned with OKEN Scanner

62*. Evident $f(0)=0$ și pentru $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(x)+f(x)+f(0)=x^2\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2},\forall x\in\mathbb{Z}$. Pentru $x\in(0,1)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2$.
Atunci din relația dată, rezultă: $f(x)+\frac{1}{2}[x]^2+\frac{1}{2}\{x\}^2=x^2\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)=\left(\frac{[x]+\{x\}}{2}\right)^2+[x]\cdot\{x\}=\frac{1}{2}x^2+[x]\cdot\{x\}$.

C. Scutaru, G.M. nr. 3/1988

63*. Pentru $x=0\Rightarrow f(0)=0$. Înlocuind x cu $[x]$ rezultă $f([x])=[x]^2$ și analog se obține $f(\{x\})=(\{x\})^2$. Înlocuind în relația dată, rezultă:
$f(x)+2[x]^2+2\{x\}^2=3x^2,(\forall)\,x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=x^2+4[x]\{x\}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Concursul „Grigore Moisil", 2003

64*. $f(x)=2x-[2x]-(x-[x])-\left(x+\frac{1}{2}-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right)=$
$=-[2x]+[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

65*. Pentru $x=0\Rightarrow f(0)=0$ și pentru $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(x)=x$, dar și pentru $x\in[0,1)\Rightarrow f(x)=x$. Prin urmare:
$f([x])=[x],f(\{x\})=\{x\}\Rightarrow f(x)+[x]+\{x\}=2x\Rightarrow f(x)=x,\forall\,x\in\mathbb{R}$.

66*. Pentru $x=0\Rightarrow f(0)+f_{(0)}^2=0\Rightarrow f(0)\in\{-1,0\}$.
Dacă $f(0)=0$ și înlocuind pe x cu $[x]$ și apoi cu $\{x\}$ rezultă:
$f([x])=[x]$ și $f(\{x\})=\{x\}\Rightarrow f(x)=x=x-[x]\{x\}$ și $g(x)=x$.

67*. a) Evident $x\in[0,\infty)$. Avem $\sqrt{x}-1<\left[\sqrt{x}\right]\le\sqrt{x}\Rightarrow\left[\sqrt{x}\right]^2\le x$ cu egalitate pentru $x=k^2,k\in\mathbb{Z},\left(f(k^2)=\left[\sqrt{k^2}\right]^2=k^2\right)$.
Prin urmare, toate pătratele perfecte sunt funcții fixe.
b) Evident ecuația are soluție dacă $m\in\{3k^2,2k^2+(k+1)^2,\forall\,k\in\mathbb{Z}^*\}$.

68**. Fie $x=k\in\mathbb{Z}^*$ atunci avem $kf(k)=kf(0)\Rightarrow k(k)=f(0)$,
$(\forall)\,k\in\mathbb{Z}^*\Rightarrow f(k)=f(0),(\forall)\,k\in(\forall)\,k\in\mathbb{Z}$. Fie $x=t\in(0,1)$, atunci
$tf(t)=tf(0)\Rightarrow f(t)=f(0)$. Fie $x\in\mathbb{R}^*\Rightarrow x=[x]+\{x\}=k+t$, atunci
$xf(x)=kf(t)+tf(k)=f(0)(k+t)=xf(0)\Rightarrow f(x)=f(0)$.
Așadar, $f(x)=f(0),(\forall)\,x\in\mathbb{R}$ și evident funcțiile constante verifică relația.

69**. Notăm $f(0)=a$.
Pentru $x=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(k)+a=2f(k)-k^2\Rightarrow f(k)=k^2+a$.
Pentru $x\in[0,1)\Rightarrow a+f(1)=2f(x)-x^2\Rightarrow f(1)=x^2+a,\forall\,x\in[0,1)$.
Relația dată devine $[x]^2+a+\{x\}^2+a=2f(x)-x^2$
$2f(x)=x^2+[x]^2+\{x\}^2+2a,2f(x)=2[x]^2+2\{x\}^2+2[x]\{x\}+2a\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)=[x]^2+\{x\}^2+[x]\{x\}+a$ care verifică relația dată.

Scanned with OKEN Scanner

70**. Evident pentru $k = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Cu substituțiile $x \to [x]$ și $x \to \{x\}$ se obține: $2f([x]) = a[x]^2 \Rightarrow f([x]) = \frac{a[x]^2}{2}$, respectiv $2f(\{x\}) = a\{x\}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\{x\}) = \frac{a\{x\}^2}{2}$. Înlocuind în relația dată rezultă:
$f(x) + \frac{a[x]^2}{2} + \frac{a\{x\}^2}{2} = ax^2 \Rightarrow f(x) = \frac{a}{2}(2x^2 - [x]^2 - \{x\}^2) =$
$= \frac{a}{2}(x^2 + 2[x]\{x\})$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu

71**. Pentru $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.
Pentru $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = \frac{ax}{2}$, pentru $x \in [0,1) \Rightarrow$
$2f(x) + f(0) = ax \Rightarrow f(x) = \frac{ax}{2}$. Deoarece $[x] \in \mathbb{Z}$ și $\{x\} \in [0,1)$, atunci
$f(x) + \frac{a}{2}[x] + \frac{a\{x\}}{2} = ax \Rightarrow f(x) + \frac{ax}{2} = ax \Rightarrow f(x) = \frac{ax}{2}$.

O.L. Iași, 2011

72**. Avem $n \le \sqrt{n + f_{(n)}^2} < n + 1 \Rightarrow \sqrt{n^2 - n} \le f(n) < \sqrt{n^2 + n + 1}$
și cum $n - 1 < \sqrt{n^2 - n} < n < \sqrt{n^2 + n + 1} < n + 1 \Rightarrow f(n) = n$.

Dan Comănescu, Concursul „Traian Lalescu", 2003

73**. Evident $f(0) = 0$. Pentru $x > 0 \Rightarrow 3f(x) + f([x]) = 3x$ și cu substituția $x \to [x] \Rightarrow 4f([x]) = 3[x] \Rightarrow f([x]) = \frac{3[x]}{4}$.
Egalitatea devine $3f(x) + \frac{3[x]}{4} = 3x \Rightarrow f(x) = x - \frac{[x]}{4}, \forall x \ge 0$ (1).
Cu substituția $x \to [x] \Rightarrow 2f([x]) + f([x]) + f([x]) = 3[x] \Rightarrow$
$\Rightarrow 3f([x]) + \frac{3|[x]|}{4} = 3[x] \Rightarrow f([x]) = [x] - \frac{|[x]|}{4}$, pentru $x > 0 \Rightarrow$ (1),
iar pentru $x < 0 \Rightarrow f([x]) = [x] - \frac{[x]}{4}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, R.M.C.S., 2010

74**. a) Utilizăm relația $\{m + x\} = \{x\}, \forall \in m \in \mathbb{Z}$ și $\forall x \in \mathbb{R}$.
Avem $\{x + y\} = \{[x] + [y] + \{x\} + \{y\}\} = \{\{x\} + \{y\}\}$.
b) $f(x,y) = [x + y] - [x] - [y] = x + y - \{x + y\} - [x] - [y] =$
$= \{x\} + \{y\} - \{x + y\} = \{x\} + \{y\} - \{\{x\} + \{y\}\} = [\{x\} + \{y\}] \in \{0,1\}$.
$g(x,y) = \{x + y\} - \{x\} - \{y\} = \{\{x\} + \{y\}\} - (\{x\} + \{y\}) =$
$= -[\{x\} + \{y\}] \in \{0,-1\} \Rightarrow g(x,y) \in \{0,-1\}$.
Se observă că $f(x,y) + g(x,y) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

75**. Pentru $x=0 \Rightarrow f_{(0)}^2+f(0)=0 \Rightarrow f(0) \in \{0,-1\}$.

Dacă $f(0)=-1$, atunci pentru $x=\frac{1}{3} \Rightarrow f(0)f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}-f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{3}=0$, absurd, deci $f(0)=0$.

Pentru $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x)f(0)=x-f(x) \Rightarrow f(x)=x, \forall\, x \in \mathbb{Z}$.

Cu substituția $x \to \{x\}$ rezultă $f(0)f\{x\}=\{x\}-f(\{x\}) \Rightarrow f(\{x\})=\{x\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

și cu substituția $x \to [x]$ rezultă $f([x])=[x], \forall\, x \in \mathbb{R}$. Din relația dată, rezultă $f(x)=x-f([x])f(\{x\})=x-[x]\{x\}=x-x[x]+[x]^2$.

$f(x)=[x]+\{x\}-[x]\{x\}$, adică $f(x)=x-[x]\{x\}$.

76. Pentru $x=0 \Rightarrow f(0)=-bf_{(0)}^2 \Rightarrow f(0) \in \left\{0,-\frac{1}{b}\right\}$.

Dacă $f(0)=-\frac{1}{b}$, atunci pentru $x=c \in (0,1) \Rightarrow f(c)=ac-bf(0)f(c)=$

$=ac+f(c) \Rightarrow ac=0$, absurd și prin urmare $f(0)=0$.

Pentru $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x)=ax$ și deci egalitatea dată devine

$f(x)=ax-ba[x]f(0) \Rightarrow f(x)=ax \Rightarrow f([x])=a[x], \forall\, x \in \mathbb{R}$

și analog rezultă $f(\{x\})=a\{x\}, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Prin urmare $f(x)=ax-ba^2[x]\{x\}=a[x]+a\{x\}-a^2b[x]\{x\}$.

77. a) $x=0 \Rightarrow f(0)+f_{(0)}^2=0 \Rightarrow f(0) \in \{0,-1\}$. Dacă $f(0)=-1$, atunci pentru orice $x \in (0,1)$ rezultă $f(x)-f(x)=x$, absurd.

Prin urmare $f(0)=0$. Cu substituția $x \to [x]$ și $x \to \{x\}$ rezultă:

$f([x])=[x]$ și $f(\{x\})=\{x\} \Rightarrow f(x)=x-[x]\{x\}, \forall\, x \in \mathbb{R}$, deci $g(x)=x$.

b) Ecuația devine $[\ln x]+\left[\ln x+\frac{1}{2}\right]=3$.

Cu notația $y=\ln x \Rightarrow [y]+\left[y+\frac{1}{2}\right]=3$ și în baza identității lui Hermite rezultă $[2y]=3 \Rightarrow y \in \left[\frac{2}{3},2\right) \Rightarrow x \in \left[e\sqrt{e},e^2\right)$.

Concursul „Grigore Moisil", 1999

78**. Pentru $x=0 \Rightarrow f(0)=0$. Făcând substituția $x \to [x] \Rightarrow$

$\Rightarrow f([x])+2f([x])+2f(0)=3[x]^2 \Rightarrow f([x])=[x]^2$ și apoi făcând și substituția $x \to \{x\} \Rightarrow f(\{x\})+2f(0)+2f(\{x\})=3\{x\}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\{x\})=\{x\}^2$.

Relația din enunț devine: $f(x)+2[x]^2+2\{x\}^2=3x^2$.

$f(x)+2(([x]+\{x\})^2-2[x]\{x\})=3x^2 \Rightarrow f(x)=x^2+4\{x\}[x]$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Concursul „Grigore Moisil", 2003

79**. Funcția f fiind strict crescătoare rezultă $f(k) \geq k, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$. Dacă ar exista $n \in \mathbb{N}^*$ cu $f(2n)>2n$, $f(2n) \geq 2n+1 \Rightarrow \left[\sqrt{n^2+f(2n)}\right] \geq n+1 \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$S_n = \left[\sqrt{n^2+f(1)}\right] + \left[\sqrt{n^2+f(2)}\right] + \cdots + \left[\sqrt{n^2+f(2n)}\right] \geq$
$\geq n(2n-1) + n + 1 = 2n^2 + 1$, fals, deci $f(2n) = 2n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ și din strict monotonia funcției f rezultă $f(k) = k, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

Florian Gache, Concursul „N. Mihăileanu", 2012

80**. Fie f o funcție care verifică relația din enunț.
Pentru $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Pentru $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2f(x) + f(0) = 2x \Rightarrow f(x) = x$.
Fie $x \in [0,1)$, atunci $f(x) + f(0) + f(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x$.
Prin urmare oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, avem:
$f(x) + f([x]) + f(\{x\}) = f(x) + [x] + \{x\} = f(x) + x = 2x \Rightarrow f(x) = x$.
Evident funcția găsită verifică relația dată.

Dorel Miheț, R.M.T. nr. 1/2001

81**. Pentru $x = k \in \mathbb{Z}$ avem $f(k) + f(k)f(0) = k \Leftrightarrow f(k)\big(1 + f(0)\big) = k$.
Pentru $k = 0 \Rightarrow f(0) \in \{0, -1\}$, dar, cum $1 + f(0) \neq 0 \Rightarrow f(0) = 0$, deci $f(k) = k$.
Pentru $x \in [0,1) = f(x) + f(0)f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$.
Pentru $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = k + t$, avem $f(x) + f([x])f(\{x\}) = x \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = x - kt = x = [x]\{x\}$.
Extindere Fie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $g(0) = 0$ funcția care satisface relația $f(x) + \alpha f([x])f(\{x\}) = g(x), \forall\, x \in \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = g(x) - \alpha[x]\{x\}$ și $\alpha > 0$.

V. Preda, P. Hamburg, G.M nr. 4/1982

82**. Cu substituțiile $x \to [x]$ și $x \to \{x\}$ se obține:
$f([x]) = \dfrac{c[x]}{a+b}$, respectiv $f(\{x\}) = \dfrac{c\{x\}}{a+b}$.
Avem $f(x) = \left(cx - \dfrac{bc[x]}{a+b} - \dfrac{bc\{x\}}{a+b}\right)\dfrac{1}{a} =$
$= \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{cx}{a+b} - \dfrac{bcx}{a+b}\right) = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{cx(a+b) - bcx}{a+b}\right) = \dfrac{cx}{a+b}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, G.M. nr. 5-6/2003

83**. Pentru $x = 0 \Rightarrow f(0) + \sqrt{2}|f(0)| = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ și pentru $x \in [0,1) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) + |f(x)| = x$. Arătăm că $f(x) \geq 0$. Presupunând că există $x_0 \in (0,1)$ astfel încât $f(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 = 0$, absurd.
Prin urmare, $f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{2}, \forall\, x \in (0,1)$ (1).
Pentru $x \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x) + |f(x)| = x, \forall\, x \in \mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

Analog, ca mai sus, rezultă $f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2}, \forall\, x \in \mathbb{N}$ (2). Avem:

$f(x) = x - \frac{1}{2}\sqrt{[x]^2 + \{x\}^2}, \forall\, x \in \mathbb{R}.$

84. Avem $f([f(0)]) = a \Rightarrow f(1) = a.$

Cu substituția $n \to [f(n)]$ rezultă $f([f[f(n)]]) = [f(n)] + a.$ Aplicând partea întreagă egalității din enunț, rezultă:

$[f[f(n)]] = n + 2 \Rightarrow f([f[f(n)]]) = f(n+2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(n+2) = [f(n)] + a \Rightarrow [f(n+2)] = [f(n)] + 2$ (1).

Notând cu $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, g(n) = [f(n)] - n$, atunci din (1) rezultă:

$g(n+2) = g(n), \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow g(2n) = g(0) = [f(0)] = 1$

și $g(2n+2) = g(1) = [f(1)] - 1 = [a] - 1 = 2 - 1 = 1,$

$g(2n+1) = g(1) = [f(1)] - 1 = [a] - 1 = 2 - 1 = 1,$

$[f(n)] = n + 1 \Rightarrow f([f[f(n)]]) = f(n+1) = n + a \Rightarrow$

$\Rightarrow f(n) = n - 1 + a,$ cu $a \in [2,3)$ și $f(0) \in [1,2).$

Dan Seclăman

85**. <u>Soluția 1</u>

Rezultă $f(x) = f(x-1) + x - 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$ (1) și cum $f(x) = x^2, \forall\, x \in [0,1)$ rezultă $f(x) = (x-1)^2 + (x-1) = x^2 - x, \forall\, x \in [1,2)$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $f(x) = f(x-1) + (x-1) = (x-1)^2 + (x-1) -$ $-(x-1) = x^2 - 2x + 1, \forall\, x \in [2,3)$ ș. a. m. d. Prin inducție după n rezultă

$f(x) = x^2 - nx + \frac{n(n-1)}{2}, \forall\, n \in [n, n+1), \forall\, n \in \mathbb{N}$ (3),

pentru $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ se obține o relație analoagă cu (3).

Așadar $f(x) = x^2 - [x] + \frac{[x]([x]-1)}{2}, \forall\, x \in \mathbb{R}.$

<u>Soluția 2</u>

Din $f(x) = f(x-1) + (x-1), \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x-k) = f(x-k-1) +$

$+x - k - 1, \forall\, x \in \mathbb{R}.$ Atunci $\sum_{k=0}^{n} \big(f(x-k) - f(x-k-1)\big) =$

$= (n-1)x - \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow f(x) - f(x-n) = nx - \frac{n(n+1)}{2}.$

Fixăm $x \in \mathbb{R}$ și fie $n = [x]$ și deoarece $x - n \in [0,1)$, avem $f(x-n) =$

$= (x-n)^2$ și din relația de mai sus rezultă $f(x) = x^2 - nx + \frac{n(n-1)}{2}.$

Analog pentru $x < 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - [x]x + \frac{[x]([x]-1)}{2}.$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția 3

Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-\frac{x^2-x+1}{2}$.

Funcția g este periodică, întrucât $g(x+1)=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$, deci $g(x+n)=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$ și $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Fie $x=[x]+\{x\}=k+t\Rightarrow g(x)=g(k+t)=g(t)$, dar cum $t\in[0,1)\Rightarrow f(t)=t^2$. Prin urmare,

$$f(x)=g(x)+\frac{x^2-x+1}{2}=g(\{x\})+\frac{x^2-x+1}{2}=$$

$$=f(\{x\})-\frac{\{x\}^2-\{x\}+1}{2}+\frac{x^2-x+1}{2}=\frac{\{x\}^2+x^2-x+\{x\}}{2}=$$

$$=\frac{2x^2-2x[x]+[x]^2-[x]}{2}=x^2-x[x]+\frac{[x]([x]-1)}{2}.$$

Laurențiu Panaitopol, O.L. București, 2003

86***. Pentru $x=0\Rightarrow f(0)=f(0)[(y)], \forall y\in\mathbb{R}$.

Cazul I – $f(0)\neq 0\Rightarrow [f(y)]=1, \forall y\in\mathbb{R}$ și din relația dată pentru $x=1\Rightarrow$ $\Rightarrow f(y)=f(1), \forall y\in\mathbb{R}$, adică $f(x)=c, \forall x\in\mathbb{R}$, cu $c\in[1,2)$.

Cazul II – pentru $f(0)=0$ și $x\in(0,1)$ rezultă $f(0)=f(x)[f(y)]=0$. Dacă există $x\in(0,1)$ cu $f(x)\neq 0$, atunci $[f(y)]=0, \forall y\in\mathbb{R}$ și $f([x]y)=f(x)0=0, \forall x,y\in\mathbb{R}$ și pentru $x=1\Rightarrow f(y)=0, \forall y\in\mathbb{R}$, în contradicție cu faptul că există $x\in(0,1)$ cu $f(x)\neq 0$. Dacă pentru orice $x\in(0,1)$ avem atunci $f(x)=0$, înlocuind $x=2$ și $y=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$f(1)=f(2)\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=0\Rightarrow f(1)=0$ și atunci pentru $x=1$ și $y\in\mathbb{R}$ rezultă $f(y)=f(1)[f(y)]\Rightarrow f(y)=0, \forall y\in\mathbb{R}$. Așadar avem $f(x)=c$, unde $c\in[1,2)\cup\{0\}$.

R.M.G. nr. 35

87**. Pentru $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow f_{(x)}^2\cdot f(0)=x+f(x)+f(0)$ (1) și pentru $x=0$: $f_{(0)}^3-2f(0)=0\Rightarrow f(0)\in\{0,\pm\sqrt{2}\}$.

Dacă $f(0)=-\sqrt{2}$, atunci din (1) rezultă: $\sqrt{2}f_{(x)}^2+f(x)+x-\sqrt{2}=0$, cu $x\in\mathbb{Z}$ și pentru $x=3\Rightarrow\sqrt{2}f_{(3)}^2+f(3)+3-\sqrt{2}=0$, care nu are rădăcini reale în necunoscuta $f(3)$.

Analog se arată că $f(0)\neq\sqrt{2}$ deci $f(0)=0$. Din (1) rezultă:

$f(x)=-x, \forall x\in\mathbb{Z}\Rightarrow f([x])=-[x]$ (2).

Pentru $x\in[0,1)$ relația dată devine:

$f_{(x)}^2\cdot f(0)=x+f(0)+f(x)\Rightarrow f(x)=-x, \forall x\in[0,1)$.

Prin urmare, rezultă $f(\{x\})=-\{x\}, \forall x\in\mathbb{R}$ (3). Relația dată devine:

Scanned with OKEN Scanner

$f(x)[x]\{x\} = x - [x] - \{x\} \Rightarrow f(x)[x]\{x\} = 0, \forall\, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \cup [0,1) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \cup [0,1)$.
Putem scrie funcția $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in \mathbb{Z} \cup (0,1) \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \cup (0,1) \end{cases}$ care verifică relația dată.

Nicolae Pavelescu, Concursul „Modus Vivendi", 2004

88**. Vom arăta că funcția căutată este $f(x) = [x]$.
Să presupunem că există o altă funcție diferită de funcția parte întreagă.
Se arată prin inducție că $f(na) \geq nf(a), \forall\, n \in \mathbb{N}$. Fie $a \in (k, k+1) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(k) \leq f(a) \leq f(k+1) \Leftrightarrow k \leq f(a) \leq k+1$. Dacă $f(a) = k+1$,
atunci din $f(na) \geq nf(a) = n(k+1) = f\big(n(k+1)\big) \Rightarrow na \geq n(k+1) \Rightarrow$
$\Rightarrow a \geq k+1$, absurd. Așadar, oricare ar fi $a \in (k, k+1) \Rightarrow f(a) = k$,
de unde rezultă că: $f(x) = [x], \forall\, x \in \mathbb{R}$.

89***. Cu substituția $x \to [f(x)]$ rezultă
$f[f[f(x)]] = [f(x)] + a \Rightarrow f([x+a]) = [f(x)] + a \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x+2) = [f(x)] + a, \forall\, x \in \mathbb{N}$ (1) $\Rightarrow [f(x+2)] = [f(x)] + 2$.
Considerăm funcția $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(x) = [f(x)] - x$ (2) și din
$g(x+2) = [f(x+2)] - (x+2) = [f(x)] - x = g(x)$
rezultă că g este periodică cu $T = 2$.
Avem $g(0) = g(2) \cdots \Rightarrow g(2x) = g(0)$ și $g(2x+1) = g(1), \forall\, x \in \mathbb{N}$ (3).
Din ipoteză $f(1) = f(0) + 1 \Rightarrow [f(1)] \equiv [f(0)] + 1$. Din (2) $\Rightarrow g(0) =$
$= [f(0)]$ și $g(1) = [f(1)] - 1 = [f(0)] = g(0) \Rightarrow g(1) = g(0) = [f(0)] =$
$= p \in \mathbb{Z}$.
Din (3) rezultă $g(x) = g(0) = g(1) = p, \forall\, x \in \mathbb{N}$.
Din (2) rezultă $[f(x)] = x + p, \forall\, x \in \mathbb{N}$ (4) $\Rightarrow [f(p)] = 2p$ (5),
iar din enunț, $f([f(x)]) = x + a$, pentru $x = 0, f([f(0)]) = a \Rightarrow$
$\Rightarrow f(p) = a \Rightarrow [f(p)] = 2$ și din $[f(p)] = 2p \Rightarrow p = 1$
și din (4) rezultă $[f(x)] = x + 1, \forall\, x \in \mathbb{N}$. Utilizând relația din enunț,
rezultă $f(x+1) = x + a \Rightarrow f(x) = x + a - 1, \forall\, x \in \mathbb{N}$.

Dan Seclăman, R.M.C, 1990

90**. Notăm cu S_n suma din stânga.
Pentru $n = 0 \Rightarrow S_0 = 2 \Leftrightarrow \left[\frac{f(0)}{3}\right] + \left[\frac{f(1)}{3}\right] + \left[\frac{f(2)}{3}\right] = 2$ (1).
Pentru $n = 1 \Rightarrow S_1 = 6 \Leftrightarrow \left[\frac{f(1)}{3}\right] + \left[\frac{f(2)}{3}\right] + \left[\frac{f(3)}{3}\right] = 6$ (2).
Din (1) și (2)rezultă $\left[\frac{f(3)}{3}\right] - \left[\frac{f(0)}{3}\right] = 4 \Leftrightarrow \left[\frac{9a+3b+c}{3}\right] - \left[\frac{c}{3}\right] = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3a + b + \left[\frac{c}{3}\right] - \left[\frac{c}{3}\right] = 4 \Leftrightarrow 3a + b = 4, a, b \in \mathbb{N}, a \neq 0 \Rightarrow a - b = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Din (1) rezultă $\left[\frac{c}{3}\right]+\left[\frac{c+2}{3}\right]+\left[\frac{c+6}{3}\right]=2\Rightarrow 2\left[\frac{c}{3}\right]+\left[\frac{c+2}{3}\right]=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{c}{3}\right]\equiv\left[\frac{c+2}{3}\right]=0\Rightarrow c=0\Rightarrow f(n)=n^2+n,$

care verifică relația din enunț

$$\left[\frac{n(n+1)}{3}\right]+\left[\frac{(n+1)(n+2)}{3}\right]+\left[\frac{(n+2)(n+3)}{3}\right]=n^2+3n+2.$$

Gh. Alexe Brăila, Trident, 2007

91***. Pentru $n=0\Rightarrow\left[\frac{c}{3}\right]+\left[\frac{a+b+c}{3}\right]+\left[\frac{4a+2b+c}{3}\right]=2$ (1).

Pentru $n=1\Rightarrow\left[\frac{a+b+c}{3}\right]+\left[\frac{4a+2b+c}{3}\right]+\left[\frac{9a+3b+c}{3}\right]=12$ (2).

Pentru $n=2\Rightarrow\left[\frac{4a+2b+c}{3}\right]+\left[\frac{9a+3b+c}{3}\right]+\left[\frac{16a+4b+c}{3}\right]=20$ (3).

Scăzând (1) din (2) rezultă $\left[3a+b+\frac{c}{3}\right]-\left[\frac{c}{3}\right]=10\Rightarrow 3a+b=10$ (4).

Scăzând (2) din (3) rezultă $\left[\frac{16a+4b+c}{3}\right]-\left[\frac{a+b+c}{3}\right]=8\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[5a+b+\frac{a+b+c}{3}\right]-\left[\frac{a+b+c}{3}\right]=8\Rightarrow 5a+b=8$ (5).

$\begin{cases}3a+b=10\\5a+b=8\end{cases}\Rightarrow a=-1,b=13.$

Din (1) rezultă $\left[\frac{c}{3}\right]+4+\left[\frac{c}{3}\right]+\left[7+\frac{c+1}{3}\right]=2\Rightarrow 2\left[\frac{c}{3}\right]+\left[\frac{c+1}{3}\right]=-9.$

Considerând cazurile $c=3k\Rightarrow 2k+k=-9\Rightarrow k=-3\Rightarrow c=-9,$

$c=3k+1\Rightarrow k=-3\Rightarrow c=-8\Rightarrow c=3k+2\Rightarrow k\in\emptyset.$

Avem $(a,b,c)\in\{(-1,13,-9),(-1,13,-8)\}\Rightarrow$

$\Rightarrow f_1(n)=-n^2+13n-9, f_2(n)=-n^2+13n-8.$

92***. Fie $f(0)=a,\ f(1)=b,\ f(2)=c,$ cu $a,b,c\in\mathbb{N}.$

Pentru $n\in\{3,4,5\}\Rightarrow\left[\frac{n}{3}\right]=1,\left[\frac{n}{9}\right]=0\Rightarrow f(n)=a+b.$

Pentru $n\in\{6,7,8\}\Rightarrow\left[\frac{n}{3}\right]=2,\left[\frac{n}{9}\right]=0\Rightarrow f(n)=a+c.$

Partiționăm mulțimea $\mathbb{N}^*$ astfel:

$$\mathbb{N}^*=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\{3^k,3^k+1,3^k+2,\cdots,2,3^k-1\})\cup\{2,3^k,2,3^k+1,\cdots,3^{k+1}-1\}$$

$$=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k\cup B_k \text{ unde } A_k=\{3^k,3^k+1,3^k+2,\cdots,2,3^k-1\} \text{ și}$$

$B_k=\{2,3^k,2,3^k+1,\cdots,\ 3^{k+1}-1\}.$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $n \in A_k \Rightarrow \frac{n}{3} \in A_{k-1}, \frac{n}{9} \in A_{k-2}$. Dacă $n \in B_k \Rightarrow \frac{n}{3} \in B_{k-1}, \frac{n}{9} \in B_{k-2}$.
Din faptul că f este constantă pe A_0, A_1, B_0, și B_1 și din relația dată rezultă că f este constantă pe mulțimile A_k și $B_k, k \in \mathbb{N}$.
Notăm $f(n) = a_k$ pentru $n \in A_k$ și $f(n) = b_k$ pentru $n \in B_k$, unde șirurile $(a_k)_{k\geq 0}$ și $(b_k)_{k\geq 0}$ verifică relațiile de recurență $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}, \forall\, k \geq 2$, $a_0 = f(1) = a, a_1 = f(3) = a + b \Rightarrow a_k = aF_{k+1} + bF_k, k \in \mathbb{N}$
și $b_k = b_{k-1} + b_{k-2}$ cu $b_0 = f(2) = c$ și $b_1 = f(6) = a + c \Rightarrow$
$\Rightarrow b_k = cF_{k+1} + aF_k, k \in \mathbb{N}$, unde $(F_k)_{k\geq 0}$ este șirul lui Fibonacci definit prin $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare,

$$f(n) = \begin{cases} aF_k + bF_{k+1}, \text{pentru } n \in \{3^k, 3^k + 1, 3^k + 2, \cdots, 2,3^k - 1\} = A_k \\ aF_k + cF_{k+1}, \text{pentru } n \in \{2,3^k, 2,3^k + 1, \cdots, 3^{k+1} - 1\} = B_k \end{cases}$$

unde $a, b, c \in \mathbb{N}$ sunt arbitrare.

Vasile Pop

93***. Pentru $0 < x < p \Rightarrow \left[\frac{x}{p}\right] = \left[\frac{x}{p^2}\right] = 0 \Rightarrow f(x) = 1$.
Partiționăm mulțimea $[1, \infty)$ astfel:
$[1, \infty) = [p^0, p^1) \cup [p^1, p^2) \cup [p^2, p^3) \cup \cdots \cup [p^n, p^{n+1}) \cup \cdots$.
Dacă $x \in [p^n, p^{n+1})$ și $[p^1, p^2)$ funcția f este constantă și egală cu 1 pe $[p^1, p^2)$, egală cu 2 pe $[p, p^2)$, deci este constantă pe fiecare interval $[p^n, p^{n+1})$.
Este suficient să găsim forma șirului $x_n = f(p^n)$ care verifică relația de recurență $x_n = 1 + x_{n-1} + x_{n-2}, \forall\, n \geq 2$ și avem $x_0 = f(1) = 1, x_1 = f(p) = 2$.
Dacă notăm cu $1 + x_n = y_n$ atunci y_n verifică relația
$y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$ cu $y_0 = 2, y_1 = 3$, deci $y_n = F_{n+3}$ (șirul lui Fibonacci).
În concluzie $f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \\ 1 & , \ x \in (0, p) \\ F_{n+3} - 1, & x \in [p^n, p^{n+1}) \end{cases}$.
Se poate observa că $f(x) = F_{[\log_p(xp^3)]} - 1$.

Vasile Pop

94***. Pentru $0 < n < p \Rightarrow \left[\frac{n}{p}\right] = 0 \Rightarrow f(n) = 1$.
Pentru $n \geq p$ partiționăm mulțimea $\mathbb{N}^*$ astfel:
$\mathbb{N}^* = \{1,2, \ldots, p-1\} \cup \{p, p+1, \ldots, p^2 - 1\} \cup \{p^2, p^2 + 1, \ldots, p^3 - 1\} \cup \cdots =$
$= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k \cup \ldots$, unde $A_k = \{p^{k-1}, p^{k-1} + 1, \cdots, p^k - 1\}$.
Dacă $n \in A_k \Rightarrow \frac{n}{p} \in A_{k-1}$. Din relația de recurență verificată de f din faptul că f este constantă pe A_1, rezultă că f este constantă pe $A_k, k \geq 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Va fi suficient să determinăm funcția f pe $M = \{1, p, p^2, \cdots\}$.
Avem $f(p^k) = 1 + af(p^{k-1})$ (1) și cu notația $f(p^k) = a_k$ rezultă că șirul $(a_k)_{k\geq 1}$ verifică condiția $a_k = 1 + a \cdot a_{k-1}, \forall\, k \geq 1$ (2).
Avem $a_0 = f(p^0) = f(1) = 1, a_1 = 1 + a, a_2 = 1 + a + a^2$ și prin inducție se deduce că $a_k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^k = \dfrac{a^{k+1} - 1}{a - 1}$.
Prin urmare, pentru $a \in [p^k, p^{k+1})$ avem:

$$f(n) = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} = \frac{1}{a - 1}\left(a^{[\log_p n]+1} - 1\right).$$

În concluzie, $f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & 0 < n < p \\ \dfrac{1}{a-1}(a^{k+1} - 1), & n \in [p^k, p^{k+1}) \end{cases}$.

Vasile Pop

95***. Pentru $x = 0 \Rightarrow \{f(0)\} + f([f(0)]) = 0 \Rightarrow \{f(0)\} = 0 \Rightarrow f(0) \in \mathbb{N}$ și $f([f(0)]) = 0$. Presupunând că pentru $n \in \mathbb{N}$ avem $f(n) \in \mathbb{N}$ și $f(n+1) \notin \mathbb{N}$.
Din relația dată rezultă $f([f(x)]) = x - \{f(x)\}$ (1).
Pentru $x = [f(n+1)]$ relația (1) devine:
$f([f([f(n+1)])]) = [f(n+1)] - \{f[f(n+1)]\} \Rightarrow$
$\Rightarrow f[n + 1 - \{f(n+1)\}] + \{(n+1) - \{f(n+1)\}\} = [f(n+1)] \Rightarrow$
$\Rightarrow f[n + (1 - \{f(n+1)\})] + \{1 - \{f(n+1)\}\} = [f(n+1)],$
$f(n) + 1 - \{f(n+1)\} = [f(n+1)],$
$f(n) + 1 = [f(n+1)] + \{f(n+1)\} = f(n+1) \Rightarrow f(n+1) \in \mathbb{Z},$
contradicție cu presupunerea făcută. Așadar, rezultă că $f(n) \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Din relația dată $f([f(x)]) + f(x) - [f(x)] = x$ (2)
și $f([f(x)]) \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) - x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{f(x)\} = \{x\}$.
Relația devine $f([f(x)]) = [x] \Rightarrow f([x]) = f\big(f([f(x)])\big)$ (3).
Pentru $x = n$ relația dată inițial devine: $n = \underbrace{\{f(n)\}}_{0} + f([f(n)]) = f\big(f(n)\big)$
(deoarece $f(n) \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(n) = [f(n)]$ și $\{f(n)\} = 0$).
Din $f\big(f(n)\big) = n$ (4) $\Rightarrow f\big(f([f(x)])\big) = [f(x)], \forall\, x \geq 0$ (5).
Cuplând (3) cu (5) $\Rightarrow [f(x)] = f([x]), \forall\, x \geq 0$.
Observație. Rezultă că și $\{f(x)\} = f(\{x\})$.
Într-adevăr din: $f[f(x)] + \{f(x)\} = x \Rightarrow f\big(f([x])\big) + \{f(x)\} = x$
și din (4) rezultă $[x] + \{f(x)\} = x \Rightarrow \{f(x)\} = \{x\}$.

Gabriel Dospinescu, O.N., 2003 (lista scurtă)

Scanned with OKEN Scanner

96***. Pentru $x = 0 \Rightarrow f(0) \in \{0, \pm\sqrt{3}\}$.

Dacă $f(0) = 0$ rezultă că $f(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Aşadar funcţia nulă satisface relaţia dată. Dacă $f(0) = \sqrt{3}$, atunci pentru $x = k \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow f^2(k)\sqrt{3} =$

$= 2f(k) + \sqrt{3}, f^2(k)\sqrt{3} - 2f(k) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow f(k) \in \left\{\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

Pentru $x \in (0,1) \Rightarrow f^2(x)\sqrt{3} - 2f(x) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow f(x) \in \left\{\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$,

$\forall\, x \in (0,1)$. Se ivesc următoarele cazuri:

a) $f(k) = \sqrt{3}, \forall\, k \in \mathbb{Z}$ şi $f(x) = \sqrt{3}, \forall\, x \in [0,1)$, atunci se deduce că $f(x) = \sqrt{3}, \forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) $f(k) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \forall\, k \in \mathbb{Z}^*$ şi $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \forall\, x \in (0,1)$, atunci din relaţia dată $\Rightarrow f(x)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f(x) - \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{3}, \forall\, x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Z}^*$,

$x \notin (0,1) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{3}}, & x \in (0,1) \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}, & x \in \mathbb{Z}^* \\ \sqrt{3}, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^* \cup (0,1) \end{cases}$ care verifică relaţia dată.

c) $f(k) = \sqrt{3}, \forall\, k \in \mathbb{Z}$ şi $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \forall\, x \in (0,1)$, atunci relaţia devine

$-f(x) = f(x) + \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3}, & x \in \mathbb{Z}^* \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}, & x \in (0,1) \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^* \cup [0,1) \end{cases}$.

d) $f(k) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \forall\, k \in \mathbb{Z}^*$ şi $f(x) = \sqrt{3}, \forall\, x \in [0,1)$,

$f(x)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}) = f(x) + \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \forall\, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^* \cup [0,1)$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{3}}, & x\in\mathbb{Z}^*\\ \sqrt{3}, & x\in[0,1)\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}^*\cup[0,1)\end{cases}.$$

Se procedează analog dacă $f(0)=-\sqrt{3}$.

97***. Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $f(n)=f(m)\Leftrightarrow\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}=$

$=\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right\}$ (1). Dacă $n>m$ atunci din (1) rezultă

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right]=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\in\mathbb{Z}\Rightarrow$$

$\Rightarrow E_{n,m}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m}\in\mathbb{Z}$ ceea ce este fals.

Într-adevăr, descompunând numitorii $n+1,n+2,\ldots,m$ în factori primi rezultă că fiecare va fi de forma $2^t(2k+1),(t\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N})$.

Fie $r\in\{n+1,n+2,\ldots,m\}$ care are în descompunere cea mai mare putere a lui 2, adică $r=2^p(2k+1)$ cu p maxim. Rezultă că

$E_{n,m}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{m}$ după aducerea la același numitor va avea numărătorul un număr impar, iar numitorul un număr par, deci $E_{n,m}\notin\mathbb{Z}$.

Ion Savu

98***. <u>Soluția 1</u>

Fie $g(n)=\sum_{k=1}^{n}k\left[\frac{n}{k}\right]$ și $f(1)=1$.

Avem $f(n)=g(n)-g(n-1),\forall\, n\geq 2$, dar

$$g(n)-g(n-1)=n+\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)=\sigma(n)\ (*),\ \text{deoarece}$$

$\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]=\begin{cases}1, & k\mid n\\ 0, & k\nmid n\end{cases}$ (vezi ultimul capitol). Prin urmare $f(n)=\sigma(n)$, unde $\sigma(n)$ reprezintă suma divizorilor lui n.

<u>Soluția 2</u>

Avem $\sum_{k=1}^{n}k\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{k=1}^{n}k\sum_{\substack{m\leq n\\ k\mid m}}=\sum_{m\leq n}\sum_{d\mid m}d=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{d\mid m}d\right)=\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)\Rightarrow$

$\Rightarrow f(n)=\sigma(n)$.

Pirculyev Rovsen, Octogon, 2015

Scanned with OKEN Scanner

99***. Pentru $n = 1 \Rightarrow f \equiv 0$ și $f(\mathbb{R}) = 0$.
Dacă $n \geq 3$, impar, atunci $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$. Într-adevăr, fie $b \in \mathbb{Z}$ ales arbitrar, atunci polinomul $P(y) = y^n - y - b$ are cel puțin o rădăcină reală, fie de exemplu y_0, adică $y_0^n - y_0 - b = 0 \Rightarrow y_0^n = y + b$, atunci
$f(y_0) = [y_0^n] - [b] = [y_0 + b] - [y_0] = b + [y_0] - [y_0] = b$.
Dacă $n \geq 2$, par, arătăm că $f(\mathbb{R}) = \mathbb{N}$. Fie $x \in \mathbb{R}$. Dacă $x < 1$, atunci $[x] \leq 0$ și cum $x^n \geq 0 \Rightarrow [x^n] \geq 0$ rezultă că $f(x) \geq 0$ și $f(x) \in \mathbb{N}$.
Dacă $n \geq 1 \Rightarrow x^n \geq x \Rightarrow [x^n] \geq [x] \Rightarrow f(x) \in \mathbb{N}$.
Prin urmare $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{N}$. Fie $b \in \mathbb{N}$ și polinomul $P(y) = y^n - y - b$. Din $P(0) = -b \leq 0$ și $P(b) = b^n \geq 0$ rezultă că P se anulează într-un punct c cuprins în $(0, b)$ cu $f(c) = b$, deci $\mathbb{N} \subset f(\mathbb{R})$ și pentru $n \geq 2$, par, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{N}$.

Laurențiu Panaitopol, G.M. nr. 10/1996

100*. a) Calculăm $(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = f(x) + (-1)^{[f(x)]} =$
$= [f(x)] = \big[x + (-1)^{[x]}\big] = [x] + (-1)^{[x]} = x + (-1)^{[x]} + (-1)^{[x]} \cdot$
$\cdot (-1)^{(-1)^{[x]}} = x + (-1)^{[x]} - (-1)^{[x]} = x \Rightarrow f$ bijectivă și $f^{-1} = f$.

b) Calculăm $f\big(f(x)\big) = \{f(x)\} - [f(x)]$ $(*)$ și cum
$[f(x)] = \big[\{x\} - [x]\big] = -[x]$ și $\{f(x)\} = \big\{\{x\} - [x]\big\} = \big\{\{x\}\big\} = \{x\}$,
atunci $(*)$ devine: $f\big(f(x)\big) = \{x\} + [x] = x$, deci f bijectivă și $f^{-1} = f$.

c) Calculăm $f\big(f(x)\big) = f(x) - 4[f(x)] + [2f(x)]$ $(*)$
și cum $[f(x)] = [x] - 4[x] + [2x] = [2x] - 3[x]$
și $2f(x) = 2x - 8[x] + 2[2x] \Rightarrow [2f(x)] = 3[2x] - 8[x]$
și $(*)$ devine $f\big(f(x)\big) = x - 4[x] + [2x] - 4[2x] + 12[x] + 3[2x] - 8[x] =$
$= x \Rightarrow f$ bijectivă și $f^{-1} = f$.

d) Calculăm $\big(f(x)\big) = f - [2f]$ și cum $[2f] = \big[2x - 2[2x]\big] =$
$= [2x] - 2[2x] = [2x] \Rightarrow f\big(f(x)\big) = f - [2f] = x - [2x] + [2x] = x \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ bijectivă și $f^{-1} = f$.

e) $(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = f(x) - (n+2)[f(x)] + [nf(x)] =$
$= x - (n+2)[x] + [nx] - (n+2)\big[[x] - (n+2)[x] + [nx]\big] + [nx] -$
$-n(n+2)[x] + n[nx] = x \Rightarrow (f \circ f)(x) = x, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

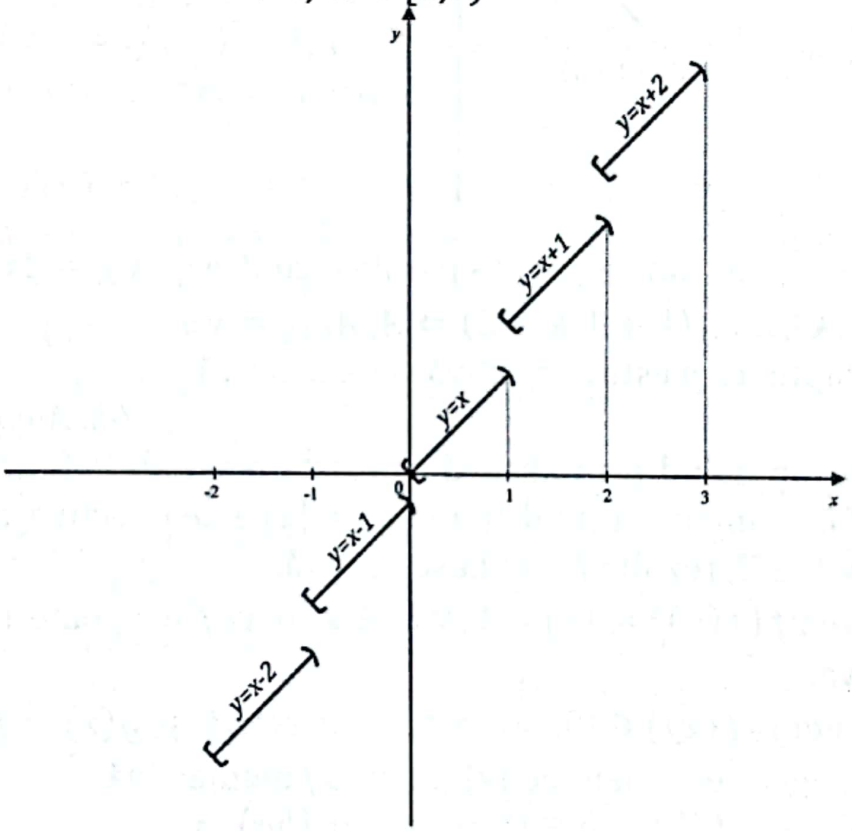
101**. a) $f(x = 2[x]) + \{x\} = 2k + t$, unde $[x] = k \in \mathbb{Z}, \{x\} = t \in [0,1)$
și dacă numerele de forma $2k + 1 + t$ nu sunt imagini ale nici unei valori ale lui x (de exemplu ecuația $f(x) = 3{,}4$ nu are soluție). Fie $f(a) = f(b) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2[a] + \{a\} = 2[b] + \{b\} \Rightarrow 2([a] - [b]) = \{b\} - \{a\} \in \mathbb{Z}$.
Ultima egalitate se realizează dacă $[a] = [b]$ și $\{a\} = \{b\} \Rightarrow a = b$ prin urmare f este injectivă.

Scanned with OKEN Scanner

b) Avem $g(x) = 2x - [x] = [x] + 2\{x\}$ și g neinjectivă $g(1{,}5) = g(2)$ sau $g\left(m + \frac{1}{2}\right) - g(m+1)$ cu $m \in \mathbb{N}$.

Fie $y \in \mathbb{R}$, atunci există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(x) = y$. Să considerăm $x = [y] + \frac{1}{2}\{x\}$ și atunci $g(x) = g\left([y]\frac{1}{2}\{x\}\right) = [y] + 2\frac{1}{2}\{x\} =$
$= [y] + \{x\} = y$.

c) Avem $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \in [-2,-1) \\ x-1, & x \in [-1,0) \\ x, & x \in [0,1) \\ x+1, & x \in [1,2) \\ x+2, & x \in [2,3) \end{cases}$.

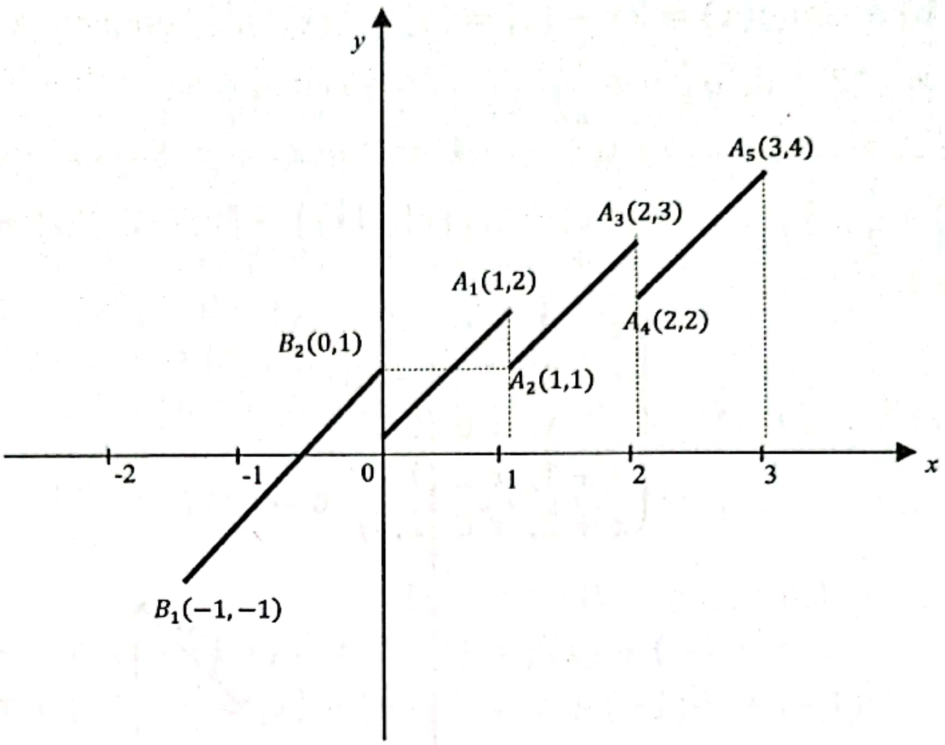


Graficul este format din segmente paralele (închise la stânga, deschise la dreapta) translatate cu o unitate.

Se remarcă faptul că f este injectivă și nesurjectivă. Graficul lui

$g(x) = 2x - [x] = \begin{cases} 2x+2, & x \in [-2,-1) \\ 2x+1, & x \in [-1,0) \\ 2x, & x \in [0,1) \\ 2x-1, & x \in [1,2) \\ 2x-2, & x \in [2,3) \end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner



Graficul este format din segmente paralele cu dreapta $y = 2x$, de lungime $\sqrt{5}$. Fie $A_k(k,k), A_{k+1}(k+1,k+2) \Rightarrow A_kA_{k+1} = \sqrt{5}$.
Se remarcă faptul că g este surjectivă și neinjectivă.

Gh. Andrei, O.L. 1991

102*. a) Presupunând prin absurd că există o astfel de funcție injectivă, rezultă $f \circ f$ este injectivă și funcția $g(x) = [x]$ este injectivă, absurd.
Deoarece $f \circ f \in \mathbb{Z}$, rezultă f este nesurjectivă.

b) Avem $f\big(f(k)\big) = \{k\} = 0, \forall\, k \in \mathbb{Z}$, deci f nu poate fi injectivă și nici surjectivă.

c) Avem $f\big(f(x)\big) \in [0,\infty) \Rightarrow f$ nesurjectivă și $g(x) = f\big(f(x)\big)$ este funcție pură, deci g este neinjectivă, rezultă f neinjectivă.

103*. Dacă $f(a) = f(b), a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \{a\alpha\} = \{b\alpha\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a\alpha - [a\alpha] = b\alpha - [b\alpha] \Rightarrow \alpha = \dfrac{[b\alpha] - [a\alpha]}{b-a}$, fals dacă $a \neq b$.

Așadar, se impune $a = b$, deci f este injectivă.
Fie $y \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $f(x) = y \Rightarrow \alpha x - [\alpha x] = y \Rightarrow \alpha x =$

$= [\alpha x] + y \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha = \dfrac{[\alpha x] + y}{x} \in \mathbb{Q}$, fals.

Prin urmare f este nesurjectivă $\big(f(\mathbb{Q})\big) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

104*. Din $f(m) = f(n) \Rightarrow \big(g(m) - g(n)\big)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$
și se impune ca $g(m) - g(n) = 0 \Leftrightarrow g(m) = g(n) \Rightarrow m = n$.

Scanned with OKEN Scanner

105*. Fie $f(m) = f(n) \Leftrightarrow \{ma\} + \{mb\} = \{na\} + \{nb\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ma + mb - na - nb = [ma] + [mb] - [na] - [nb] \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow (m-n)(a+b) \in \mathbb{Z}$, dar $a + b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ și deci $m = n \Rightarrow f$ injectivă.
Evident $0 \leq f(n) < 2 \Rightarrow Imf \subset [0,2)$ și deci f nesurjectivă.

106*. Evident $f(n) = \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - [\sqrt{n}] - [\sqrt{n+1}]$.
Se arată că funcția nu are valori raționale.
Dacă $f(n) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n(n+1)} \in \mathbb{Q}^*$, fals
(deoarece $n < \sqrt{n^2+n} < n+1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$).

107*. Presupunem prin absurd că g nu este injectivă și există $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(x_0) = g(y_0) \Leftrightarrow f(x_0) - [f(x_0)] = f(y_0) - [f(y_0)] \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_0) - f(y_0) = [f(x_0)] - [f(y_0)] \Rightarrow Z_0 = [f(x_0)] - [f(y_0)]$, absurd
($Z_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$). Așadar, g este injectivă.

Alex. Isar, R.M.T., 1983

108*. Pentru $f(k) = \{k\} = 0$. Arătăm că pentru orice $y \in (0,1)$, ecuația $f(x) = y \Rightarrow x - [x] = y \Rightarrow x - k = y \Rightarrow x = k + y$ și pentru $y \in [0,1)$ rezultă $x = k + y \in [k, k+1)$ este unic determinat. Prin urmare f este bijectivă și $f^{-1}(y) = k + y$.

109**. Avem $[af] = [ax - a[ax]] = (1-a)[ax]$.
Calculăm $f(f(x)) = f(x) - [af(x)] =$
$= x - [ax] - (1-a)[ax] = x - [ax](2-a) = x \Leftrightarrow a = 2$ sau $a = 0$.

110**. a) Fie $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x - [ax] = y - [ay]$ (1) $\Leftrightarrow [ax] - [ay] =$
$= x - y = k$, unde $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = y + k$ și (1) devine
$y - [ay] - [ay + ak] \Rightarrow k(1-a) = 0$. Dacă $a = 1$ rezultă
$f(x) = x - [x] = \{x\}$ care nu este injectivă (fiind periodică).
Așadar $k = 0 \Rightarrow y = x$, deci f injectivă pentru $a \in \mathbb{Z} - \{1\}$.

b) Se impune ca $f \circ f = 1_R \Rightarrow f(f(x)) = x \Leftrightarrow f - [af] = x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - [ax] - [ax - a[ax]] = x \Rightarrow a[ax] - 2[ax] = 0 \Leftrightarrow [ax](a-2) = 0$
$\Rightarrow a \in \{0,2\}$.

c) Într-adevăr, pentru $a = 1$ f nu este injectivă și $f(x) = \{x\}$ care este periodică cu $T = 1$.

d) Numai în cazul când este și bijectivă.

111*. a) Avem $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ rezultă că f este bijectivă și $f^{-1}(x) = f(x)$.

b) f este strict monotonă pe fiecare interval $[k, k+1)$, $f(x) = x + 2k$. Graficul este o funcție „în scară", de unde se remarcă și bijectivitatea funcției.

Scanned with OKEN Scanner

112**. Observăm că dacă $a = 0$ sau $b = 0 \Rightarrow f(x) = k$.
Se impune condiția ca $f \circ f = 1_R$. Avem:
$f(f(x)) = f(x) + a[bf(x)] = z + a[bx] + a(1 + ab)[bx] =$
$\left(\text{dar cum } [bf(x)] = \left[bx + ab[bx]\right] = [bx] + ab[bx] = (1 + ab[bx])\right)$
$= +[bx](2a + a^2b) \Rightarrow ab = -2$ și atunci $f(f(x)) = x$, deci f bijectivă și $f^{-1} = f$. Dar $ab = -2 \Rightarrow (a, b) \in \{(-2,1), (2,1)\}$ și avem funcțiile $f_1(x) = x - 2[x], f_2(x) = x - [-2x]$.

113**. Fie a impar, atunci
$f(f(x)) = f(x) + a(-1)^{[f]} = x + a(-1)^{[x]} + a(-1)^{[x]+a(-1)^{[x]}} =$
$= x + a(-1)^{[x]} + a(-1)^{[x]} \cdot (-1)^{a(-1)^{[x]}} = x \Rightarrow f$ bijectivă și $f^{-1} = f$.
Dacă a par, considerăm funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, S_{(x)} = x - a(-1)^{[x]}$ și se arată că $g \circ f = f \circ g = 1_R$ și deci f bijectivă cu $f^{-1} = g$.

114**. Putem căuta o funcție de forma $f(x) = ax + b[x] \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(ax + b[x]) + a[x] + b[x] + a(x - 2[x]) + b\left[x - 2[x]\right] = x =$
$= 2ax + 3b[x] + a[x] + ax - 2a[x] - b[x] = x \Rightarrow$
$\Rightarrow x(3a - 1) + [x](2b - a) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{6} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}[x],$
care verifică relația dată. Din $f(x) = f(y) \Rightarrow 2(x - y) = [x] - [y] \Rightarrow x = y$ și f este injectivă. (Se poate trasa graficul funcției de unde rezultă că f este injectivă și nesurjectivă. De exemplu pentru $y = \frac{5}{12}$ nu există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \frac{5}{12}$.)

115*. Observăm că pentru $x \in \mathbb{Z}, f(x) = 0$ și pentru $x \in [0,1)$ rezultă tot $f(x) = 0$.
$f(x) = [x](x - [x]) = x[x] - [x]^2$ și dacă $x \in [k, k + 1) \Rightarrow f(x) = kx - k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, prin urmare pentru $\forall\, y = \frac{n}{m} < k$ există $x = k + \frac{n}{mk}$ astfel încât:
$f(x) = f\left(k + \frac{n}{mk}\right) - k^2 = \frac{n}{m} = y.$
Pentru $k = 0$ rezultă $f([0,1)) = 0$. De altfel, din graficul funcției rezultă nebijectivitatea și nesurjevictatea funcției.

Scanned with OKEN Scanner

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,1)\\ x-1, & x\in[1,2)\\ 2x-4, & x\in[2,3)\\ 3x-9, & x\in[3,4)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ kx-k^2, & x\in[k,k+1)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}.$$

R.M.T., 1996

116**. Soluția 1

a) Fie $f(a)=f(b)\Leftrightarrow\{a\}-[a]=\{b\}-[b]\Rightarrow[b]-[a]=$
$=\{b\}-\{a\}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{b\}=\{a\}\Rightarrow[a]=[b]\Rightarrow a=b$, deci f injectivă.
Fie $y\in\mathbb{R}$ cu $y=[y]+\{y\}$, considerăm $x=-[y]+\{y\}$ și
$f(x)=-[y]+\{y\}-2(-[y])=[y]+\{y\}=y$.
Prin urmare f injectivă și cum pentru orice $y\in\mathbb{R}$ rezultă că există $x\in\mathbb{R}$, $x=-[y]+\{y\}$ astfel încât $f(x)=y\Rightarrow f^{-1}(y)=-[y]+\{y\}$.

Soluția 2

Avem $f(x)=x-2[x]$ și $(f\circ f)(x)=x\Rightarrow f$ bijectivă.

Concurs „Argument", 2014

b) Evident $a\neq 0$. Fie $f(x)\Leftrightarrow a\{x_1\}-[x_1]=a\{x_2\}-[x_2]\Rightarrow$
$\Rightarrow[x_2]-[x_1]=a(\{x_2\}-\{x_1\})$.
Dacă $\{x_2\}-\{x_1\}\neq 0$, atunci pentru $a=\dfrac{k}{\{x_2\}-\{x_1\}}\Rightarrow a(\{x_2\}-\{x_1\})\in\mathbb{Z}$ și f neinjectivă, adică $a\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Pentru $a\in(-1,1)-\{0\}$ egalitatea nu poate avea loc decât dacă $[x_1]=[x_2]$ și $\{x_1\}=\{x_2\}\Rightarrow$
$\Rightarrow x_1=x_2$, deci în acest caz g este injectivă.
Pentru $a>1$ sau $a<-1$, f poate fi injectivă.
Pentru $a=\pm1$, g este bijectivă. Putem proceda și astfel: fie $g(x)=ax-(a+1)[x]$. Evident $a\neq 0$. Dacă $a>0$, atunci din explicitarea funcției $g(x)$ rezultă:

$$g(x)=\begin{cases} ax+2(a+1), & x\in[-2,-1)\\ ax+(a+1), & x\in[-1,0)\\ ax, & x\in[0,1)\\ ax-(a+1), & x\in[1,2)\\ ax-2(a+1), & x\in[2,3) \end{cases}$$

și din reprezentarea grafică rezultă că pentru $a\in(0,1)$ g este injectivă și nesurjectivă, iar pentru $a>1$ f este neinjectivă și surjectivă.
Pentru $a=1$, g este bijectivă $g(x)=x-2[x]$ (vezi ex. 100), $g\circ g=1_R$.
Dacă $a<0$, atunci pentru $a=-1\Rightarrow g(x)=-x$ și deci bijectivă.

Scanned with OKEN Scanner

La fel, din reprezentarea grafică rezultă că pentru $a \in (-1,0)$, g este injectivă și nesurjectivă, iar pentru $a < -1$, g este neinjectivă și surjectivă. Prin urmare g este bijectivă dacă $a \in \{-1,1\}$ și $g^{-1}(x) = g(x)$.

c) $\operatorname{tg} x - 2[\operatorname{tg} x] = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ și cum funcția $f(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}(\sqrt{3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k + 1, \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Concurs „Unirea", 2005

117**. Evident imaginile numerelor impare sunt numere naturale și imaginile numerelor pare sunt numere întregi negative:
$f(2k+1) = k+1$ și $f(2k) = -k, k \in \mathbb{N}$.

G.M. nr. 5/1983

118**. Arătăm că în general dacă $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ și $m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, funcția $f(n) = \{m^n\alpha\}$ este injectivă.
Într-adevăr să presupunem că f nu ar fi injectivă, adică există $u, v \in \mathbb{N}$, $u \neq v$, astfel încât:
$f(u) = f(v) \Leftrightarrow \{m^u\alpha\} = \{m^v\alpha\} \Rightarrow m^u\alpha - [m^u\alpha] =$
$= m^v\alpha - [m^v\alpha] \Rightarrow \alpha(m^u - m^v) = [m^u\alpha] - [m^v\alpha] \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha = \frac{[m^u\alpha] - [m^v\alpha]}{m^u - m^v} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$, absurd. Deci f este injectivă.

Constantin Niță, O.J. 1987

119***. a) Fie f injectivă, atunci $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Presupunem că $a \in \mathbb{Q}$, adică $a = \frac{p}{q}, (p,q) = 1, p, q \in \mathbb{Z}^*$ (dacă $a = 0$, evident f nu este injectivă),
deci $f(q) = f(2q) = 0$, prin urmare f neinjectivă, contradicție. Reciproc, fie $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ și presupunem că f nu este injectivă, deci există $m \neq n$ astfel încât $f(m) = f(n) \Leftrightarrow \{am\} = \{an\} \Rightarrow am - [am] = an - [an] \Rightarrow$
$\Rightarrow [an] - [am] = a(n-m) \Rightarrow a = \frac{[an] - [am]}{n-m}$, contradicție.

b) Fie $a = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, (p,q) = 1$, atunci $f(n) = \{an\} = \left\{\frac{pn}{q}\right\}$.
Aplicând teorema împărțirii avem $n = tq + r,\ r \in \{0,1,2,3,\cdots,q-1\} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(n) = \left\{\frac{p(tq+r)}{q}\right\} = \left\{pt + \frac{pn}{q}\right\} = \left\{\frac{pn}{q}\right\}$. Deci rezultă:
$f(n) = \left\{\frac{pn}{q}\right\}$, de unde rezultă că $M = \{f(0), f(1)\}, \cdots, f(q-1)\}$.
Se arată ușor că numerele $p, 2p, \cdots, (q-1)p$ dau prin împărțiri la q resturi nenule, distincte $(0, p, 2p, \cdots, (q-1)p$ formează un sistem complet de resturi nenule q).

Scanned with OKEN Scanner

Evident $f(0)=0$ şi $M=\left\{0,\frac{1}{q},\frac{2}{q},\cdots,\frac{q-1}{q}\right\}$ după o eventuală reordonare a resturilor, aşadar M are q elemente.

120**. Fie $x_1=a+b\sqrt{n}$ şi $x_2=c+d\sqrt{n}$ şi din $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$
$\Rightarrow [a+b\sqrt{n}]=[c+d\sqrt{n}]$ şi cu $\begin{cases}a^2-nb^2=1\\c^2-nd^2=1\end{cases}\Rightarrow$
$\Rightarrow a^2-c^2=n(b^2-d^2)$. Pentru $a>c\Rightarrow b>d$.
Avem $[c+d\sqrt{n}]\le c+d\sqrt{n}<a+b\sqrt{n}<[a+b\sqrt{n}]+1\Rightarrow$
$\Rightarrow (a-c)+(b-d)\sqrt{n}<1$, unde $a,b,c,d\in\mathbb{N}$, cu $a>b, c>d, a-c>1$, contradicţie. Prin urmare, $a=c\Rightarrow b=d\Rightarrow f$ injectivă.
Arătăm că $f(n)\neq 2, \forall\, n\in A$. Presupunem că $f(n)=2\Rightarrow [a+b\sqrt{n}]=2\Rightarrow$
$\Rightarrow 2\le a+b\sqrt{n}<3$ şi $\frac{1}{3}<a-b\sqrt{n}<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{7}{3}<2a<\frac{7}{2}$,
$2,(3)<2a<3,5\Rightarrow 2a=3$ fals.

Lucian Petrescu, G.M. nr. 2/2010

§ 4. Probleme de concurs

121**. a) Evident dacă $c=0\Rightarrow f(x)=x$ este bijectivă, iar dacă $c=-2$, adică $f(x)=x-2[x]$, atunci în baza exerciţiului 100 rezultă f bijectivă, şi avem $f\circ f=1_R$.

Reciproc, $f(x)=\begin{cases}x-2c, & x\in[-2,-1)\\ x-c, & x\in[-1,0)\\ x, & x\in[0,1)\\ x+c, & x\in[1,2)\\ x+2c, & x\in[2,3)\end{cases}$.

Observăm că oricare ar fi $c\in\mathbb{R}$, funcţia este strict crescătoare pe fiecare interval $[k,k+1)$.
Dacă $c>0$, din reprezentarea grafică rezultă că f este injectivă şi nesurjectivă.
Dacă $c<-2$, analog rezultă că f este injectivă şi nesurjectivă.
Dacă $c=-1, f(x)=x-[x]=\{x\}$ care este periodică, deci nici injectivă şi nici surjectivă.
Dacă $c\in(-2,-1)\cup(-1,0)$ rezultă că f este neinjectivă, dar surjectivă.
Tot din reprezentarea grafică rezultă că pentru $c\in\{0,-2\}$ funcţia este bijectivă (vezi şi ex. 100).

Gh. Andrei

122***. Se cuplează imaginile funcţiilor
$d_7=\left(0,\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7},1\right)$; $d_3=\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$; $d_2=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$

Scanned with OKEN Scanner

și se obține diviziunea $d=\left(0,\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{6}{7},1\right)$.

Utilizând tabelele de mai jos se deduce mulțimea valorilor și soluțiilor inecuațiilor.

a)

x	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	1
$f(x)$	0	1	2	0	1	0	1	-1	0	1	

Prin urmare, $\text{Im}f=\{-1,0,1,2\}$ și $f(x)<0$, deci $x\in\left[\frac{2}{3},\frac{5}{7}\right)$, în rest $f(x)\geq 0$.

b) Analog se cuplează diviziunile

$d_6=\left(0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6},1\right)$; $d_3=\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$; $d_2=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$

și se obține diviziunea $d=\left(0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6},1\right)$ și din următorul tabel de valori se deduce Img.

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1
$g(x)$	0	1	1	0	0	1	

Img= $\{0,1\}\Rightarrow g(x)\geq 0,\forall x\in[0,1)$, prin urmare $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Cuplând diviziunile

$d_{10}=\left(0,\frac{1}{10},\frac{2}{10},\frac{3}{10},\frac{4}{10},\frac{5}{10},\frac{6}{10},\frac{7}{10},\frac{8}{10},\frac{9}{10},1\right)$; $d_5=\left(0,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},1\right)$;

$d_3=\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)\Rightarrow d=\left(0,\frac{1}{10},\frac{2}{10},\frac{3}{10},\frac{1}{3},\frac{4}{10},\frac{5}{10},\frac{6}{10},\frac{2}{3},\frac{7}{10},\frac{8}{10},\frac{9}{10},1\right)$.

x	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	1
$h(x)$	0	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	2	

Rezultă că Imh= $\{0,1,2\}\Rightarrow h(x)\geq 0,\forall x\in[0,1)$, prin urmare $\forall x\in\mathbb{R}$.

d) În mod analog din diviziunea $d=\left(0,\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{3}{4},\frac{4}{5},1\right)$:

	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	1
	0	-1	0	1	0	1	0	2	1	

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, $\text{Im}u(x) = \{-1,1,0,2\} \Rightarrow u(x) < 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right)$, în rest $u(x) \geq 0$.

123***. Pentru $p = 1 \Rightarrow f(n) = 3(n+1)$ care nu este injectivă.
Dacă $p \geq 4$ atunci $f(0) = f(1) = 0$, deci f neinjectivă. Așadar rămân de studiat cazurile $pt_0 \in \{2,3\}$ și pentru $p = 3$ adică funcția $f(n) = \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n+1}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right]$ este bijectivă, deoarece în baza identității lui Hermite, rezultă $f(n) = \left[n \cdot \frac{n}{3}\right] = [n] = n$.

124***. Pentru $x = m \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2f(m) = m \Rightarrow f(m) = \frac{m}{2}$.
Pentru $x \in (0,1) \Rightarrow f(x) + f(0) + f(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2}$.
Fie $x \in [k, k+1)$; atunci $f(x) + f(k) + f(x-k) = x \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) + \frac{k}{2} + \frac{x-k}{2} = x \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2}$.
Prin urmare $f(x) = \frac{x}{2}, \forall\, x \in \mathbb{R}$ și este bijectivă.

125**. Pentru $x = 0$ și $x = 1 \Rightarrow f^2(0) \leq f(0)f(1)$ (*), $f^2(1) \leq f(0)f(1)$.
Dacă $f(0) = 0 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f$ neinjectivă.
Dacă $f(1) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f$ neinjectivă.
Dacă $f(1) \neq 0, f(0) \neq 0$ atunci din (*) rezultă $f(0) = f(1)$ și f neinjectivă.

126**. a) Evident $\frac{[x]}{x} \leq 1$ și $\frac{[x]}{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2[x] > x \Leftrightarrow [x] > \{x\}, \forall\, x > 1$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $y < \frac{n}{n+1} < f(x) < 1$, inegalitate satisfăcută pentru $n > \left[\frac{y}{1-y}\right] + 1$ (*) și $f(n) \in \left(\frac{n}{n+1}, 1\right)$, iar $y \notin \left(\frac{n}{n+1}, 1\right)$.
Deci există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall\, x > m, f(x) > y$ deci $f(x) \neq y$.

c) f este surjectivă întrucât restricția $f[1,2)$ ia valorile $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Constantin Caragea, O.L. Constanța, 1999

127***. Evident pentru $a = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(x) = [x] + \{x\} = x$, care este bijectivă și $f^{-1}(x) = x$.
Fie $a > 0$ și considerăm funcția $h : [0,1] \to [0,1]$, $h(x) = at^2 + bt$ cu $t \in [0,1]$.
Observăm că $h(0) = 0, h(1) = a + b = 1$ și h este strict crescătoare și bijectivă cu $h^{-1}(t) = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4at}}{2a}, t \in [0,1]$ (h strict crescătoare cu

Scanned with OKEN Scanner

sumă de funcții strict crescătoare sau $h^{-1}(t)=\frac{a-1+\sqrt{(a-1)^2+4at}}{2a}$, $a\in(0,1]$).

Fie $y\in\mathbb{R}$ și ecuația $f(x)=y\Leftrightarrow[x]+h(\{x\})=y=[y]+\{y\}$ și cum $h(\{x\})\in[0,1]\Rightarrow[x]=[y]$ și $h(\{x\})=\{y\}$, deoarece $\{x\}=h^{-1}(\{y\})$. Prin urmare rezultă $f^{-1}(y)=x=[x]+\{x\}=[y]+h^{-1}(\{y\})=$

$=[y]+\frac{-b+\sqrt{b^2+4a\{y\}}}{2a}$, cu $y\in\mathbb{R}$.

Fie $g(x)=g(y)\Leftrightarrow[x]+\{x\}^n=[y]+\{y\}^n\Leftrightarrow[x]-[y]=$
$=\{y\}^n-\{x\}^n\in\{0,\pm1\}\Rightarrow\{y\}^n-\{x\}^n=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\{y\}=\{x\}$ și $[x]=[y]\Rightarrow x=y$, deci g este injectivă.

Fie $y\in\mathbb{R}$ și $g(x)=y\Rightarrow[x]+\{x\}^n=[y]+\{y\}$ și cum $\{x\}^n\in(0,1)\Rightarrow$
$\Rightarrow[x]=[y]$ și $\{x\}^n=\{y\}\Rightarrow\{x\}=\sqrt[n]{\{y\}}$
(evident dacă $y=0\Leftrightarrow x=0$) și $[x]=[y]\Leftrightarrow x+\{x\}=[y]$,
$x=[y]+\sqrt[n]{\{y\}^n}\Rightarrow g^{-1}(y)=[y]+\sqrt[n]{\{y\}},\forall\, y\in\mathbb{R}$.

Concursul „Arhimede", 2011

128.** a) De exemplu $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=1$.

De fapt pentru orice x, $1\le\frac{2x+3}{4}<2\Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$, avem $f(x)=1$.

b) Fie $p\in\mathbb{Z}$ atunci pentru $m=2p\Rightarrow f(2p)=p$. De fapt $f:2\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ este negativă.

c) $f:2\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ este surjectivă și injectivă deoarece din
$\left[\frac{2x+3}{x}\right]=k\Leftrightarrow\frac{4k-3}{2}\le x<\frac{4k+1}{2}$ și $\frac{4k+1}{2}-\frac{4k-3}{2}=2$,
rezultă că în intervalul $\left[\frac{4k-3}{2},\frac{4k+1}{2}\right)$ există două numere întregi consecutive, $a, a+1$, astfel încât $f(a)=f(a+1)=k$ dintre care unul singur este par.

129*.** a) Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, considerăm funcția:

$g_n(x)=f(x)=\begin{cases}3x, & x\neq n\\ 3x+2, & x=n\end{cases}$

Avem $(f\circ g_n)(x)=f(g_n(x))=f(x)=\begin{cases}\left[\frac{3x}{3}\right]=x, & x\neq n\\ \left[\frac{3x+2}{3}\right]=x, & x=n\end{cases}$

și pentru $m\neq n\Leftrightarrow g_n\neq g_m$.

b) Evident f nu este bijectivă. Dacă ar exista $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ astfel încât $h\circ f=1_{\mathbb{N}}$ rezultă f injectivă, absurd $(f(0)=f(1)=f(2)=0)$.

Scanned with OKEN Scanner

130*. Se impune ca $f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$. Avem:

$f(f(x)) = x + (S+2)\sum_{k=1}^{n}[a_k x]$, unde $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Pentru $S = -2 \Rightarrow f(f(x)) = n$ sau $\sum_{k=1}^{n}[a_k x] = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$,

dar pentru $x = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}[a_k x] = 0$.

Evident nu toate numerele sunt strict pozitive și nici strict negative. Într-adevăr, dacă toate ar fi strict pozitive atunci $a_k \in (0,1)$ și atunci

pentru: $x = \dfrac{1}{\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)} = \dfrac{1}{a_p} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}[a_k x] = 1 \neq 0$.

Dacă unele ar fi strict negative și altele strict pozitive, atunci luând pentru cele m numere $a_k < 0$ și $x > 0$, astfel încât $[a_k x] = -1$ și $[a_k x] = 0$,

$a_m = 0$ se obține $\sum_{k=1}^{n}[a_k x] = -m$, fals.

$\sum_{k=1}^{n}[a_k x], \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a_k = 0, k = \overline{1,n}$ și atunci $f^{-1} = f$.

Dacă $\sum_{k=1}^{n} a_k = -2$ sau $a_k = 0, \forall\, k = \overline{1,n}$.

131***. $f(n) = \{2^n\sqrt{2}\}$.

Analizăm injectivitatea și surjectivitatea în cazul general
$f(n) = \{na\}$, unde $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
Fie $f(m) = f(n) \Rightarrow \{na\} = \{ma\} \Rightarrow na - [na] = ma - [ma] \Rightarrow$
$\Rightarrow a(n-m) = [na] - [ma]$.
Dacă $n \neq m$ atunci se obține o contradicție, deci $m = n$ și prin urmare f este injectivă. Evident, $\forall\, y \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ imaginea niciunui element $n \in \mathbb{N}^*$.
Într-adevăr, $f(n) = y \Rightarrow na - [na] = y \Rightarrow na = [na] + y \in \mathbb{Q} \Rightarrow$
$\Rightarrow a = \dfrac{[na]+y}{n}$, egalitate absurdă.
Așadar, $f(\mathbb{N}) \subset \{0\} \cup \big((0,1) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\big)$.

132**. Există funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{[x]-\{x\}}{2} = \dfrac{2[x]-x}{2} = [x] - \dfrac{1}{2}\cdot x$.

Avem $E(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y) =$

Scanned with OKEN Scanner

$= [x+y] - \frac{x+y}{2} - [x] + \frac{x}{2} - [y] + \frac{y}{2} =$

$= [x+y] - [x] - [y] = x + y - \{x+y\} - [x] - [y] =$

$= \{x\} + \{y\} - \{x+y\} = \{x\} + \{y\} - \{\{x\} + \{y\}\} = [\{x\} + \{y\}] \in \{0,1\}$

$(\text{deoarece } \{\{x\} + \{y\}\} = \{x+y\}), \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$ sau $\forall\, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow E(x,y) \equiv 0.$

Fie $x = m + \alpha, y = n + \beta$ unde $\alpha, \beta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$,

atunci $E(x,y) = [x+y] - [x] - [y] = [m+n+\alpha+\beta] - m - n =$

$= m + n + [\alpha + \beta] - m - n = [\alpha + \beta] = 1.$

Evident f este injectivă. Fie $f(x) = f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow [x] - \frac{x}{2} = [y] - \frac{y}{2} \Rightarrow [x] - [y] = \frac{x-y}{2} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2k + y,$

$k = [x] - [y] = [y + 2k] - [y] = [y] + 2k - [y] = 2k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = y.$

Funcția f este surjectivă. Într-adevăr, fie atunci:

$f(-2x - 2[-2x]) = [-2x - 2[-2x]] + \frac{2x + 2[-2x]}{2} =$

$= -2[-2x] + [-2x] + x + [-2x] = x.$

Olimpiadă Belarus, 2003

133**. Funcția $g : \mathbb{Z} \times [0,1] \to \mathbb{R}, g(a,b) = a + b$ verifică relația $g(f(x)) = [x] + \{x\} = x$ și $f(g(a,b)) = (a,b)$, deci f este bijectivă și $f^{-1} = g$.

134**. a) Trebuie arătat că $x - 2[x]$ parcurge pentru $x \in \mathbb{R}$, toate valorile reale, adică mulțimea $\{x - 2[x], x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Utilizăm un rezultat anterior. Funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x - 2[x]$ este bijectivă și $(g \circ g)(x) = x, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Relația dată se mai scrie $f(x) + 2f(g(x)) = -[x]$ (1),

dar cu substituția $x \to g(x)$ în (1) rezultă

$f(g(x)) + 2f(g(g(x))) = -[g(x)] = [x] \Rightarrow f(g(x)) + 2f(x) = [x]$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $f(x) \equiv [x]$ care verifică relația dată.

135***. a) Calculând $f(3k) = 3k^2 + k, f(3k+1) = 3k^2 + 3k,$

$f(3k+2) = 3k^2 + 5k \Rightarrow f(3k) < f(3k+1) < f(3k+2),$

deci f este strict crescătoare, deci injectivă

$\left(\text{sau deci } \frac{n(n+1)}{3} < \frac{(n+1)(n+2)}{3} \Rightarrow \left[\frac{n(n+1)}{3}\right] < \left[\frac{(n+1)(n+2)}{3}\right] \Rightarrow\right.$

$\Rightarrow f(n) < f(n+1)$; se arată însă că nu poate exista egalitatea

$f(n) = f(n+1)$ pentru nicio valoare a lui $n \in \mathbb{N}^*$).

Funcția f nu poate lua valoarea 1 sau nu poate lua valori de forma $3k^2 + 2k, k \in \mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie $n = kp + r,\ r \in \{0,1,2,\cdots,p-1\}$.

Avem $f(n) = pk^2 + (2r+1)k + \left[\frac{r(r+1)}{p}\right]$ și

$f(n+1) = pk^2 + (2r+3)k + \left[\frac{(r+1)(r+2)}{p}\right]$.

Pentru $k = 0$ trebuie să avem $f(n) < f(n+1)$, adică:

$\left[\frac{r(r+1)}{p}\right] < \left[\frac{(r+1)(r+2)}{p}\right]$.

Este necesar ca $p < (r+1)(r+2)$ pentru că altfel părțile întregi ar fi nule. Dacă de exemplu se ia $g = p^2$, atunci evident $f(n) < f(n+1)$ și f este strict crescătoare, deci injectivă.

136***. Evident funcția f este strict crescătoare ca suma dintre o funcție strict crescătoare și una crescătoare, deci este injectivă.

Deoarece șirul $\left[(a\sqrt{n})\right]_{n>0}$ este nemărginit și crescător, rezultă că există $m \in \mathbb{N}$, astfel încât $\left[a\sqrt{m}\right] < \left[a\sqrt{m+1}\right] \Rightarrow f(m+1) \geq f(m) + 2$ deci funcția nu poate lua valoarea $f(m) + 1$, prin urmare este nesurjectivă.

137. a) f nu este injectivă $f(m^2) = \{\sqrt{m^2}\} = 0, \forall\, m \in \mathbb{N}^*$; f nu este surjectivă. Oricare ar fi $y \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ nu este imagine a nici unui număr natural.

Într-adevăr, fie $y \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$, dacă ar exista $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(n) = y \Leftrightarrow \sqrt{n} - \left[\sqrt{n}\right] = y \Rightarrow \sqrt{n} = y + \left[\sqrt{n}\right] \in \mathbb{Q}$, fals (întrucât f nu este surjectivă).

b) Evident $g(0) = 0$. Arătăm că $\forall\, y \in (0,2) \cap \mathbb{Q}$ nu este imagine a niciunui număr natural, adică $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow g(n) \notin \mathbb{Q}$.

Avem $g(n) = \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - \left[\sqrt{n}\right] - \left[\sqrt{n+1}\right]$, dar $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ $\Rightarrow g(n) \notin \mathbb{Q}$.

c) Considerăm restricția $h: \mathbb{N} - \{k^2, k \in \mathbb{N}\} \to (0,1)$ cu $h(n) = f(n) = \{\sqrt{n}\}$. Arătăm că h este injectivă. Într-adevăr, oricare ar fi $n \neq m$ și $n, m \in \mathbb{N} - \{k^2, k \in \mathbb{N}\}$, rezultă $h(n) = h(m)$.

Dacă $h(n) = h(m) \Leftrightarrow \sqrt{n} - \left[\sqrt{n}\right] = \sqrt{m} - \left[\sqrt{m}\right] \Rightarrow \sqrt{n} - \sqrt{m} =$ $= \left[\sqrt{n}\right] - \left[\sqrt{m}\right] \in \mathbb{Q}$, ori $\sqrt{n} - \sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$.

Considerăm două situații:

$\alpha.\ mn = k^2$, dar m și n nu sunt pătrate perfecte atunci

$$\sqrt{n} - \sqrt{\frac{k^2}{n}} = \sqrt{n} - \frac{k}{\sqrt{n}} = \frac{n-k}{\sqrt{n}} \notin \mathbb{Q}.$$

$\beta.\ mn \neq k^2$, atunci $\sqrt{m} - \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. Presupunem prin absurd că

Scanned with OKEN Scanner

$\sqrt{n}-\sqrt{m}=a\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{nm}=\dfrac{n+m-a^2}{2}\in\mathbb{Q}$, fals.

Prin urmare h este injectivă. Restricția $h:A\subset\mathbb{N}\to B\subset(0,1)$.

Nu există B interval, deoarece $f(n)$ nu ia valori raționale în $(0,1)$.

Gh. Andrei

138. Avem $[f(x)]=[x]+a[x]+b[2x]=(a+1)[x]+b[2x]$
și $[2f(x)]=[2x]+2a[x]+2b[2x]=(1+2b)[2x]+2a[x]$.
Calculăm $f(f(x))=f+a[f]+b[2f]=$
$x+a[x]+b[2x]+a(a+1)[x]+ab[2x]+b(1+2b)[2x]+2ab[x]=$
$=x+[2x][2b+ab+2b^2]+[x](a^2+2a+2ab)$,
deci se impune ca $2b^2+ab+2b=0$ și $a^2+2a+2ab=0$,
$\begin{cases}b(2b+a+2)=0\\a(a+2b+2)=0\end{cases}\Rightarrow(a,b)\in\{(0,0)(-2,0)(0,-1)\}$.

139*.** Pentru $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(x)=-7x+1$ și pentru $x\in[0,1)\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)=-7x+1$. Prin urmare, pentru $x\in\mathbb{R}\Rightarrow x=[x]+\{x\}$ și avem
$7f(x)-63x=16(-7[x]+1)+16(-7\{x\}+1)-25\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)=-7x+1$ care este strict descrescătoare și bijectivă, ceea ce implică că g este strict crescătoare și bijectivă.
Se știe că dacă $f(x)=ax+b$, atunci $f^{(n)}=\underbrace{f\circ f\cdots\circ f}_{n\text{ ori}}=$

$$=a^nx+b^{n-1}(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})=\begin{cases}x+xb & ,\ a=1\\ a^nx+b\dfrac{a^n-1}{a-1}, & a\neq1\end{cases}.$$

În cazul dat $f^{(n)}(x)=(-7)^nx+\dfrac{(-7)^n-1}{-8}=(-7)^nx+\dfrac{1-(-7)^n}{8}$.
Prin urmare, pentru n par, $f^{(n)}(x)$ este strict crescătoare, iar pentru n impar este strict descrescătoare.
„Festivalul internațional de matematică și informatică", Piatra-Neamț, 2010

140*.** Dacă $a\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Fie $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\{a_1^2+bx_1\}=$
$=\{ax_2^2+bx_2+c\}\Rightarrow(a_1^2+bx_1)-(ax_2^2+bx_2+c)\in\mathbb{Z}\Rightarrow$
$\Rightarrow(x_1-x_2)(a)(x_1+x_2)+b\in\mathbb{Z}$, unde $a(x_1+x_2)\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\Rightarrow$
$a(x_1+x_2)+b\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\Rightarrow n-m=0\Rightarrow x_1=x_2$.
Prin urmare f injectivă.
Reciproc: dacă f este injectivă, considerăm cazul $a=0\Rightarrow f(x)=\{bx+c\}$.
Dacă $b\in\mathbb{Q}$, atunci pentru $b\equiv0\Rightarrow f(x)=\{c\}$ nu este injectivă, iar dacă
$b\in\mathbb{Q}^*\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{b}\right)=f\left(\dfrac{2}{b}\right)=\{c\}$ și nici în acest caz funcția nu este injectivă.

Fie $a\in\mathbb{Q}^*$ și $b\in\mathbb{Q}$ atunci $f\left(-\dfrac{b}{2a}-1\right)=f\left(-\dfrac{b}{2a}+1\right)=\left\{a+1-\dfrac{b^2}{4a}\right\}$

Scanned with OKEN Scanner

și cum $\frac{-b}{2a}-1\neq\frac{-b}{2a}+1\Rightarrow f$ neinjectivă. Așadar rezultă $b\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Concurs Croația, 1998

141***. Evident $a\neq 0,\ b\neq 0$. Dacă cel puțin unul dintre numerele a sau b este nul, atunci f nu este bijectivă.
Considerăm implicația $a^2=b^2\neq 0\Leftrightarrow b\neq a$.
Dacă $b=a\Rightarrow f(x)=a([x]+\{x\})=ax$ care este bijectivă.
Dacă $b=-a\Rightarrow f(x)=a([x]-\{x\})=-a(x-2[x])\equiv -ag(x)$, unde $g(x)=x-2[x]$ este bijectivă (vezi un exercițiu precedent) și deci $f(x)=-ag(x)$ este bijectivă.
Reciproc, f bijectivă, deci injectivă, rezultă
$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow a([x_1]-[x_2])=b(\{x_2\}-\{x_1\})\Rightarrow$
$\Rightarrow\frac{a}{b}([x_1]-[x_2])=(\{x_2\}-\{x_1\})\Rightarrow\left|\frac{a}{b}\right|[x_1]-[x_2]=\{x_2\}-\{x_1\}=1\Rightarrow$
$\Rightarrow\left|\frac{a}{b}\right|=1<|a|=|b|\Leftrightarrow a^2=b^2$.

Ion Nedelcu, L.S., 2016

142***. Pentru $a>0$ avem $f(1)=f\left(\frac{1}{1+a}\right)$, f neinjectivă.
Pentru $a=0\Rightarrow f(x)=x\Rightarrow f$ injectivă (chiar bijectivă). Pentru $a<-2$, fie $a=-b^2\left(b>\sqrt{2}\right)\Rightarrow f(x)=x-b^2\{x\}\Rightarrow f\left(\frac{b^2}{b^2-1}\right)=0=f(0)\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ neinjectivă.
Pentru $a=-2\Rightarrow f(x)=x-2\{x\}=-x+2[x]$ și $f\circ f=1_{\mathbb{R}}\Rightarrow f$ bijectivă.
Pentru $a=1\Rightarrow f(x)=x-\{x\}=[x]\Rightarrow f$ neinjectivă.
Rămâne să cercetăm cazurile $a\in(-1,0)$ și $a\in(-2,-1)$.
Pentru $a\in(-1,0)$, fie $b=-a\in(0,1)\Rightarrow f(x)=x-b\{x\}=(1-b)x+$
$+b[x]$.
Fie $f(x)=f(y)\Rightarrow(1-b)x+b[x]=(1-b)y+b[y]\Rightarrow(1-b)(x-y)=$
$=b([y]-[x])$, unde cei doi membri au semne diferite și $x=y\Rightarrow$
f injectivă. Fie $a\in(-2,-1)$ iar $b=-a\in(1,2)$.
Atunci, cum $f(x)=x-b\{x\}=(1-b)x+b[x]$, din $f(x)=f(y)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(1-b)x+b[x]=(1-b)y+b[y]\Rightarrow(1-b)(x-y)=b\big[[y]-[x]\big]$.
Să presupunem că $x\geq y$ și $[x]-[y]=n\in\mathbb{N}$ atunci:
$x-y=\frac{bn}{b-1}=n+\frac{n}{b-1}$ și cum $b\in(1,2)\Rightarrow\frac{1}{b-1}>1\Rightarrow$
$\Rightarrow x=y+n+\frac{n}{b-1}\geq y+2n$.
Pentru $n\neq 0\Rightarrow[x]=[y]+n$ și $x\geq y+2n$ sau $[x]\geq[y]+2n>[y]+n$, absurd. Prin urmare $n=0\Rightarrow[x]=[y]\Rightarrow x=y\Rightarrow f$ injectivă.
Prin urmare f injectivă dacă: $a\in[-2,-1)\cup(-1,0]$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru $b \in (0,1) \Leftrightarrow a \in (-1,0)$.

Fie $f(x) = x - b\{x\} \equiv [x] + (1-b)\{x\} \Rightarrow \{f(x)\} = (1-b)\{x\}$.

Căutăm o funcție g astfel încât $g \circ f = 1_{\mathbb{R}}$ și $g = x - \beta\{x\}$, atunci:

$g(f(x)) = f - \beta\{f\} = x - b\{x\} - \beta(1-b)\{x\} = x - \{x\}(b + \beta(1-b))$,

pentru $\beta = \frac{-b}{1-b}$, atunci $g(x) = x + \frac{b}{1-b}\{x\} = f^{-1}(x)$.

Așadar pentru $a \in (-1,0) \Leftrightarrow b \in (0,1)$ f este bijectivă, dar și pentru $a \in \{0,-2\} \Rightarrow a \in [-1,0] \cup \{-2\}$. Fie $m \in \mathbb{R}$ și $a \in (-2,-1)$ și ecuația $f(x) = m$. Într-adevăr $x + a\{x\} = m \Rightarrow (1+a)x - a[x] = m \Rightarrow -a[x] = m - (1+a)x$.

Reprezentând grafic funcțiile $g(x) = -a[x]$ și $h(x) = m - (1+a)x$, cele două grafice se intersectează.

143***. a) Trebuie să determinăm punctele $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) = x \Leftrightarrow 2[3x] - 3[2x] = 0$ (1).

Observăm că toate numerele întregi sunt puncte fixe. Vom determina și alte puncte fixe. Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}$ și $t \in [0,1)$ atunci (1) devine: $2[3(k+t)] = 3[2(k+t)] \Leftrightarrow 2[3t] = 3[2t]$ (2).

Considerăm $t \in \left[\frac{k}{6}, \frac{k+1}{6}\right), k = (0,1,2,3,4,5)$ rezultă că pentru

$t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow 0 < 3t < 1 \Rightarrow [3t] = 0$ și $0 < 2t < \frac{2}{3} \Rightarrow [2t] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow f(k+t) = k + t.$

Prin urmare, mulțimea punctelor fixe este:

$M_{k,t} = \left\{k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in \left[0, \frac{1}{3}\right)\right\}$ care include și mulțimea numerelor întregi

$M_{k,t} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} k, \left[\frac{3k+1}{3}\right)$.

b) Vom căuta o funcție $g(x) = x + m[2x] + n[3x]$ astfel încât $g(f(x)) = x, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Avem $g(f(x)) = f(x) + m[2f(x)] + n[3f(x)]$, dar, cum $[2f(x)] = 4[3x] - 5[2x]$ și $[3f(x)] = 7[3x] - 9[2x]$ rezultă

$g(f(x)) = x - 3[2x] + 2[3x] + 4m[3x] - 5m[2x] + 7n[3x] - 9n[2x] =$

$= x + (4m + 7n + 2)[3x] - [2x](5m + 9n + 3)$.

Impunând și $\begin{cases} 4m + 7n + 2 = 0 \\ 5m + 9n + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow n = -2, m = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = x + 3[2x] - 2[3x]$ și pentru care $g \circ f = f \circ g = 1_{\mathbb{R}}$.

Prin urmare f este bijectivă $f^{-1}(x) = g(x) = x + 3[2x] - 2[3x]$.

Marius Burtea, G.M. (Supliment) nr. 3/2015

Scanned with OKEN Scanner

144**. Presupunem prin absurd că există $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ injectivă astfel încât: $3f(x^3)=[f(x)]^3+2, \forall\, x\in\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} x=0\Rightarrow 3f(0)=[f(0)]^3+2 \\ x=1\Rightarrow 3f(1)=[f(1)]^3+2 \\ x=-1\Rightarrow 3f(-1)=[f(-1)]^3+2 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0), f(1), f(-1) \text{ sunt soluţii ale}$$

ecuaţiei $t^3-3t+2=t^2-t-2t+2=0\Leftrightarrow t(t^2-1)-2(t-1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t-2)-0\Leftrightarrow (t-1)(t-1)(t+2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(t+2)=0 \begin{array}{l} \nearrow t_1=t_2=1 \\ \searrow t_3=-2 \end{array}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(0), f(1), f(-1)\in\{-2,1\}\Rightarrow$ contradicţie cu f injectivă.

145. Pentru $n=1\Rightarrow f(1)=\left[\frac{f(1)}{2}\right]$. Dar cum ecuaţia $x=\left[\frac{x}{3}\right]$, adică $x\in(-2,0]$ şi cum $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-1,0\}$), deci $f(1)\in\{-1,0\}$.

Dacă $f(1)=0\Rightarrow f(2)=\left[\frac{f(1)}{2}\right]+\left[\frac{f(2)}{3}\right]=\left[\frac{f(2)}{3}\right]\Rightarrow f(2)=0$, deci f neinjectivă.

Atunci fie $f(1)=-1\Rightarrow f(2)=\left[\frac{f(1)}{2}\right]+\left[\frac{f(2)}{3}\right]=-1+\left[\frac{f(2)}{3}\right]$ şi după calcule rezultă $f(2)\in\left(-3,-\frac{3}{2}\right]$ şi cum $f(2)\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(2)=-2$.

Procedăm prin inducţie. Presupunem că $f(k)=-k$. Avem

$$f(k+1)=\left[\frac{-1}{2}\right]+\left[\frac{-2}{3}\right]+\left[\frac{-3}{4}\right]+\cdots+\left[\frac{-k}{k+1}\right]+\left[\frac{f(k+1)}{k+2}\right]=$$

$$=-k+\left[\frac{f(k+1)}{k+2}\right]\Rightarrow f(k+1)+k=\left[\frac{f(k+1)}{k+2}\right]\in\mathbb{Z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(k+1)+k\le\frac{f(k+1)}{k+2}<f(k+1)+k+1\Rightarrow (k+2)f(k+1)+k^2+$$

$+2k\le f(k+1)<(k+2)f(k+1)+(k+1)(k+2)$ de unde rezultă $f(k+1)+k^2+2k+1\le 1$ şi $0<(k+1)f(k+1)+(k+1)(k+2)\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(k+1)\le -k-1+\frac{1}{k+1} \text{ şi } f(k+1)>-k-2\Rightarrow f(k+1)=$$

$=-k-1$. Aşadar $f(n)=-n, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Marius Burtea, O.L. Teleorman, 2013

146***. a) Fie funcţia bijectivă $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, atunci $f(g(x))=g\left(\left[\frac{x}{3}\right]\right)$ este funcţia cerută. Mai mult, cum există o mulţime infinită (chiar nenumărabilă) de funcţii bijective g, atunci există o infinitate de funcţii cu proprietatea (P).

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ este descrescătoare, atunci există $x_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(x)=f(x_0),\forall\, x\geq x_0$, ceea ce contrazice ipoteza.
Dacă f este crescătoare, atunci
$f(0)=f(1)=f(2)=0;\ f(3)=f(4)=f(5)=1;\ \cdots$
și $f(3k)=f(3k+1)=f(3k+2)=k,\forall\, k\in\mathbb{N}$. Așadar $f(x)=\left[\frac{x}{3}\right]$;

c) Dacă $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ este monotonă, atunci pentru $a,b\in\mathbb{Q}$ cu $a<b$ avem $f(a)=f(b)$, rezultă că oricare ar fi $g\in(0,b)\cap\mathbb{Q}$, avem $f(g)=f(a)$ și deci f nu are proprietatea (P).
Așadar, nu există astfel de funcții.

Mihai Piticari, O.J, 2007

147***. Notăm $a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}$.
Presupunem că există $m\neq n$ astfel încât $g(n)=g(m)$ și fie $n<m$.
Atunci $g(n)=g(m)\Rightarrow\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}=\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right\}\Rightarrow$
$\Rightarrow 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-[a_n]=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-[a_m]\Rightarrow$
$\Rightarrow E_{n,m}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m}\in\mathbb{N}$, absurd $(*)$.
Deoarece cel mai mare divizor număr prim al numerelor cuprinse între $n+1$ și n, fie acesta d, atunci după aducerea la același numitor și făcând suma numărătorilor rezultă că toți termenii sunt divizibili la d, mai puțin unul dintre ei, iar numitorul este divizibil la d. Așadar fracția nu se poate simplifica prin d.
Așadar, $E_{n,m}\notin\mathbb{N}$. Prin urmare $m=n$. Fie $r\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap(0,1)$, atunci oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$ $g(n)=r$.
Într-adevăr, dacă există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $g(n)=r\Leftrightarrow a_n-[a_n]=r$, dar $a_n\in\mathbb{Q}\Rightarrow r\in\mathbb{Q}$, contradicție.

Ion Savu

148***. Avem $f(x)=[x]-\left\{x+\frac{1}{2}\right\}=[x]-\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left[x+\frac{1}{2}\right]=$
$=[x]-\left[x+\frac{1}{2}\right]-x-\frac{1}{2}=[2x]-x-\frac{1}{2}$.
Fie $x,y\in\mathbb{R}$ cu $f(x)=f(y)\Rightarrow[2x]-[2y]=x-y=k\in\mathbb{Z}\ \ (1)\Rightarrow$
$\Rightarrow x=y+k\Rightarrow[2x]=[2y]+k\ \ (2)$.
Din (1) și (2) rezultă $k=0\Rightarrow x=y$, deci f este injectivă.
Fie $p\in\mathbb{Z}$ și $x\in\left[\frac{p}{2},\frac{p+1}{2}\right)\Rightarrow[2x]=p\Rightarrow f(x)=p-x-\frac{1}{2}=-x+\frac{2p-1}{2}$,

Scanned with OKEN Scanner

dar cum $x \in \left[\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}\right), f(x) = -x + \frac{2p-1}{2} \in \left[\frac{p-2}{2}, \frac{p-1}{2}\right)$.

Fie $y \in \mathbb{R}$, atunci există un $p \in \mathbb{Z}$, unic, astfel încât $\frac{p-2}{2} < y < \frac{p-1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -y + \frac{2p-1}{2}$ cu $x \in \left[\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}\right)$ și $f(x) = y$, rezultă f surjectivă (se poate calcula $f \circ f \Rightarrow$ bijectivă$\Rightarrow f$ bijectivă).

O.L. Constanța, 2017

149***. Dacă f satisface proprietatea (P), vom arăta că $f(1) = n$.

Într-adevăr dacă ar exista $k \geq 2$ astfel încât $f(k) = n \Rightarrow g(k) = f(1) +$

$+f(2) + \cdots + f(k-1) + n - n\left[\frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(k-1) + n}{n}\right] =$

$= f(1) + f(2) + \cdots + f(k-1) + n - n\left[\frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(k-1)}{n} + 1\right]$

$= g(k-1)$, contradicție cu g injectivă. Prin urmare, rezultă $f(n) = n$ și $g(1) = 0$.

Dacă n ar fi impar, din $g(n) = \frac{n(n+1)}{2} - n\left[\frac{n+1}{2}\right] \Rightarrow g(n) = 0 = g(1)$, contradicție. Așadar, n este par.

Reciproc, arătăm că $f: \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$,

$f(k) = \begin{cases} n+1-k, k \text{ impar} \\ k-1, \quad k \text{ par} \end{cases}$, unde n este par, nenul și are proprietatea (P).

Pentru orice $k = \overline{1, \frac{n}{2}}$ avem $f(1) + f(2) + \cdots + f(2k-1) = k(n-1) + 1$ și $f(1) + f(2) + \cdots + f(2k) = k(n+1)$, deci $g(2k-1) = k(n-1) + 1 -$

$-n\left[\frac{kn-(k-1)}{n}\right] = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ n-k+1, & k \geq 2 \end{cases}$ și $g(2k) =$

$= k(n+1) - n\left[\frac{k(n+1)}{n}\right] = k$. Se dovedește ușor că g este bijectivă.

Emil Vasile, Concursul „Nicolae Coculescu", 2011

150***. <u>Soluția 1</u>

a) Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(p) = f(q) \Leftrightarrow$

$\left[p + \sqrt{p} + \frac{1}{2}\right] = \left[q + \sqrt{q} + \frac{1}{2}\right] \Rightarrow |p - q + \sqrt{p} - \sqrt{q}| < 1$.

Dacă $p > q \Rightarrow p - q \geq 1$ și $\sqrt{p} - \sqrt{q} > 0 \Rightarrow p - q + \sqrt{p} - \sqrt{q} \geq 1$, contradicție.

Analog, dacă $p < q$ se obține tot o contradicție. Prin urmare $p = q$ și f este injectivă.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $n \geq 1 \Rightarrow n+\sqrt{n}+\frac{1}{2} \geq 2+\frac{1}{2}$, deci $f(n) \geq 2$.

Așadar $1 \notin \text{Im}f$ și f nu este surjectivă.

b) Pentru ca f să fie surjectivă, trebuie ca $\text{Im}f = A$. De remarcat că dacă $p, q \in \mathbb{N}$ cu $p < q \Rightarrow f(p) \leq f(q)$ și cum f este injectivă, rezultă că f este strict crescătoare. Prin urmare $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n+1) - f(n) \geq 1$.

Căutăm $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(n+1) - f(n) \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right] - \left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] \leq 1.$

Notăm cu $u_n = \sqrt{n}+\frac{1}{2} \Rightarrow f(n+1) - f(n) \leq 2 \Leftrightarrow [u_{n+1}] - [u_n] \leq 1.$

Avem $0 < u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 1 \Rightarrow [u_{n+1}] - [u_n] \leq 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Așadar, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, avem $f(n+1) - f(n) \in \{1,2\}$. Căutăm $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(n+1) = f(n) + 2$ și $\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right] - \left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] = 1.$

Dacă $\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right] = k \Rightarrow \left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] = k-1 \Rightarrow k \geq 2$. Obținem:

$$\begin{cases} k \leq \sqrt{n+1}+\frac{1}{2} < k+1 \\ k-1 \leq \sqrt{n}+\frac{1}{2} < k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(k-\frac{1}{2}\right)^2 \leq n+1 < \left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \\ \left(k-\frac{3}{2}\right)^2 \leq n < \left(k-\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \geq k^2-k \\ n \leq k^2-k \end{cases}$$

Așadar, $f(n+1) = f(n) + 2 \Rightarrow n = k(k-1)$.

Pentru celelalte valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$ avem $f(n+1) = f(n) + 1$.

Deducem că $f(1) = 2, f(1,2) = 3, f(1,2+1) = 5$.

Se demonstrează prin inducție că:

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, p \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} f(p^2-p) = p^2-1 \\ f(p^2-p+1) = p^2+1 \\ f(p^2-p+2) = p^2+2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases},$$

deci $f(p^2+p-1) = (p+1)^2-2$, $\text{Im}f = \mathbb{N}^* - \{m^2 | m \in \mathbb{N}^*\} = A$.

Concursul „Traian Lalescu", 2003

Soluția 2

Avem $f(n+1) - f(n) = 1 + \left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right] - \left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow f(n+1) = f(n) \in \{1,2\}$ $(*) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(n+1) > f(n)$, deci strict crescătoare, este injectivă.

Scanned with OKEN Scanner

(Întrucât diferența $\left(\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right)-\left(\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<\frac{1}{2}$ atunci rezultă $(*)$.)

Arătăm că $f(n)$ reprezintă al n-lea număr care nu este pătrat perfect. Este suficient să demonstrăm echivalența: $f(n+1)-f(n)=2 \Leftrightarrow 1+f(n)$ este pătrat perfect. Prin urmare trebuie să existe $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care

$\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]=k$ și $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=k-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4k^2-4k-3<4n<4k^2-4k+1 \Rightarrow n=k^2-k \Rightarrow$

$\Rightarrow f(n)=k^2-k+k-1=k^2-1 \Rightarrow 1+f(n)=k^2,$

pătrat perfect, deci printre valorile lui f nu se află pătrate perfecte, deci f nu este surjectivă.

b) Considerăm $A=\mathbb{N}^*-\{1,2^2,3^2,\cdots\}$.

Concursul „Traian Lalescu", 2003

151***. a) Fie $x \in A$ și $k=[x]$ și $[x]^3=k^3$, deci $k^3 \leq x^3 \leq k^3+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \leq x<\sqrt[3]{k^3+1}$, prin urmare $A \subset B=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[k,\sqrt[3]{k^3+1}\right]$.

Reciproc, dacă $x \in B$ și $k \in \mathbb{Z}$, cu $k \leq x<\sqrt[3]{k^3+1} \Rightarrow k \leq x<k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^3 \leq x^3<k^3+1$, deci $[x^3]=k^3=[x]^3$. Obținem $B \subset A$ deci $B=A$.

b) Fie $k \in \mathbb{Z}$ și $a,b \in \mathbb{R}$ cu $a<b$. Fie $g:[a,b) \to [k,k+1)$, $g(x)=px+g$, impunem $g(a)=k, g(b)=k+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow pa+q=k, pb+q=k+1 \Rightarrow p=\frac{1}{b-a}$ și $q=k-\frac{a}{b-a}$.

Deoarece g – bijectivă, $g(b)=k+1$, rezultă funcția $f:[a,b) \to [k,k+1)$,

cu $f(x)=\frac{1}{b-a}x+k-\frac{a}{b-a}$ este bijectivă.

Definim $f_k:\left[k,\sqrt[3]{k^3+1}\right) \to [k,k+1)$,

$f_k(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{k^3+1}-k}x+k-\frac{k}{\sqrt[3]{k^3+1}-k}$.

Deoarece $A=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[k,\sqrt[3]{k^3+1}\right)$ și $\mathbb{R}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[k,k+1)$ și f_k bijectivă,

rezultă că funcția $F:A \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x)=f_k(x)$,

$\forall x \in \left[k,\sqrt[3]{k^3+1}\right)$ este bijectivă.

c) Nu există o astfel de funcție deoarece card $\mathbb{Q}<$ card $\mathbb{R}=$ card A.

Costel Chites, Cristian Alexandreescu, O.L. București, 2005

Scanned with OKEN Scanner

152. Pentru $n=0 \Rightarrow \left[\frac{f(0)}{2}\right] \equiv \left[\frac{f(1)}{2}\right] = 0$ și deci $\{f(0), f(1)\} = \{0,1\}$.

Pentru $n=1 \Rightarrow \left[\frac{f(1)}{2}\right] + \left[\frac{f(2)}{2}\right] = 1 \Rightarrow f(2) \in \{2,3\}$.

Pentru $n=2 \Rightarrow \left[\frac{f(2)}{2}\right] + \left[\frac{f(3)}{2}\right] = 2 \Rightarrow f(3) \in \{2,3\}, \{f(2), f(3)\} = \{2,3\}$.

Prin inducție se arată că $\{f(2k), f(2k+1)\} = \{2k, 2k+1\}$. Pentru $n = 2k+1$ se obține: $\left[\frac{f(2k+2)}{2}\right] = k+1 \Rightarrow f(2k+2) \in \{2k+2, 2k+3\}$, iar pentru $n = 2k+2$, din relația din enunț rezultă $f(2k+3) \in \{2k+2, 2k+3\} \Rightarrow \{f(2k+2), f(2k+3)\} = \{2k+2, 2k+3\}$.

Prin urmare, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem $\{f(2n), f(2n+1)\} = \{2n, 2n+1\}$.

Așadar, există o infinitate de funcții cu proprietatea cerută.

Avem de exemplu funcțiile $f(n) = n$ sau $f(n) = n + (-1)^n$ etc.

153. Notăm cu $f(x) = [x] + [2x] + [3x] + [4x]$ și din $x = [x] + \{x\}$ rezultă $f(x) = 10[x] + [2\{x\}] + [3\{x\}] + [4\{x\}]$.

Dar $[2\{x\}] = \begin{cases} 0, & 0 \le \{x\} < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le \{x\} < 1 \end{cases}$;

$[3\{x\}] = \begin{cases} 0, & 0 \le \{x\} < \frac{1}{3} \\ 1, & \frac{1}{3} \le \{x\} < \frac{2}{3} \\ 2, & \frac{2}{3} \le \{x\} < 1 \end{cases}$ și

$[4\{x\}] = \begin{cases} 0, & \{x\} \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \\ 1, & \{x\} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\ 2, & \{x\} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ 3, & \{x\} \in \left[\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases}$.

Considerăm diviziunea $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1$ și intervalele $\left[0, \frac{1}{4}\right); \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right); \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right); \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right); \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right); \left[\frac{3}{4}, 1\right)$; atunci se obțin valorile posibile:

Scanned with OKEN Scanner

$$f(x)=\begin{cases}10[x], & x\in\left[0,\frac{1}{4}\right)\\ 10[x]+1, & x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)\\ 10[x]+2, & x\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\\ 10[x]+4, & x\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\\ 10[x]+5, & x\in\left[\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)\\ 10[x]+6, & x\in\left[\frac{3}{4},1\right)\end{cases}$$

adică exact numerele care au ultima cifră 0,1,2,4,5,6.
Aşadar vom avea în total 1209 numere.

154***. Fie $c=0$ şi $a\geq d$, arătăm că f este injectivă. Avem:

$f(x)=\left[\frac{ax+b}{d}\right]$ şi $f(x+1)=\left[\frac{ax+b}{d}+\frac{a}{d}\right]\geq\left[\frac{ax+b}{d}+1\right]\geq f(x)+1\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\mathbb{N}^*$ şi f este injectivă.
Reciproc, presupunem că f este injectivă şi mai presupunem că $c\neq 0$.

Avem $f(x)=\left[\frac{ax+b}{d}\right]=\left[\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}\right]\leq\left[\frac{a+b}{c}\right]\in\mathbb{N}$, şi prin urmare f ia un număr finit de valori (f injectivă), absurd. Deci, $c=0$.

Dacă $a<d$, atunci $f(x)=\left[\frac{ax+b}{d}\right]$ şi din

$f(x+1)=\left[\frac{ax+b}{d}+\frac{a}{d}\right]\geq\left[\frac{ax+b}{d}\right]=f(x),\forall\, x\in\mathbb{N}^*,$

rezultă că f este crescătoare şi cum este şi injectivă rezultă că f este strict crescătoare, deci $f(x+1)>f(x)\geq 2+f(x-1)\geq\cdots\geq x+f(1)\geq x$,

$\forall\, x\in\mathbb{N}\Rightarrow f(x)\geq x-1,\forall\, x\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\left[\frac{ax+b}{d}\right]\geq x-1\Rightarrow\frac{ax+b}{d}\geq x-1,$

$\forall\, x\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow x\left(1-\frac{a}{d}\right)\leq 1+\frac{b}{d},\forall\, x\in\mathbb{N}^*\Rightarrow x\leq\frac{1+\frac{b}{d}}{1-\frac{a}{d}}$, absurd.

Prin urmare $a\geq d$.

Marcel Chiriţă, Mihai Piticari, O.N., 1987

155*. Evident dacă $m=0$ funcţia este bijectivă.

a) Vom explicita funcţia f şi avem:

Scanned with OKEN Scanner

$$f(x)=\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x-2m, & x\in[-2,-1) \\ x-m, & x\in[-1,0) \\ x, & x\in[0,1) \\ x+m, & x\in[1,2) \\ x+2m, & x\in[2,3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x+km, & x\in[k,k+1) \end{cases}$$

Din grafic rezultă că pentru $m>0, f$ este injectivă și nesurjectivă și la fel pentru $m<-2$.

Pentru $m=-1, f$ este periodică, deci neinjectivă și nesurjectivă.

Pentru $m\in(-2,-1)\cup(-1,0)$ este surjectivă și neinjectivă.

Pentru $m\in\{-2,0\}$ este bijectivă.

Gh. Andrei, O.L., 1996

156**. $f(n)=n\sum_{k=1}^{m}r_k-\sum_{k=1}^{m}[r_kn]=\sum_{k=1}^{m}(nr_k-[nr_k])=\sum_{k=1}^{m}\{r_kn\}\geq 0.$

Pentru $n=0\Rightarrow f(0)=0$ și $f(n)=\sum_{k=1}^{m}\{r_kn\}<m$, dar cum $f(n)$ este număr întreg, rezultă $f(n)\leq m-1\Rightarrow f_{max}=m-1$.

Olimpiadă Canada, 1995-1996

157***. Arătăm că $h(n)>h(n+1)$ dacă $n+1=m^2, m\in\mathbb{N}^*$. Într-adevăr

$$h(n)=\left[\frac{m^2-1}{m-1}\right]=m+1 \text{ și } h(n+1)=\left[\frac{m^2}{m}\right]=m.$$

Dacă $n=m^2+d\ \ 0\leq d\leq 2m$, atunci

$$h(n)=\left[\frac{m^2+d}{\sqrt{m^2+d}}\right]=\left[\frac{m^2+d}{m}\right]=m+\left[\frac{d}{m}\right].$$

Concurs Anglia, 1995-1996

158***. Fie tripletele de numere naturale (a_1,a_2,a_3) și (b_1,b_2,b_3) astfel încât: $a_1^2+b_1^2\leq p_1, a_2^2+b_2^2\leq p_2, a_3^2+b_3^2\leq p_3$ (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)\leq p_1p_2p_3$ (2), dar

$(a_1a_2+b_1b_2)^2+(a_2b_1-a_1b_2)^2\leq(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)=p_1p_2$ (3).

Din (1) și (3) $\Rightarrow (a_3^2+b_3^2)((a_1a_2+b_1b_2)^2+(a_2b_1-a_1b_2)^2)\leq p_1p_2p_3$(4), dar membrul stâng al inegalității (4) se minorează conform inegalității lui C.B.S. astfel $[a_3(a_1a_2+b_1b_2)+b_3(a_2b_1-a_1b_2)]^2\leq p_1p_2p_3\Rightarrow$

$\Rightarrow |a_1a_2a_3+a_3b_1b_2+a_2b_1b_3-a_1b_2b_3|\leq\sqrt{p_1p_2p_3}$ (5) cu condiția $b_1b_2a_3\geq a_1b_2b_3$ care se îndeplinește pentru $b_1\geq a_1$ și $a_3\geq b_3$.

Rezultă $a_1a_2a_3+b_1b_2a_3+a_2b_1b_3-a_1b_2b_3\leq[\sqrt{p_1p_2p_3}]$ (6) care este tocmai inegalitatea din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a_1^2+b_1^2\le p_1\ (\alpha)$ considerăm $b_1=[\sqrt{p_2}]\Rightarrow a_1\le\left[\sqrt{p_1-[\sqrt{p_1}]^2}\right]$,

unde se ia $a_1=\left[\sqrt{p_1-[\sqrt{p_1}]^2}\right]$, care verifică (α).

Din $a_2^2+b_2^2\le p_2\ (\beta)$ se consideră $a_2=[\sqrt{p_2}]$ și $b_2=\left[\sqrt{p_2-[\sqrt{p_2}]^2}\right]$

care verifică (β).

Din $a_3^2+b_3^2\le p_2\ (\gamma)$ se consideră $a_3=[\sqrt{p_3}]$ și $b_3=\left[\sqrt{p_3-[\sqrt{p_3}]^2}\right]$

care verifică (γ).

Atunci (6) devine: $g(p_1)f(p_2)f(p_3)+f(p_1)g(p_2)f(p_3)+$
$+f(p_1)f(p_2)g(p_3)\le f(p_1p_2p_3)+g(p_1)g(p_2)g(p_3)$.

Marius Drăgan

159***. Pentru diferite valori ale lui n avem

$$\begin{cases}f(3k-1)=2f(2k-1)\\ f(3k)=f(2k)+f(2k-1)\quad(1).\\ f(3k+1)=2f(2k)\end{cases}$$

Calculând diferite valori obținem $f(2)=2, f(3)=3, f(4)=4, f(5)=6,$
$f(6)=7, f(7)=8, f(8)=12, f(9)=13, f(10)=14, f(11)=16.$

Din (1) se obține:

$f(3k)-f(3k-1)=f(2k)-f(2k-1),$

$f(3k+1)-f(3k)=f(2k)-f(2k-1),$

$f(3k+2)-f(3k+1)=2\big(f(2k+1)-f(2k)\big),$

de unde rezultă că trebuie repetată ultima relație. Vom obține un șir de numere naturale $n_0>n_1>n_2>\cdots>n_m$ pentru care rezultă egalitățile:

$f(n_0)-f(n_0-1)=2\big(f(n_1)-f(n_1-1)\big)=2^2\big(f(n_2)-f(n_2-1)\big)=$
$=\cdots=2^m\big(f(n_m)-f(n_m-1)\big)$, unde $n_0=3k+2, n_1=2k+1$ și se impune ca $2k+1\equiv 2(mod 3)$.

Așadar pentru $n_0=3^m-1\Rightarrow n_m=2^m-1$ și $f(3^m-1)-f(3^m-2)=$
$=2^m\big(f(2^m-1)-f(2^m-2)\big)$. Avem:

$f(8)-f(7)=4\big(f(3)-f(2)\big)=4<8,$

$f(26)-f(25)=8\big(f(7)-f(6)\big)=8<26,$

$f(80)-f(79)=16\big(f(15)-f(14)\big)=16<80,$

$f(242)-f(241)=32\big(f(31)-f(30)\big)=256<242.$

Așadar răspunsul este 242.

Concurs Anglia, 2012

Scanned with OKEN Scanner

160**. Fie $T > 0$ o perioadă a funcției, adică $f(x+T) = f(x), \forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{p(x+T) + \sin q\,(x+T)\} = \{p(x) + \sin q(x)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow p(x+T) + \sin q\,(x+T) - p(x) - \sin q(x) \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in \mathbb{R}.$
Cum funcția $g(x) = p(x+T) + \sin q\,(x+T) - p(x) - \sin q(x)$ este continuă, rămâne să arătăm că este constantă, adică $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $p(x+T) + \sin q\,(x+T) - p(x) - \sin q(x) = k, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Rezultă că $p(x+T) - p(x) - k = \sin q(x) - \sin q\,(x+T), \forall\, x \in \mathbb{R}$ și $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ de unde rezultă $p(x+nT) - p(x) - nk = \sin q(x) - \sin q\,(x+nT)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Pentru $x = 0 \Rightarrow |p(nT) - p(0) - nk| \leq 2, n \in \mathbb{N}$ de unde rezultă că P este un polinom de grad maxim egal cu 1, adică $P(x) = aX + b$ și $k = aT$.
Putem scrie $a(x+T) + \sin q(x+T) + b - ax - b - \sin q(x) = aT \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin q\,(x+T) - \sin q(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2 \sin \dfrac{q(x+T) - q(x)}{2} =$
$= \cos \dfrac{q(x+T) - q(x)}{2} = 0$. Dacă $\dfrac{q(x+T) - q(x)}{2}$ și $\dfrac{q(x+T) + q(x)}{2}$
nu sunt identic constante, atunci membrul stâng poate avea cel mult o mulțime numărabilă de zerouri, contradicție.
Rezultă deci că $q(x+T) - q(x) = 2k_1\Pi, \forall\, x \in \mathbb{R}$ și $k_1 \in \mathbb{Z}$ sau $q(x+T) + q(x) = 2k_2\Pi, \forall\, x \in \mathbb{R}$ și $k_2 \in \mathbb{Z}$.
În primul caz obținem că Q este un polinom de grad cel mult 1, adică $Q(x) = a_1X + b_1$ cu $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ și $a_1T = 2k_1\Pi$. În al doilea caz rezultă că $Q \equiv c$, caz inclus în primul.
Așadar $P = aX + b, Q = a_1X + b_1$, unde a și a_1 au proprietatea că există $T \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $aT, \dfrac{a_1T}{2\Pi} \in \mathbb{Z}$. Caz în care f este periodică.

Paul Georgescu, Gabriel Popa, R.M. nr. 1/2006

161**. Vom utiliza inegalitatea $0 \leq [a-b] \leq [a] - [b] \leq [a-b] + 1$, $\forall\, a \geq b \geq 0$ $(*)$ (vezi Cap. I). Avem $f(n) = [n\alpha] - [n\beta] \geq [n(\alpha - \beta)] >$
$> n(\alpha - \beta) - 1 \to \infty$, deci f este nemărginită. Din $f(0) = f(1) = 0, f(2) =$
$= f(3) = 1$ rezultă f neinjectivă.
Vom arăta că $f(n+1) \leq f(n) + 1$ $(**)$.
Într-adevăr, $f(n+1) - f(n) = [(n+1)\alpha] - [(n+1)\beta] - ([n\alpha] - [n\beta]) =$
$= ([(n+1)\alpha] - [n\alpha]) - ([(n+1)\beta] - [n\beta]) \leq [(n+1)\alpha - n\alpha] + 1 -$
$-[(n+1)\beta - n\beta] = [\alpha] + 1 - [\beta] = 1$. (S-a aplicat $(*)$ și $[\alpha] = [\beta]$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(n+a) \leq f(n) + 1$. Aplicând $(**)$ în mod repetat vom arăta că dacă există $n_k \in \mathbb{N}$ cu $f(n_k) = k$, atunci există $n_{k+1} > n_k$ astfel încât $f(n_{k+1}) = k+1$.
Avem $f(n_k + 1) \leq f(n_k) + 1 = k + 1$ și dacă $f(n_k + 1) = k + 1$ atunci $n_{k+1} = n_k + 1$, dar dacă $f(n_k + 1) < k + 1 \Rightarrow f(n_k + 1) \leq k$ și din $(**)$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă $f(n_k+2)=f(n_k+1+1)\leq f(n_k+1)+1\leq k+1$ și la fel dacă $f(n_k+2)=k+1$, atunci luăm $n_{k+1}=n_k+2$, dar dacă $f(n_k+2)<k+$ $+1\Rightarrow f(n_k+2)\leq k$ și aplicând în mod repetitiv (**) rezultă $f(n_k+m)\leq$ $\leq k+1$ (***), atunci dacă $f(n_k+m)<k+1\Rightarrow f(n_k+m)\leq k, \forall\, m\in\mathbb{N}$ și f este mărginită, fals. Prin urmare în (***) rezultă că există $m_k\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(n_k+m_k)=k+1$ și luând $n_{k+1}=n_k-m_k\Rightarrow f(n_k+1)=k+1$. Prin urmare, procedând prin inducție rezultă că $\forall\, k\in\mathbb{N}$, există $n_k\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(n_k)=k$. Avem deja $f(0)=f(1)=0$ și $f(2)=f(3)=1$, deci f este surjectivă.

Observație: funcțiile $g(n)=[n\sqrt{3}]-[n\sqrt{2}]$, $h(n)=[(e+1)n]-[n\pi]$ sunt surjective, unde $e,\pi\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ și $[e+1]=[\pi]=3$.

162**. La fel ca în exercițiul precedent utilizăm inegalitățile $0\leq[a-b]\leq[a]-[b]\leq[a-b]+1, \forall\, a,b\geq 0$ cu $a\geq b\geq 0$ (1).

a) Avem $g(n)=f(n+1)-f(n)=[(n+1)\sqrt{3}]+[(n+1)\sqrt{2}]-$ $-[n\sqrt{3}]-[n\sqrt{2}]=[(n+1)\sqrt{3}]-[n\sqrt{3}]+[(n+1)\sqrt{2}]-[n\sqrt{2}]$.

Aplicând (1) avem $[(n+1)\sqrt{3}-n\sqrt{3}]\leq[(n+1)\sqrt{3}]-[n\sqrt{3}]\leq$ $\leq[(n+1)\sqrt{3}-n\sqrt{3}]+1\Rightarrow[\sqrt{3}]\leq[(n+1)\sqrt{3}]-[n\sqrt{3}]<[\sqrt{3}]+1\Rightarrow$ $\Rightarrow 1\leq[(n+1)\sqrt{3}]-[n\sqrt{3}]\leq 2$ și analog $1\leq[(n+1)\sqrt{2}]-[n\sqrt{2}]\leq 2\Rightarrow$ $\Rightarrow 2\leq g(n)\leq 4\Rightarrow \mathrm{Im}g=\{2,3,4\}$ unde $g(0)=2, g(1)=3, g(2)=4$.

b) Presupunem prin absurd că $g(n)=3$ nu este adevărată pentru o infinitate de valori ale lui $n\in\mathbb{N}$, deci există $m\in\mathbb{N}$ astfel încât $g(n)\neq 3$, $\forall\, n\geq m$, adică $g(n)=2$ sau $g(n)=4, \forall\, n\geq m$ (2).

Notând $a(n)=[(n+1)\sqrt{3}]-[n\sqrt{3}]$ și $b(n)=[(n+1)\sqrt{2}]-[n\sqrt{2}]\Rightarrow$ $\Rightarrow g(n)=a(n)+b(n)$ (3), dar cum $1\leq a(n)\leq 2$ și $1\leq b(n)\leq 2$ rezultă că dacă $g(n)=2, \forall\ n\geq m$ atunci din (***) rezultă $a(n)=b(n)=1$, $\forall\, n\geq m$ sau $a(n)=b(n)=2, \forall\, n\geq m$ prin urmare $a(n)=b(n), \forall\, n\geq m$.

De asemenea, avem $[(n+1)\sqrt{3}]-[n\sqrt{3}]=[(n+1)\sqrt{2}]-[n\sqrt{2}]\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a(n)=b(n)\Rightarrow[(n+1)\sqrt{3}]-[(n+1)\sqrt{2}]=[n\sqrt{3}]-[n\sqrt{2}]$ (4), $\forall\, n\geq m$ și dacă notăm $h(n)=[n\sqrt{3}]-[n\sqrt{2}]$ atunci (4) devine $h(n+1)=$ $=h(n), \forall\, n\geq m$ și $h(m+1)=h(m)=p\in\mathbb{N}^*\Rightarrow h(n)=h(m)=p$, adică $h(n)$ este constantă, dar $h(n)=[n\sqrt{3}]-[n\sqrt{2}]$ și (în baza ex. 161) este surjectivă, contradicție. Așadar $g(n)=3$ este adevărată pentru o infinitate de valori ale lui $n\in\mathbb{N}$. În mod analog și $g(n)=2$ pentru o infinitate de valori și $g(n)=4$ pentru o infinitate de valori.

c) Nu este periodică.

Scanned with OKEN Scanner

163**. Avem $f(0)=0$ şi $f(a)=b$. Din $1\le k\le a\Rightarrow f(1)\le f(k)\le$ $\le f(a)=b$ (1) şi din $1\le h\le f(k)\le b$ (2) $\Rightarrow f^{-1}(1)\le f^{-1}(h)\le k\le$ $\le f^{-1}(b)=a$ (3).

Din (2) rezultă $1\le h\le b$ şi din (3), $f^{-1}(h)\le k\le a$.

Prin urmare (4) $\begin{cases}1\le k\le a\\ 1\le h\le f(k)\le b\end{cases}\Rightarrow$ (5) $\begin{cases}1\le h\le b\\ f^{-1}(h)\le k\le a\end{cases}$.

Reciproc din $\begin{cases}1\le h\le b\\ f^{-1}(h)\le k\le a\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(1)\le f^{-1}(h)\le f^{-1}(b)=a$ şi cum $f^{-1}(1)>0$ atunci $\Rightarrow 1\le k\le a$ şi din $f^{-1}(h)\le k\le a\Rightarrow h\le f(k)\le b\Rightarrow$ $\Rightarrow 1\le h\le f(k)$. Avem echivalenţa $\begin{cases}1\le k\le a\\ h\le f(k)\le b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le h\le b\\ f^{-1}(h)\le k\le a\end{cases}$.

Fie $S=\sum_{k=1}^{[a]}[f(k)]=\sum_{1\le k\le a}[f(k)]=\sum_{1\le k\le a}\sum_{1\le h\le f(k)}1.$

Atunci în baza echivalenţei de mai sus, avem:

$$S=\sum_{1\le h\le b}\sum_{f^{-1}(n)\le k\le a}1=\sum_{1\le h\le b}\sum_{f^{-1}(h)\le k\le a}1+\sum_{1\le h\le b}\sum_{f^{-1}(n)=k}1=$$

$$=\sum_{1\le h\le b}\left(\sum_{1\le k\le a}1-\sum_{1\le k\le f^{-1}(h)}1\right)+\sum_{1\le h\le b}\sum_{h=f(k)}=\sum_{h=1}^{[b]}([a]-[f^{-1}(h)])+$$

$$+n(f)[a][b]-\sum_{h=1}^{[b]}[f^{-1}(h)]+n(f)\Rightarrow\sum_{k=1}^{[a]}[f(k)]+\sum_{h=1}^{[b]}[f^{-1}(k)]=$$

$$=[a][b]+n(f).$$

L. 45

Soluţia 2

Fie punctele din plan $O(o,0),A(a,0),B(b,0),C(a,b)$. Un punct (h,k) de coordonate întregi se află în interiorul sau pe laturile dreptunghiului $OABC$, dar nu pe axe, dacă şi numai dacă $1\le h\le a\Leftrightarrow 1\le h\le[a]$ şi $1\le k\le b\Leftrightarrow 1\le k\le[b]$, prin urmare numărul acestor puncte este $[a][b]$. Cum funcţia $f:[0,a]\to[0,b]$ este strict crescătoare şi bijectivă, graficul ei uneşte punctele $O(o,0)$, $C(a,b)$. Vom număra punctele de coordonate întregi din interiorul dreptunghiului $OABC$ situate sub grafic sau pe grafic, dar nu şi pe axa absciselor. Adică numărul punctelor de coordonate întregi din regiunea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}x\mathbb{R}:1\le x\le a,1\le y\le f(x)\}$ şi dacă $(h,k)\in A$, atunci

$1\le h\le a\Leftrightarrow 1\le h\le[a],1\le k\le f(h)\Leftrightarrow 1\le k\le[f(h)]$ este $\sum_{h=1}^{[a]}[f(h)]$.

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog, numărul punctelor de coordonate întregi aflate în interiorul dreptunghiului $OABC$ situate deasupra graficului funcție f sau pe grafic, dar nu axa ordonatelor, adică situate în regiunea:

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R} : 1 \le y \le b, 1 \le x \le f^{-1}(y)\}$ este $\sum_{k=1}^{[b]} [f^{-1}(k)]$.

Prin urmare, $\sum_{h=1}^{[a]} [f(h)] + \sum_{k=1}^{[b]} [f^{-1}(k)]$ este numărul de puncte de coordonate întregi aflate în interiorul dreptunghiului $OABC$ sau pe laturi, dar nu pe axe, dar cele de pe grafic sunt numărate de două ori (fiind incluse în regiunea A și B).

Așadar: $\sum_{h=1}^{[a]} [f(h)] + \sum_{k=1}^{[b]} [f^{-1}(k)] - n(f) = [a][b]$.

Aplicația 1

Pentru $a = n, b = \frac{n}{k}, f(x) = \frac{x}{k} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = kx, n \in \mathbb{N}^*$, rezultă:

$$\left[\frac{1}{k}\right] + \left[\frac{2}{k}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{k}\right] = (n+1)\left[\frac{n}{k}\right] - \frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left[\frac{n+k}{n}\right].$$

Într-adevăr $\left([a] = n, [b] = \left[\frac{n}{k}\right]\right)$ $\sum_{p=1}^{n} [f(p)] + \sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]} [f^{-1}(p)] = n\left[\frac{n}{k}\right] + \left[\frac{n}{k}\right] =$

$= (n+1)\left[\frac{n}{k}\right] \Rightarrow \sum_{p=1}^{n} \left[\frac{p}{k}\right] + \sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]} [kp] = (n+1)\left[\frac{n}{k}\right] \Leftrightarrow \sum_{p=1}^{n} \left[\frac{p}{k}\right] + k\sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]} p =$

$= (n+1)\left[\frac{n}{k}\right] \Rightarrow \left[\frac{1}{k}\right] + \left[\frac{2}{k}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{k}\right] = (n+1)\left[\frac{n}{k}\right] - \frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right] + 1\right) =$

$= (n+1)\left[\frac{n}{k}\right] - \frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left[\frac{n+k}{n}\right].$

Gh. Bordea

Aplicația 2

Pentru $a = n, b = \sqrt{n}, f(x) = \sqrt{x} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x^2, n \in \mathbb{N}^*$, rezultă:

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \cdots + [\sqrt{n}] = (n+1)[\sqrt{n}] - \frac{[\sqrt{n}]([\sqrt{n}]+1)(2[\sqrt{n}])+1}{6}.$$

Într-adevăr, avem: $\sum_{k=1}^{n} [f(k)] + \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} (f^{-1}(k)) = n[n] + [\sqrt{n}] \Leftrightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}[\sqrt{k}]+\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}k^2=(n+1)[\sqrt{n}] \Leftrightarrow [\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{n}]+$$
$$+\frac{[\sqrt{n}]([\sqrt{n}]+1)(2[\sqrt{n}]+1)}{6}=(n+1)[\sqrt{n}].$$

Gabriel Istrate (L. 45), (ex. 56, Cap. XIV)

164.** Soluția 1

Evident $f(1)=b$ și $f(a)=1$ și $f(x)\geq 1, \forall\, x\in[1,a]$. La fel ca în exercițiul precedent avem echivalența (numai că f este strict descrescătoare).

$$\begin{cases}1\leq k\leq a\\ 1\leq h\leq f(k)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\leq h\leq b\\ 1\leq k\leq f^{-1}(h)\end{cases}\quad(*).$$

Într-adevăr, din $\begin{cases}1\leq k\leq a\Rightarrow f(1)\geq f(k)\geq f(a)\Leftrightarrow 1\leq f(k)\leq b\\ \text{și}\\ 1\leq h\leq f(k)\Rightarrow k\leq f^{-1}(h)\leq f^{-1}(1)=a\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}1\leq h\leq b\\ 1\leq k\leq f^{-1}(h)\end{cases}$, la fel și reciproc sau schimbând h cu k, a cu b și f cu f^{-1} rezultă și implicația inversă. Prin urmare avem echivalența $(*)$. Avem

$$S=\sum_{k=1}^{[n]}[f(k)]=\sum_{1\leq k\leq a}[f(k)]=\sum_{1\leq k\leq a}\ \sum_{1\leq h\leq f(k)}1.$$

În baza echivalenței $(*)$ rezultă:

$$S=\sum_{1\leq h\leq b}\ \sum_{1\leq k\leq f^{-1}(h)}1=\sum_{1\leq h\leq b}[f^{-1}(h)]=\sum_{h=1}^{[b]}[f^{-1}(h)].$$

Prin urmare avem:

$$\sum_{k=1}^{[a]}[f(k)]=\sum_{k=1}^{[b]}[f^{-1}(k)].$$

Soluția 2

Considerăm mulțimea $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:1\leq x\leq a, 1\leq y\leq f(x)\}$. Pentru un punct de coordonate întregi $(h,k)\in M$ avem $1\leq h\leq a\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1\leq h\leq[a]$ și $1\leq k\leq f(h)\Leftrightarrow 1\leq k\leq[f(h)]$. Rezultă că numărul acestor puncte este $\sum_{h=1}^{[a]}[f(h)]$, dar rotind planul în jurul primei bisectoare cu 180° regiunea considerată își schimbă doar poziția și graficul lui f devine graficul lui f^{-1}, iar a și b își schimbă relațiile între ele și deci avem același număr de puncte în regiunea rotită:

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{k=1}^{[b]}[f^{-1}(k)] \Rightarrow \sum_{k=1}^{[a]}[f(k)] = \sum_{k=1}^{[b]}[f^{-1}(k)].$$

(L. 45)

Aplicaţia 3

Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n^2}{k^2}\right] = \sum_{k=1}^{n^2}\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru $a = n, b = n^2, f(x) = \frac{n^2}{x^2} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{n}{\sqrt{x}}$ din exerciţiul precedent rezultă $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n^2}{k^2}\right] = \sum_{k=1}^{n^2}\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right]$.

Titu Andreescu, Dorin Andrica (vezi Cap. XIV – Sume)

165**. Vom proceda prin inducţie, notând cu

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right) \text{ şi } B_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right](f(k) - f(k-1)).$$

Evident $A_1 = B_1 = f(1)$. Presupunând că $A_{n-1} = B_{n-1}$ trebuie să demonstrăm că $A_n = B_n$. Pentru aceasta este suficient să demonstrăm că $A_n - A_{n-1} =$

$= B_n - B_{n-1}, \forall\, n \geq 2$. Avem $A_n - A_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} f\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right) - \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\left[\frac{n-1}{k}\right]\right) =$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right) - f\left(\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)\right) + f\left(\underbrace{\left[\frac{n-1}{n}\right]}_{0}\right) =$$

$$= \sum_{k:n}\left(f\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right) - f\left(\left[\frac{n}{k}\right] - 1\right)\right) = \sum_{k:n} f\left(\frac{n}{k}\right) - f\left(\frac{n}{k} - 1\right) =$$

$$= \sum_{h:n} f(h) - f(h-1) = \sum_{h=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{h}\right] - \left[\frac{n-1}{h}\right]\right)(f(h) - f(h-1)) =$$

$$= \sum_{h=1}^{n}\left[\frac{n}{h}\right](f(h) - f(h-1)) - \sum_{h=1}^{n-1}\left[\frac{n-1}{h}\right](f(h) - f(h-1)) = B_n - B_{n-1}.$$

S-a ţinut seama că, atunci când k parcurge divizorii lui n şi $h = \frac{n}{k}$ parcurge

Scanned with OKEN Scanner

în ordine inversă, aceiași divizori ai lui n. De asemenea s-a ținut seama de proprietățile din Cap. I.

M.O. Drîmbe

166**. Soluția 1

Arătăm echivalența $\alpha) \begin{cases} 1 \le k \le n \\ 1 \le h \le \dfrac{n^2}{k^2} \end{cases} \Leftrightarrow \beta) \begin{cases} 1 \le h \le n^2 \\ 1 \le k \le \dfrac{n}{\sqrt{h}} \end{cases} (*).$

Într-adevăr din $\alpha) \Rightarrow 1 \le h \le \dfrac{n^2}{k^2} \le n^2 \Rightarrow 1 \le h \le n^2$ și $1 \le \sqrt{h} \le \dfrac{n}{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \le k \le \dfrac{n}{\sqrt{h}} \Rightarrow \beta)$. Reciproc, din $\beta) \Rightarrow 1 \le k \le \dfrac{n}{\sqrt{h}} \le n \Rightarrow 1 \le k \le n$,

$\sqrt{h} \le k\sqrt{h} \le n \Rightarrow \sqrt{h} \le \dfrac{n}{k} \Rightarrow 1 \le h \le \dfrac{n^2}{k^2}$.

Avem: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n^2}{k^2}\right] = \sum_{1 \le k \le n} \sum_{1 \le h \le \frac{n^2}{k^2}} 1 = \sum_{1 \le h \le n^2} \sum_{1 \le k \le \frac{n}{\sqrt{h}}} 1 = \sum_{k=1}^{n^2} \left[\frac{n}{\sqrt{h}}\right]$.

Soluția 2

Vezi Aplicația 3 ex. 164.

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 18 | Probleme diverse

§ 1.

1**. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, m,n \in \mathbb{N}^*, \exists\, p \in \mathbb{Z}^*, |q| \leq \max\{m,n\}$ astfel încât $[mx]-[nx]=(m-n)[x]+q$.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, m \in \mathbb{N}^*, \exists\, p \in \{0,1,2,\ldots,m-1\}$, astfel încât $[mx]-m[x]+p$.

2**. Să se calculeze valoarea lui $E_{(x)}=[x]^2-[x^2]$, ştiind că $[x]\{x\}=178$.

3*. Arătaţi că există o infinitate de perechi $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ care verifică egalitatea: $\left[\sqrt{m}+\sqrt{n}\right]=m-n$.

4*. Determinaţi cel mai mic număr natural $m \geq 3$ pentru care există un număr natural n astfel încât:

a) $\left[n\sqrt{m}\right]=2014$;

b) $\left[n\sqrt{m}\right]=2015$.

5**. Să se determine cea mai mică valoare a lui n pentru ca ecuaţia: $\left[\frac{10^n}{x}\right]=1989$ să aibă soluţie întreagă.

6**. Să se găsească cel mai mic număr natural m pentru care

$$0{,}5 < \{\sqrt{m}\} < 0,(5).$$

7**. Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care

$$0{,}7 < \{\sqrt[3]{n}\} < 0,(7).$$

8**. Să se determine numărul natural n minim pentru care

$$0{,}3 < \{\sqrt{n}\} < 0,(3).$$

9**. Fie n un număr natural care împărţit la 9, dă restul 4. Să se arate că:

$$\{\sqrt[3]{n}\} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

10***. Arătaţi că există $r \in (1,2)$ astfel încât $0 < \{r\pi^n\} < \frac{1}{2}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}$.

11**. Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care:

$$\frac{1}{10} < \{\sqrt[3]{n}\} < \frac{1}{9}.$$

Scanned with OKEN Scanner

12**. Arătați că, oricare ar fi $a, b \in [0,1], a < b$ există cel puțin un număr natural n astfel încât: $a < \{\sqrt{n}\} < b$.

13***. Fie x, y numere reale mai mari sau egale cu 1 astfel încât să aibă loc egalitatea: $\left[\frac{x}{y}\right] = \frac{[nx]}{[ny]}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $x = y$ sau x și y sunt numere întregi, astfel încât x este divizibil cu y.

14**. Să se determine numerele naturale $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care numărul:

$$A_n = \left[\frac{n^3 + 8n^2 + 1}{3n}\right] \text{ este prim.}$$

15**. a) Să se arate că dacă $m, n \in \mathbb{N}$ și astfel încât

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right\} \equiv \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right\}, \text{ atunci } m = n;$$

b) Să se arate că există $r \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, cu proprietatea că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right\} \neq r.$$

16***. Fie n un număr natural nenul. Demonstrați că cel puțin unul dintre numerele: $[2^n\sqrt{2}], [2^{n+1}\sqrt{2}], \ldots, [2^{2n}\sqrt{2}]$ este par.

17***. Pentru orice număr natural nenul n notăm cu x_n numărul numerelor naturale de n cifre, divizibil cu 4, formate cu cifrele 2,0,1 sau 6.

a) Calculați x_1, x_2, x_3 și x_4;

b) Să se găsească numărul natural n astfel încât:

$$1 + \left[\frac{x_2}{x_1}\right] + \left[\frac{x_3}{x_2}\right] + \cdots + \left[\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = 2016.$$

§ 2.

18. a) Câte cifre zecimale de 9 sunt după virgulă pentru

$$a = \left(6 + \sqrt{35}\right)^{1980}?$$

b) Câte cifre are numărul: $\left[\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{200}\right]$?

19. a) Să se arate că : $\left[\left(2 + \sqrt{3}\right)^n\right]$ este număr natural impar.

b) Fie $x_n = \left(3 + \sqrt{5}\right)^n$. Să se arate că $[x_n]$ este număr impar și să se determine $\{x_n\}$.

20*. Să se arate că dacă $x, y \in \mathbb{N}^*$ și $x^2 - y = 1$, atunci $\left[\left(x + \sqrt{y}\right)^n\right]$ este număr natural impar.

21*. Să se arate că $\left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{1997}\right]$ este de forma $6k - 1$.

Scanned with OKEN Scanner

22.** Să se arate că:

a) $\left[(2+\sqrt{2})^n\right]$ este impar;

b) Care este partea întreagă a numărului $\left[(\sqrt{2}+1)^n\right]$?

23.** Fie $\alpha = 2+\sqrt{3}$. Să se arate că: $\alpha^n - [\alpha^n] = 1-\alpha^{-n}$.

24*. Fie $\frac{4}{37} = a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ atunci:

a) Determinaţi a_{2012};

b) Calculaţi $\sum_{k=0}^{2012} a_k$;

c) Demonstraţi că:

$[2a_{2011}(a_{2013}-a_{2011})^n + 3a_{2011}(a_{2013}-3a_{2011})^{n-1} - 1] \vdots a_{2013}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

25. Să se arate că în scrierea zecimală a numărului $(\sqrt{2501}+50)^{2n+1}$, după virgulă sunt $4n+2$ cifre de zero.

26*. Să se arate că numărul $\left[(\sqrt{2004}+45)^{2005}\right]+1$ este divizibil cu 90.

27*. Să se arate că $\left[(\sqrt{3}+1)^{2n}\right]+1$ se divide la 2^{n+1}, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

28*. Fie $p, q \in \mathbb{N}, p^2 < q < (p+1)^2$ şi $x_n = \left[(p+\sqrt{q})^n\right]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Să se demonstreze că x_n este par dacă şi numai dacă n este impar.

29. Să se determine restul împărţirii numărului $\left[(\sqrt{7}+\sqrt{5})^{1995}\right]$ la 48.

30*. Să se demonstreze că dacă p este prim $p > 2$, atunci $\left[(2+\sqrt{5})^p\right] - 2^{p+1}$ este divizibil cu p.

31.** Să se determine în funcţie de n paritatea numărului

$$a_n = \left[\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n\right].$$

32.** a) Să se arate că $\left[(1+\sqrt{2})^n\right]$ şi $n+1$ sunt de aceeaşi paritate sau

$$\left[(1+\sqrt{2})^n\right] \equiv n+1 \pmod 2, \forall\, n \in \mathbb{N};$$

b) Să se arate că $n + \left[(1+\sqrt{2})^n\right]$ este număr impar, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

33*.** Să se determine $\left[(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})^3\right]$.

34*.** Dacă $m, n, p \in \mathbb{N}$ sunt astfel încât $(2+\sqrt{3})^{2p-1} = 1+m+n\sqrt{3}$ atunci m este pătratul unui număr natural.

35.** Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$A_n = (3+\sqrt{3})^n + (1-2\sqrt{3})^n \in \mathbb{Z}.$$

Scanned with OKEN Scanner

36. Pentru ce valori naturale ale lui m și n poate avea loc egalitatea:

$$(5+3\sqrt{2})^m = (3+5\sqrt{2})^n?$$

37*.** Calculați primele $\left[\frac{n}{2}\right]$ zecimale ale numărului $A = \left(m+\sqrt{m^2-1}\right)^n$, unde $m, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

38*.** Să se demonstreze că dacă $m \geq 2, n \geq 1$ sunt numere naturale și $a = \left[\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)^n\right]$ atunci $\frac{(a-1)(a+3)}{4(m^2-1)}$ este pătratul unui număr întreg.

39.** Să se determine cea mai mare putere a lui 2 prin care se divide numărul $\left[(1+\sqrt{3})^n\right]$.

40*.** Să se arate că $a_n = \left[4^n - (2+\sqrt{2})^n\right]$ este divizibil cu 112, oricare ar fi n impar, nedivizibil la 3.

41.** Să se arate că nu există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\left[(2+\sqrt{3})^{2n+1}\right] = \left[(4+\sqrt{15})^m\right].$$

42*.** Fie a un număr natural impar care nu este pătrat perfect. Să se arate că dacă m și n sunt numere naturale nenule, atunci:

a) $\{m(a+\sqrt{a})\} \neq \{n(a-\sqrt{a})\}$;

b) $[m(a+\sqrt{a})] \neq [n(a-\sqrt{a})]$.

§ 3.

43. Fie $a, b, c \in \left[1, \frac{5}{3}\right]$ și $E = (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

a) Să se arate că $[E] = 9$;

b) Să se determine a maxim astfel încât $\forall\, x \in [1, a]$ să avem $|E| = 9$.

44. Să se determine $\left[\sqrt{E}\right]$ și $[E]$ unde: $E = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$, cu $a, b, c, \in [\alpha, \beta], \alpha < \beta < \frac{3}{2}\alpha$.

45.** Fie $a, b, c > 0$ și $E(a,b,c) = \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$. Să se determine $[E]$.

46.** Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ notăm:

$$E(a,b) = \left[\sqrt{a^2+a}\right] + \left[\sqrt{b^2+b+1}\right],$$

Scanned with OKEN Scanner

$$F(a,b)=\left[\sqrt{a^6+a^3}\right]+\left[\sqrt{b^6+b^3+1}\right].$$

Determinați $a,b\in\mathbb{N}$ astfel încât: $3E(a,b)=2F(a,b)$.

47**. Fie $a,b,c\in[1,3]$ și $E=\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$. Să se calculeze $[E]$ și $\left[\sqrt{E}\right]$.

48***. Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi și $E(a,b,c)=\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Să se determine $[E(a,b,c)]$.

49*. Determinați numerele naturale n pentru care există numerele naturale a,b,c astfel încât: $\left[\frac{a+b}{c}\right]+\left[\frac{b+c}{a}\right]+\left[\frac{c+a}{b}\right]=n$.

50. Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi neechilateral, de perimetru 2. Să se arate că $\left[\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right]=1$.

51**. Fie $E=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}$ unde a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi. Să se determine $[E]$.

52***. Fie $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$. Să se determine minimul expresiei:

$$E(a,b,c,d)=\left[\frac{a+b+c}{d}\right]+\left[\frac{b+c++d}{a}\right]+\left[\frac{c+d+a}{b}\right]+\left[\frac{d+a+b}{c}\right].$$

53***. Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ și $[na]+[nb]=[nc]+[nd],\forall\, n\in\mathbb{N}$. Să se arate că $a+b=c+d$.

54***. a) Fie $a,b\in(0,\infty)$. Arătați că $a+\left[\frac{a}{b}\right]=b+\left[\frac{b}{a}\right]\Leftrightarrow a=b$.

b) Arătați că există o infinitate de perechi (a,b) de numere negative diferite și o infinitate de perechi de numere de semne contrare astfel încât: $a+\left[\frac{a}{b}\right]=b+\left[\frac{b}{a}\right]$.

c) Arătați că există o infinitate de perechi (a,b) de numere pozitive distincte, pentru care $a+\left[\frac{b}{a}\right]=b+\left[\frac{a}{b}\right]$.

55**. Fie k un număr natural. Pentru un număr real $a\in[k^2,(k+1)^2)$, notăm $f(a)=0$, dacă $a\in[k^2,k^2+k)$ și $f(a)=1$.
Dacă $a\in[k^2+k,(k+1)^2)$, să se arate că

$$\left[\sqrt{a}\right]+f(a)\leq\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

56***. Fie p un număr prim și α un număr real pozitiv astfel încât $p\alpha^2 < \frac{1}{4}$.

Să se demonstreze că pentru $n \geq \left[\frac{\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\sqrt{p}}}\right] + 1$ are loc egalitatea

$$\left[n\sqrt{p} - \frac{\alpha}{n}\right] = \left[n\sqrt{p} + \frac{\alpha}{n}\right].$$

57***. Fie $x, y, z \in [1, \infty)$ așa încât $\frac{x}{[x]} = \frac{y}{[y]} = \frac{z}{[z]}$. Să se arate că

$$\sqrt{[x]^2 + [y]^2 + [z]^2} + \sqrt{\{x\}^2 + \{y\}^2 + \{z\}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ce egalitate se obține pentru $x, y, z \in (-\infty, -1]$?

58***. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\{ax\} + \{bx\} = \{x\}, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

59***. Pentru ce valori ale lui $a, b \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea:

a) $[x + a] + [x + b] = [2x], \forall\, x \in \mathbb{R}$?

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_k \in \mathbb{R}_+, k = \overline{1, n}$ astfel încât

$$\sum_{k=1}^{n} [x + a_k] = [2x], \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

60***. Să se arate că nu există numerele reale a, b, c cu proprietatea:

$$[x + a] + [2x + b] = [3x + c], \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

61***. Să se arate că pentru orice $a, b, x, y \in \mathbb{N}^*$ și $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{y}{a}\right] = \left[\frac{a^{n-1}}{b}\right] + \left[\frac{b^{n-1}}{a}\right], \text{ unde } (a, b) = 1 \text{ și } ax + by = a^n + b^n.$$

62***. Determinați $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ astfel încât să avem:

$$[ax + by] + [ay + bx] = [x] + [y], (\forall)\ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

63***. Determinați numerele reale a și b pentru care egalitatea $[ax + by] + [ay + bx] = (a + b)[x + y]$ este adevărată $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

§ 4.

64***. Fie $a > 0$. Dacă $[na^2] = [na[a]], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ rezultă că a este întreg.

65**. Fie $a \in \mathbb{R}$. Să se arate că dacă $[2na] = 2[na], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci a este întreg.

66***. Dacă a este rădăcina pozitivă a ecuației $x^2 - x - 1 = 0$, să se arate că $[a^2 n] = [a[an]] + 1, (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

67***. Dacă a este o rădăcină negativă a $x^2 + x - 1 = 0$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea: $[a^2 n] = [a[an]] - 1$.

68***. Determinați toate valorile reale ale parametrului a pentru care este verificată egalitatea $4[an] = n + [a[an]], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

69*.** Fie $m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2$. Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m-1} \left[\frac{x+im^{k-1}}{m^k}\right] = \begin{cases} [x], & x \geq 0 \\ [x]+1, & x < 0 \end{cases}$$

70*.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Demonstrați echivalența afirmațiilor:

a) $a \in \mathbb{Z}$;

b) $[2na + b] + [b]$ este număr par pentru oricare $n \in \mathbb{N}$.

71*.** Fie $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$ și $a \in \mathbb{R}$. Dacă $\{a\} = \{a^2\} = \{a^n\}$ atunci arătați că $a \in \mathbb{Z}$.

72*.** Fie $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Pentru ce numere naturale n avem: $\left[\sqrt[k]{n}\right] | n$?

73.** Să se determine numerele reale $x > 1$ pentru care $\sqrt[n]{[x^n]}$ este întreg oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

74*.** a) Determinați numerele p pentru care:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n+1}{p}\right] + \left[\frac{n+2}{p}\right] = n, \forall\, n \in \mathbb{N};$$

b) Determinați numerele naturale nenule p, q, r pentru care

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n+1}{q}\right] + \left[\frac{n+2}{r}\right] = n, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

75*.** Găsiți trei numere distincte $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\left[\frac{n}{a}\right] + \left[\frac{n}{b}\right] + \left[\frac{n}{c}\right] = n,$$

pentru o infinitate de numere $n \in \mathbb{N}^*$.

76*.** Spunem că un triplet de numere naturale $\{a, b, c\}$ are proprietatea (P) dacă: $\left[\frac{n+a}{6}\right] + \left[\frac{n+b}{6}\right] - \left[\frac{n+c}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că există un triplet $\{a, b, c\}$ cu proprietatea (P), astfel încât $a, b, c \in \{0,1,2,3,4,5\}$;

b) Să se determine toate tripletele cu proprietatea (P).

77*.** Determinați cea mai mare valoare a numărului natural n nenul, pentru care este verificată inegalitatea: $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{11}\right] + \left[\frac{n}{13}\right] < n$.

78*.** Câte din primele 2008 numere naturale se pot scrie sub forma $[x] + [2x] + [3x] + [4x], x \in \mathbb{R}$?

79.** Fie x_0 o rădăcină pozitivă a ecuației $x^5 - x^3 - x - 2 = 0$. Să se arate că $[x_0^6] = 9$.

80*.** Determinați cel mai mic număr natural p, pentru care se găsește un număr natural q, pentru care are loc egalitatea:

$$[\sqrt{p}] + [\sqrt{p+1}] + \cdots + [\sqrt{q}] = 2011.$$

Scanned with OKEN Scanner

81*. Fie r un număr real astfel încât: $\left[r+\frac{19}{100}\right]+\left[r+\frac{20}{100}\right]+\cdots+$ $+\left[r+\frac{91}{100}\right]=546$. Să se determine valoarea lui $[100r]$.

§ 5.

82*. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_{2009} \in [1,\infty)$ și pentru orice $i, j \in \{1,2,\ldots,2009\}$ avem $a_i[a_j]=a_j[a_i]$ atunci $\sqrt{\sum_{i=1}^{2009}[a_i]^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{2009}\{a_i\}^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{2009}a_i{}^2}$."

83*. Se consideră numerele reale pozitive $q_1, q_2, \ldots, q_{2012}$ cu $q_1+q_2+\cdots+q_{2012}=1$. Pentru fiecare număr natural n, considerăm numărul $a_n=\{nq_1\}+\{nq_2\}+\cdots+\{nq_{2012}\}$. Determinați cel mai mare element al mulțimii $A=\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$.

84*. Fie $E(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sqrt{[x_1]+\{x_2\}}+\sqrt{[x_2]+\{x_3\}}+\ldots+$ $+\sqrt{[x_{n-1}]+\{x_n\}}+\sqrt{[x_n]+\{x_1\}}$ unde $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[0,\infty)$ și x_1+x_2+ $+\cdots+x_n=n, \forall\, n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. Se cere:

a) $\max E(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;

b) Să se determine valorile $x_1,x_2,\ldots,x_n$ pentru care este atinsă valoarea maximă.

85*. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Să se determine numerele reale $a_1,a_2,\ldots,a_n$ în fiecare din următoarele ipoteze:

a) $[a_1x]+[a_2x]+\cdots+[a_nx]=[x], \forall\, x\in\mathbb{R}$;

b) $\{a_1x\}+\{a_2x\}+\cdots+\{a_nx\}=\{x\}, \forall\, x\in\mathbb{R}$.

86*. Fie numerele $a_1,a_2,\ldots,a_n$ numere reale pentru care:

$$\{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\}=\{a_2+a_3+\cdots+a_n\}=\cdots=$$
$$=\{a_n+a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}\}=\frac{1}{n},$$

$\forall\, n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. Să se determine valorile posibile ale părții fracționare ale sumei $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

87*. Fie șirul de numere naturale $a_i, i=\overline{1,1997}$, care satisface dubla inegalitate: $a_i+a_j\le a_{i+j}\le a_i+a_j+1, \forall\, i,j\ge 1$ cu $i+j\le 1997$.

a) Calculați $\left[\frac{a_n}{n}\right]$;

b) Demonstrați că există un număr real $x>0$ astfel încât $a_n=[nx]$, $\forall\, n=\overline{1,1997}$.

Scanned with OKEN Scanner

88***. Fie $m_1, m_2, \dots, m_k$ numere naturale nenule şi $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

a) Arătaţi că există $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\frac{[x_1\alpha]}{m_1} = \frac{[x_2\alpha]}{m_2} = \cdots \frac{[x_k\alpha]}{m_k};$$

b) Arătaţi că există $y_1, y_2, \dots, y_k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$m_1[y_1\alpha] = m_2[y_2\alpha] = \cdots = m_k[y_k\alpha].$$

89***. Fie numerele $a_0 = 0, a_i > 0, i = \overline{1,n}$ cu $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

Fie $E = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{1 + a_0 + a_1 + \cdots + a_{i-1}}\sqrt{a_i + a_{i+1} + \cdots + a_n}}$.

Să se calculeze $[E]$.

90***. Şirul $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ se defineşte astfel: $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n$, $n = 1,2, \dots$. Calculaţi partea întreagă a sumelor:

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \cdots \frac{1}{x_{100} + 1},$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_{100}}.$$

91**. Determinaţi toate perechile de numere naturale (m, n) pentru care partea întreagă a numărului: $1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots + \frac{1}{n^m}$ este 1.

92***. Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ şi $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$. Dacă pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\sum_{i=1}^{n} [ma_i] = \sum_{i=1}^{n} [mb_i].$$ Să se arate că $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

93***. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine numărul n-uplurilor $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de numere reale nenule care verifică relaţia:

$$\frac{a_1^2}{[a_1]} + \frac{a_2^2}{[a_2]} + \cdots + \frac{a_k^2}{[a_k]} = k^2, \forall\, k \in \{1,2, \dots, n\}.$$

94**. Fie numerele pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$ astfel încât:

$$\frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{a_2^2}{a_3^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n^2} + \frac{a_n^2}{a_1^2} < n + 1.$$

Să se calculeze partea întreagă a sumei:

$$S_n = \frac{a_1}{a_3} + \frac{a_2}{a_4} + \frac{a_3}{a_5} + \cdots + \frac{a_{n-2}}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_1} + \frac{a_n}{a_2}.$$

95**. a) Dacă $p, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq p \geq 2$, iar $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$. Să se calculeze partea întreagă a expresiei: $E = \frac{\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n}}{\max(a_1, a_2, \dots, a_n)}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se calculeze partea întreagă a expresiei:

$$F = \frac{1}{\max(|\sin x|, |\cos x|)}, \text{ unde } x \in \mathbb{R}.$$

96***. Fie numerele pozitive $a_k, b_k \in \mathbb{R}_+, k = \overline{1,n}$ cu proprietatea:

$$0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 1 \text{ și}$$
$$0 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_n < 1 \text{ astfel încât}$$

$[x + a_1] + [x + a_2] + \cdots + [x + a_n] = [x + b_1] + [x + b_2] + \cdots + [x + b_n]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $m = n$ și $a_k = b_k, \forall\, k = \overline{1,n}$.

97**. Fie $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < 1$, astfel încât pentru orice x are loc egalitatea: $[x] + [x + a_1] + [x + a_2] + \ldots + [x + a_{n-1}] = [nx]$. Să se arate că $a_k = \frac{k}{n}, \forall\, k = \overline{1, n-1}$.

98***. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Demonstrați că $(\forall)\, k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ există $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$[x_i] = k_i, \forall\, i \in \overline{1,n}$ și $[x_1 x_2 \ldots x_n] = (1 + k_1) \cdot (1 + k_2) \cdot \ldots \cdot (1 + k_n) - 1$.

99***. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\left[\frac{n+1}{3}\right] + \left[\frac{n+3}{3^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n+3^{m-1}}{3^m}\right] \equiv \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{n}{3^m}\right].$$

100**. Pentru orice a și $r > 0$ notăm: $Z_{a,r} = \{a_m | a_m = a + mr, m \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că:

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}, (\exists) a_m \in Z_{a,r}$ unic, astfel încât $a_m \leq x < a_{m+1}$;

b) În contextul de la punctul a), notăm $a_m = [x]_{a,r}$, avem identitate de tip Hermite:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k_r}{n}\right]_{a,r} = [nx]_{a,r}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

dacă și numai dacă $a \in Z_{0,r}$.

101**. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $x \in \mathbb{Q}$ astfel încât $(\exists)\, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $\{x^n\} = a_1\{x\} + a_2\{x^2\} + \cdots + a_{n-1}\{x^{n-1}\}$. Demonstrați că $x \in \mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

soluții 18 | Probleme diverse

§ 1.

1.** a) Din $x = [x] + \{x\}, \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow m\{x\} < m$ și atunci $[mx] =$
$= [m([x] + \{x\})] = m[x] + [m\{x\}] = m[x] + p$, unde $p \in \{0,1,2, \ldots, m-1\}$ deci propoziția este adevărată;

b) Din a) rezultă că $\exists\, p_1 \in \{0,1,2, \ldots, m-1\}$ și $p_2 \in \{0,1,2, \ldots, n-1\}$ astfel încât $[mx] = m[x] + p_1$ și $[nx] = n[x] + p_2 \Rightarrow [mx] - [nx] =$
$= (m-n)[x] + q$ unde $q = p_1 - p_2 \in \mathbb{Z}$ și $|q| = [p_1 - p_2] \leq \max\{p_1, p_2\} \leq$
$\leq \max\{m, n\}$.

Observație. Se știe că $\max\{a,b\} = \dfrac{a+b+|a-b|}{2} \geq |a-b|, \forall\, a,b \geq 0$ dacă $a, b \geq 0$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, G.M. nr. 7/1997

2.** Rezultă imediat că $[x] > 0, x \notin \mathbb{N}^*$ și $\{x\} \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Prin urmare $x = k + \dfrac{p}{q}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ și $p, q \in \mathbb{N}^*$ cu $p < q$, adică $\{x\} = \dfrac{p}{q}$ și condiția dată devine $k \cdot \dfrac{p}{q} = 178$.

Calculăm $E = \left[k + \dfrac{p}{q}\right]^2 - \left[\left(k + \dfrac{p}{q}\right)^2\right] = k^2 - \left[k^2 + 2k\dfrac{p}{q} + \left(\dfrac{p}{q}\right)^2\right] =$

$= k^2 - k^2 - 2 \cdot 178 + \left[\left(\dfrac{p}{q}\right)^2\right] = -356 - 0 = -356.$

I.T.M.O., 2011-2012

3*. Din relație rezultă $m > n$.

Mai întâi arătăm că $\forall\, a \in \mathbb{N}^*$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\left[\sqrt{n+a} + \sqrt{n}\right] = a$.

De exemplu pentru $a = 2p+1, p \in \mathbb{N}$ este suficient să luăm $n = p^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\sqrt{p^2} + \sqrt{p^2+2p+1}\right] = 2p+1$. Așadar avem o infinitate de perechi $(p^2, (p+1)^2), p \in \mathbb{N}^*$. Dacă $n = 2p$, atunci va fi suficient să luăm $n = p^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\sqrt{p^2} + \sqrt{p^2+2p}\right] = 2p, p^2 < p^2 + 2p < (p+1)^2 \Rightarrow \left[\sqrt{p^2+2p}\right] = p$.

Avem o infinitate de perechi $(p^2, p^2+2p), \forall\, p \in \mathbb{N}^*$.

Ionel Tudor, O.L.-Giurgiu/2016

Scanned with OKEN Scanner

4*. a) Pentru $m = 3$ nu există $n \in \mathbb{N}$ deoarece pentru $n \in \{1164,1165\}$ rezultă $[1164\sqrt{3}] = 2013$ și $[1165\sqrt{3}] = 2015$. Pentru $m = 4 \Rightarrow n = 1007$;

b) Rezultă că pentru $m = 3$ și $n = 1165$, $[1165\sqrt{3}] = 2015$.

5.** Se constată că $n = 4,5,6,7$ nu verifică. Pentru $n = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1989 \leq \frac{10^n}{x} < 1990 \Rightarrow 1989x < 10^8 < 1990x$ și pentru $x = 5026$, $9996714 < 10^8 < 10001740$.

Matematica v școle, 1989

6.** Fie $\sqrt{m} = k + t, k \in \mathbb{N}, t \in [0,1) \Rightarrow 0,5 < t < 0,(5) \Rightarrow k + \frac{1}{2} < k + t <$

$< k + \frac{5}{9} \Rightarrow k^2 + k + \frac{1}{4} < m < k^2 + k + \frac{k}{9} + \frac{25}{81}$ și cum $k^2 + k \in \mathbb{N}$, rezultă că cel mai mic $m \in \mathbb{N}$ care satisface condiția se obține atunci când k este cel mai mic număr natural pentru care

$\frac{k}{9} + \frac{25}{81} \geq 1 \Rightarrow k > \frac{56}{9} \Rightarrow k = 7$. Atunci $m = k^2 + k + 1 = 57$.

7.** Fie $\sqrt[3]{n} = k + t, k = [\sqrt[3]{n}], t = \{\sqrt[3]{n}\}$ și $\frac{7}{10} < t < \frac{7}{9} \Rightarrow k + \frac{7}{10} < k + t <$

$< k + \frac{7}{9}, \left(k + \frac{7}{10}\right)^3 < n < \left(k + \frac{7}{9}\right)^3$.

Cel mai mic număr natural n se obținepentru cel mai mic $k \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $k = 1$ rezultă $(1,7)^3 < n < \left(\frac{16}{9}\right)^3 \Rightarrow$ cel mai mic n este $n = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4,913 < n < \frac{4096}{729} < 5,7 \Rightarrow n = 5$ și $0,7 < \{\sqrt[3]{5}\} < 0,(7) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{7}{10} < \sqrt[3]{5} - 1 < \frac{7}{9}$ care se verifică.

Mihai Vijdeliuc, Argument nr. 17

8.** Fie $\sqrt{n} = k + t, t \in [0,1), k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{3}{10} < t < \frac{1}{3} \Rightarrow k + \frac{3}{10} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{3}$

$\Rightarrow k^2 + \frac{3k}{5} + \frac{9}{100} < n < k^2 + \frac{2k}{3} + \frac{1}{9}$. Pentru $k \in \{0,1,2\}$ rezultă $n \in \mathbb{N}^*$, iar pentru $k = 3 \Rightarrow n = 11$.

(Admitere)

9.** Vom utiliza rezultatele

a) $[x] \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $[\sqrt[3]{9m+1}] = [\sqrt[3]{9m+4}]$.

Inegalitatea este echivalentă cu $\sqrt[3]{n} - [\sqrt[3]{n}] \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{n} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \geq [\sqrt[3]{n}] \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow n-3+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\geq\left[\sqrt[3]{n}\right]^3$, dar cum $0<\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}<1, \forall\, n\geq 3$ (dar cel mai mic număr natural care verifică condiția din ipoteză este 4).

Avem: $n-3\geq\left[\sqrt[3]{n}\right]^3\Rightarrow\sqrt[3]{n-3}\geq\left[\sqrt[3]{n}\right]$ (1) și cum $n=9m+4, m\in\mathbb{N}$ inegalitatea (1) devine: $\sqrt[3]{9m+1}\geq\left[\sqrt[3]{9m+4}\right]$ și utilizând b) și a) rezultă $\sqrt[3]{9m+1}\geq\left[\sqrt[3]{9m+1}\right]$.

Sankt-Petersburg, (A. Hrabrov)

10***. Vom considera șirul $(x_0)_{n\geq 0}$ cu $x_0=1$ și $x_{n+1}=1+[\pi x_n], \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Avem $0<x_{n+1}-\pi x_n<1\Rightarrow 0<\frac{x_{n+1}}{\pi^{n+1}}-\frac{x_n}{\pi^n}<\frac{1}{\pi^{n+1}}, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$. Fie șirul $y_n=\frac{x_n}{\pi^n}, n\geq 1$ și cum $y_n=y_0+\sum_{k=1}^{n}(y_k-y_{k-1})<y_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi^k}<\frac{\pi}{\pi-1}$, deci șirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este crescător și mărginit, prin urmare convergent și fie $r=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. Avem $1=y_0<r<\frac{\pi}{\pi-1}<2$ și pentru $k\geq 1$ avem

$$\pi^k r-x_k=\pi^k(r-y_k)=\pi^k\lim_{n\to\infty}(y_n-y_k)=\pi^k\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(y_k-y_{k-1})\leq$$

$$\leq\pi^k\lim_{n\to\infty}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{\pi j}=\lim_{n\to\infty}\sum_{m\geq 1}^{n}\frac{1}{\pi^m}=\frac{1}{\pi-1}<\frac{1}{2}.$$ Prin urmare avem

$0<\pi^k r-x_k<\frac{1}{2}\Rightarrow x_k<\pi^k r<x_k+1\Rightarrow[\pi^k r]=x_k\Rightarrow\{\pi^k r\}=\pi^k r-x_k$

$\Rightarrow 0<\{\pi^k r\}<\frac{1}{2}$.

George Stoica-Canada, G.M. nr.10/2016

11**. $\sqrt[3]{n}=k+t$ unde $k\in\mathbb{N}$ și $t=\{\sqrt[3]{n}\}$,cel mai mic n se obține pentru cel mai mic k.

$$k+\frac{1}{10}<k+t<k+\frac{1}{9}\Rightarrow\left(k+\frac{1}{10}\right)^3<n<\left(k+\frac{1}{9}\right)^3,$$

$$k^3+\frac{3k^2}{10}+\frac{3k}{100}+\frac{1}{1000}<n<k^3+\frac{3k^2}{9}+\frac{3k}{81}+\frac{1}{729}\Rightarrow A<n<B.$$

Se impune ca diferența dintre $B-A>2$ și se obține cel mai mic $k=7\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left(\frac{71}{10}\right)^3<n<\left(\frac{64}{9}\right)^3\Rightarrow n=358.$$

12**. Fie $x\in[k^2,(k+1)^2), k\in\mathbb{N}\Rightarrow n=k^2+x, 0\leq x\leq 2k, x\in\mathbb{N}$.

Avem $a<\{\sqrt{n}\}<b\Leftrightarrow a<\sqrt{n}-[\sqrt{n}]<b\Rightarrow a<\sqrt{k^2+x}-k<b$, de unde rezultă că $x\in(a^2+2ak, b^2+2bk)\Rightarrow l=b^2+2kb-a^2-2ka=$ $=(b-a)(b+a+2k)$.

Scanned with OKEN Scanner

Alegem $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $l > 1 \Rightarrow 2k > \frac{1}{b-a} - (a+b)$ atunci există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $x \in (a^2 + 2ak, b^2 + 2bk)$ și există $n = k^2 + x,\ 0 \le x \le 2k, x \in \mathbb{N}$ astfel încât $a < \{\sqrt{n}\} < b$. Se poate observa că $\{n\sqrt{2}\}$ este densă în [0,1] și atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\{\sqrt{2n^2}\} \in \in (a, b)$.

Concurs Cehia

13***. Evident că pentru $x = y$ este verificată egalitatea. Considerăm $x \neq y$, fie $1 < x < y$, atunci membrul stâng este nul, iar cel din dreapta nenul. Fie $1 < y < x$ și dacă punem $x = ky + z$ (1) unde $k \in \mathbb{N}^*$ și $0 \le z < y$, egalitatea devine:

$\left[\frac{ky+z}{y}\right] = \left[\frac{n(ky+z)}{ny}\right] \Rightarrow k + \left[\frac{z}{y}\right] = \frac{[kny+nz]}{[ny]}$ și cum $\left[\frac{z}{y}\right] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k[ny] = [kny + nz] \Rightarrow [kny + nz - k[ny]] = 0 \Rightarrow [k\{ny\} + nz] = 0$ (2).

Rezultă $z = 0$, pentru că altfel nz poate fi oricât de mare și egalitatea (2) nu mai poate avea loc. Prin urmare rămâne să arătăm că x și y sunt numere întregi. Din (1) rezultă $x = ky$ și $k \ge 2$ (pentru $k = 1 \Rightarrow x = y$) și (2) devine $[k\{ny\}] = 0 \Rightarrow [k\{n\{y\}\}] = 0$ (3) (s-a utilizat identitatea $\{ny\} = \{n\{y\}\}$). Dacă $\{y\} \neq 0$, atunci există un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{n_0+1} \le \{y\} < \frac{1}{n_0}$ și atunci pentru $n = n_0$ și $k \ge 2$ egalitatea (3) nu poate avea loc. Așadar $\{y\} = 0 \Rightarrow\Rightarrow x$ și y întregi și $x = ky$.

Ucraina, 1998

14**. Dacă $n = 3k \Rightarrow A_{3k} = \left[\frac{27k^3 + 72k^2 + 1}{9k}\right] = 3k^2 + 8k = k(3k+8)$ care este prim doar dacă $k = 1$ și atunci $A_3 = 11$. Pentru $n = 3k + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow A_{3k+1} = 3k^2 + 10k + 3 = (3k+1)(3k+3)$ care este prim doar pentru $k = 0 \Rightarrow A_1 = 3$. Pentru $n = 3k + 2$, atunci A_{3k+2} este număr compus. Prin urmare $n \in \{3,1\} \Rightarrow A_3 = 11, A_1 = 3$.

Gabriel Popa, Concursul „Unirea", 2003

15**. a) Presupunând contrariul, fie $m > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m} \in \mathbb{N}$. Alegând cel mai mare divizor prim al numerelor cuprinse între $n + 1$ și m, fie acesta d și când se aduce la același numitor, făcând suma numărătorilor, toți termenii sunt divizibili la d mai puțin unul dintre ei, iar numitorul este divizibil la d. Prin urmare fracția nu se poate simplifica prin d, contradicție. Deci, $n = m$.

Scanned with OKEN Scanner

Așadar funcția $f(n)=\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$ este injectivă.

b) Dacă se consideră $r=\frac{1}{2}$, atunci demonstrația este la fel ca la punctul a).

16*.** Să presupunem prin absurd că toate numerele sunt impare. Prin urmare, există $m\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea $2m-1<2^n\sqrt{2}<2m\Rightarrow 4m-2<$ $<2^{n+1}\sqrt{2}<4m$ și cum $\left[2^{n+1}\sqrt{2}\right]$ este număr impar, rezultă că $4m-1<$ $<2^{n+1}\sqrt{2}<4m$. Analog rezultă $2^{n+1}\cdot m-1<2^{2n}\sqrt{2}<2^{n+1}\cdot m$.

Din prima parte a ultimei inegalități rezultă $m-2^{n-1}\sqrt{2}<\frac{1}{2^{n+1}}$. Obținem $\frac{m^2-2^{2n-1}}{m+2^{n-1}\sqrt{2}}<\frac{1}{2^{n+1}}$ (*); din $2m>2^n\sqrt{2}\Rightarrow m^2>2^{2n-1}\Rightarrow m^2-2^{2n-1}>1$ și din (*)rezultă că $\frac{1}{m+2^{n-1}\sqrt{2}}<\frac{1}{2^{n+1}}$ (**). Din $2m-1<2^n\sqrt{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow m<\frac{2^n\sqrt{2}+1}{2}$. Din (**) obținem $2^{n+1}<2^{n-1}\sqrt{2}+m<2^{n-1}\sqrt{2}+$ $+\frac{2^n\sqrt{2}+1}{2}\Rightarrow 2^{n+2}<2^{n+1}\sqrt{2}+1\Rightarrow 2<\sqrt{2}+\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$, contradicție.

17*.** a) $x_1=1$ (întrucât 0 este divizibil cu 4). $x_2=4$ (întrucât 12,16,20,60 sunt divizibile cu 4). Numerele de trei cifre divizibile cu 4 în care prima cifră nu poate fi 0 și ultimele cifre pot fi 12, 16, 20, 60, $00\Rightarrow x_3=3\cdot 5=15$ nu poate fi 0 (prima cifră poate fi în 3 posibilități, iar ultimele două cifre pot fi 12, 16, 20, 60, 00 (adică $3\cdot 5=15$ numere). Avem $x_4=3\cdot 4\cdot 5=60$ (prima cifră nu poate fi 0, pentru a doua cifră avem patru posibilități, iar pentru ultimele două cifre pot fi 12, 16, 20, 60, 00).

b) Dacă $n\geq 3$, un număr A care verifică condițiile este de forma $A=\overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}pq}$, unde prima cifră poate lua trei valori și fiecare dintre cifrele $a_2,a_3,\ldots,a_{n-2}$ pot fi alese în patru moduri, iar ultimele două cifre $\overline{pq}\in\{12,16,20,60,00\}$ rezultă că $x_n=3\cdot 4^{n-3}\cdot 5,\forall\, n\geq 3$ și $\forall\, k\geq 3$ $\Rightarrow 1+\left[\frac{x_2}{x_1}\right]+\left[\frac{x_3}{x_2}\right]+\sum_{k=3}^{n}\left[\frac{x_{k+1}}{x_k}\right]=1+4+3+4(n-2)=4n=2016\Rightarrow$ $\Rightarrow n=504$.

Lucian Dragomir, O.J., 2016

Scanned with OKEN Scanner

§ 2.

18. a) Avem: $(6+\sqrt{35})^{1980}+(6-\sqrt{35})^{1980}=2k$, unde $k\in\mathbb{N}^*$ și cum $0<6-\sqrt{35}<\frac{1}{10}\Rightarrow 0<(6-\sqrt{35})^{1980}<10^{-1980}$ și $\left[(6+\sqrt{35})^{1980}\right]=$
$=\left[2k-(6-\sqrt{35})^{1980}\right]=2k-1$. Dar cum $2k-1+\underbrace{0,99\ldots0}_{1979}=$
$=2k-\frac{1}{10^{1980}}<(6+\sqrt{35})^{1980}<2k$.

b) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{200}=(5+2\sqrt{6})^{100}<(5+2,25)^{100}=10^{100}$ și $(5+2\sqrt{6})^{100}>(5+2,42)^{100}=9,8^{100}\Rightarrow 9,8^{100}<(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{200}<10^{100}$.

Vom arăta că $9,8^{100}>10^{99}\Rightarrow 9,8>\left(\frac{10}{9,8}\right)^9\Rightarrow$

$\Rightarrow 9,8>\left(1+\frac{1}{49}\right)^{49}\cdot\left(1+\frac{1}{49}\right)^{49}\cdot\left(1+\frac{1}{49}\right)$, deoarece $\left(1+\frac{1}{49}\right)^{49}<3$

$\left(\text{se poate utiliza inegalitatea } \left(1+\frac{1}{n}\right)^k\le 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2},\ k\le n, n,k\in\mathbb{N}^*\right)$.

Așadar $9,8>3\cdot 3\cdot\frac{50}{49}\Rightarrow 49^2>9250\Rightarrow 2401>2250$. Prin urmare $\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{200}\right]$ are 100 cifre.

Ion Nedelcu, Lucian Tuțescu

19. a) Avem $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=2p, p\in\mathbb{N}$ și cum $0<2-\sqrt{3}<1\Rightarrow 0<(2-\sqrt{3})^n<1\Rightarrow(2+\sqrt{3})^n=2p-(2-\sqrt{3})^n\Rightarrow$
$\Rightarrow\left[(2+\sqrt{3})^n\right]=2p+\left[-(2-\sqrt{3})^n\right]=2p-1$.

b) Avem $x_n=(3+\sqrt{5})^n$ și $\overline{x_n}=(3-\sqrt{5})^n, \forall\, n\in\mathbb{N}$ și cum $x_n=a_n+b_n\sqrt{5}$ și $\overline{x_n}=a_n-b_n\sqrt{5}\Rightarrow x_n=x_n+\overline{x_n}-1+(1-\overline{x_n})=$
$=2a_n-1+(1-\overline{x_n})$, dar cum $x_n+\overline{x_n}\in\mathbb{Z}$ și $1-\overline{x_n}\in(0,1)$. Prin urmare $[x_n]=2a_n-1$ și $\{x_n\}=1-\overline{x_n}=1-(3-\sqrt{5})^n$.

20*. Fie $x_n=(x+\sqrt{y})^n+(x-\sqrt{y})^n\Rightarrow x_n\in 2\mathbb{N}$ și $(x+\sqrt{y})^n=$
$=x_n-1+1-(x-\sqrt{y})^n=x_n-1+1-(\sqrt{y+1}-\sqrt{y})^n$, unde $(\sqrt{y+1}-\sqrt{y})^n\in(0,1)\Rightarrow 1-(\sqrt{y+1}-\sqrt{y})^n\in(0,1)$,
$\left[(x+\sqrt{y})^n\right]=\left[x_n-1+1-(\sqrt{y+1}-\sqrt{y})^n\right]=x_n-1$ impar.

G.M. nr. 12/1982

Scanned with OKEN Scanner

21*. Considerăm $E = (3+2\sqrt{3})^{1997} + (3-2\sqrt{2})^{1997} = 6k$ și cum $0 < 3-2\sqrt{2} < 1$, atunci $\left[(3+2\sqrt{3})^{1997}\right] =$

$= \left[(3+2\sqrt{3})^{1997} + (3-2\sqrt{2})^{1997} - (3-2\sqrt{2})^{1997}\right] = 6k-1.$

În general avem $\left[(3+2\sqrt{2})^{2n+1}\right] = M_6 - 1.$

Concursul „Gh. Țițeica", 1997, Concursul „Traian Lalescu", 2001

22.** a) Avem $(2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n = 2p_n$, dar $0 < 2-\sqrt{2} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2-\sqrt{2})^n \in (0,1)$. Avem $\left[(2+\sqrt{2})^n\right] = \left[2p_n - (2-\sqrt{2})^n\right] =$

$= 2p_n + \left[-(2-\sqrt{2})^n\right] = 2p_n - 1.$

b) $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n = 2b_n \in \mathbb{N}$ și cum $0 < \sqrt{2}-1 < 1 \Rightarrow$

$(1+\sqrt{2})^n = 2b_n - (1-\sqrt{2})^n \Rightarrow \left[(1+\sqrt{2})^n\right] = 2b_n + \left[-(1-\sqrt{2})^n\right] =$

$= \begin{cases} 2b_n + \left[-(1-\sqrt{2})^n\right], n \text{ par} \\ 2b_n + \left[(\sqrt{2}-1)^n\right], n \text{ impar} \end{cases} = \begin{cases} 2b_n - 1, n \text{ par} \\ 2b_n, \quad n \text{ impar} \end{cases}$

23.** Cum $(2+\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n \in \mathbb{N}^*$. Avem $(2+\sqrt{3})^n =$

$= \underbrace{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}_{a_n} - (2-\sqrt{3})^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[(2+\sqrt{3})^n\right] = a_n + \left[-(2-\sqrt{3})^n\right] = a_n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [\alpha^n] + 1 = \alpha^n + (2-\sqrt{3})^n = \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} = \alpha^n + \alpha^{-n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha^n - [\alpha^n] = 1 - \alpha^{-n}.$

Irlanda, 2002

24*. a) $\frac{4}{37} = 0,(108) \Rightarrow a_{2012} = 0;$

b) $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2012} = 0 + 670(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + 1 +$

$+0 = 670 \cdot 9 + 1 = 6031.$

c) Avem $2(8-1)^n + 3(8-3)^n - 1 = 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^{n-1} - 1 \vdots 8.$

Concursul „Adolf Haimovici", 2013

25. Fie $x_n = (\sqrt{2501}+50)^{2n+1}$.

$(50+\sqrt{2501})^{2n+1} + (50-\sqrt{2501})^{2n+1} = 2p_n \in \mathbb{N},$

$x_n = (\sqrt{2501}+50)^{2n+1} = 2p_n - (50-\sqrt{2501})^{2n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow [x_n] = 2p_n + \left[(\sqrt{2501}-50)^{2n+1}\right] = 2p_n, x_n = [x_n] + \{x_n\} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= 2p_n + \left(\sqrt{2501} - 50\right)^{2n+1} = 2p_n + \dfrac{1}{\left(\sqrt{2501} + 50\right)^{2n+1}} <$

$< 2p_n + \dfrac{1}{100^{2n+1}}, \{x_n\} < \underbrace{0{,}00\ldots0ab}_{4n+2, de\ zero}.$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, G.M. 1981

26*. Avem $A = \left(45 + \sqrt{2004}\right)^{2005} + \left(45 - \sqrt{2004}\right)^{2005} =$

$= 2\sum_{k=0}^{1002} C_{2005}^{2k} 45^{2005-2k} (2004)^k$, un număr natural divizibil cu 90.

Rezultă că $\left(45 + \sqrt{2004}\right)^{2005} = A - \left(45 - \sqrt{2004}\right)^{2005} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\left(45 + \sqrt{2004}\right)^{2005}\right] = A - 1$ şi de unde rezultă concluzia.

R.M.T. nr.1/2005

27*. Fie $a_n = \left(\sqrt{3} + 1\right)^{2n}$ şi $a_n' = \left(\sqrt{3} + 1\right)^{2n} \in (0,1) \Rightarrow a_n + a_n'$ întreg, par şi $\left(\sqrt{3} + 1\right)^{2n} = a_n + a_n' - a_n' \Rightarrow \left[\left(\sqrt{3} + 1\right)^{2n}\right] = a_n + a_n' + [-a_n'] =$

$= a_n + a_n' - 1 \Rightarrow \left[\left(\sqrt{3} + 1\right)^{2n}\right] + 1 = a_n + a_n' = \left(4 + 2\sqrt{3}\right)^n + \left(4 - 2\sqrt{3}\right)^n$

$= 2^n\left[\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right] = 2^n M_2 = M_{2^{n+1}}$ deoarece

$\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$ este par, deci $\left[\left(\sqrt{3} + 1\right)^{2n}\right] + 1$ este divizibil cu 2^{n+1}.

28*. Avem $y_n = \left(p + \sqrt{q}\right)^n + \left(p - \sqrt{q}\right)^n$ care este număr par $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(p + \sqrt{q}\right)^n = y_n - \left(p - \sqrt{q}\right)^n$, unde $-1 < p - \sqrt{q} < 0$. Dacă n este impar, $-1 < \left(p - \sqrt{q}\right)^n < 0$ şi dacă n este par, atunci $0 < \left(p - \sqrt{q}\right)^n < 1$.

Avem $\overline{x_n} = \left[\left(p + \sqrt{q}\right)^n\right] = \left[y_n - \left(p - \sqrt{q}\right)^n\right] = y_n + \left[-\left(p - \sqrt{q}\right)^n\right] =$

$= \begin{cases} y_n, & \text{par, dacă } n \text{ impar} \\ y_n - 1, & \text{impar, dacă } n \text{ par} \end{cases}$

G.M. nr. 8/2005

29. $1994 = 4 \cdot 498 + 2 = 4n + 2 = 2(2n + 1)$. Avem $\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)^{1994} =$

$= \left(12 + 2\sqrt{35}\right)^{2n+1}$.

Observăm că $a_n = \left(12 + 2\sqrt{35}\right)^{2n+1} + \left(12 - 2\sqrt{35}\right)^{2n+1} \in \mathbb{N}^*$ şi cum

$12 + 2\sqrt{35} \in (0,1) \Rightarrow \left(12 + 2\sqrt{35}\right)^{2n+1} = a_n - \left(12 - 2\sqrt{35}\right)^{2n+1} \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow \left[(12+2\sqrt{35})^{2n+1}\right] = a_n - 1$, dar $a_n \vdots 48 \Rightarrow \left[(\sqrt{7}+\sqrt{5})^{1994}\right] = M_{48} - 1$, deci restul este 47.

Liliana Niculescu , R.M.C.

30*. Evident $(2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p =$

$= 2\left[2^p + C_p^2 2^{p-2}\cdot 5 + C_p^4 2^{p-4}\cdot 5^2 + C_p^{p-1} 2\cdot 5^{\frac{p-1}{2}}\right] = 2a_p = 2pa_p'$

(deoarece $C_p^k \vdots p, a_p' \in \mathbb{N}^*$) și $(2-\sqrt{5})^p \in (-1,0)$ p impar. Rezultă

$\left[(2+\sqrt{5})^p\right] - 2^{p+1} = \left[2pa_p' - (2-\sqrt{5})^p\right] - 2^{p+1} =$

$= 2a_p + \left[-(2-\sqrt{5})^p\right] - 2^{p+1} = 2a_p + \left[(\sqrt{5}-2)^p\right] - 2^{p+1} =$

$= 2a_p - 2^{p+1} = C_p^2 2^{p-1}\cdot 5 + C_p^4 2^{p-4}\cdot 5^{-2} + C_p^{p-1} 2\cdot 5^{\frac{p-1}{2}}$

care este divizibil la p, chiar la $2p$.

31**. Fie $a = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ și $b = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ unde a și b sunt rădăcinile ecuației $x^2 - 3x - 2 = 0$. Notăm cu $\sigma_n = a^n + b^n$ și avem $\sigma_{n+2} =$

$= (a+b)(a^{n+1}+b^{n+1}) - ab(a^n+b^n) = 3\sigma_{n+1} - 2\sigma_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ cu $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 13$ numere impare și se deduce ușor că σ_n este număr natural impar. Cum $-1 < b < 0 \Rightarrow 0 < b^n < 1$ pentru n par și $-1 < b^n < 0$ pentru n impar. Din $\sigma_n = a^n + b^n \Rightarrow a^n = \sigma_n - b^n \Rightarrow [\sigma_n - b^n] = \sigma_n + [-b^n] =$

$= \begin{cases} \sigma_n - 1, \text{dacă } n \text{ par} \\ \sigma_n, \quad \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}$, deci $[a^n] = a_n$ este par dacă n este par și impar dacă n este impar.

32**. a) Întrucât $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ este număr par, avem:

$\left[(1+\sqrt{2})^n\right] = \left[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right] = (1+\sqrt{2})^n +$

$+(1-\sqrt{2})^n + \left[-(1-\sqrt{2})^n\right] = 2k + \left[-(1-\sqrt{2})^n\right]$. Dacă n par rezultă $\left[(1+\sqrt{2})^n\right] = 2k-1$ și $n+1$ impar. Dacă n impar, $n+1$ par și $\left[(1+\sqrt{2})^n\right] = 2k + 0 = 2k$, prin urmare $\left[(1+\sqrt{2})^n\right] \equiv n+1 \pmod 2$;

b) Din punctul a) rezultă $\left[(1+\sqrt{2})^n\right] + n \equiv 2n+1 \pmod 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[(1+\sqrt{2})^n\right] + n$ este impar.

Concurs Germania (1997-1998)

33***. Notăm $a = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} \Rightarrow a^3 = 6a + 6 \Rightarrow a^3 - 6a - 6 = 0$, deci a este singura soluție reală a ecuației $x^3 - 6x - 6 = 0$.

Arătăm $\sqrt[3]{23} < a < \sqrt[3]{24}$ (1) $\Leftrightarrow 23 < a^3 < 24 \Rightarrow [a^3] = 23$. Inegalitățile din (1) se demonstrează prin reducere la absurd.

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că $a \geq \sqrt[3]{24} \Rightarrow 6a+6 \geq 24 \Rightarrow a^3 \geq 27 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6a+6 \geq 27 \Rightarrow a \geq \frac{7}{2} \Rightarrow 2\sqrt[3]{4} \geq a \geq \frac{7}{2} \Rightarrow \sqrt[3]{4} \geq \frac{7}{4} \Rightarrow 4 \geq \frac{334}{64}$, fals.

Analog, dacă $a \leq \sqrt[3]{23} \Rightarrow a^3 \leq 23 \Rightarrow 6a+6 \leq 23 \leq a \leq \frac{17}{6} \Rightarrow a^3 \leq \frac{284}{36} \Rightarrow$
$\Rightarrow 6a+6 \leq \frac{289}{36} \Rightarrow a \leq \frac{73}{216}$, fals.

34***. Evident din egalitatea dată rezultă că $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2p-1} = 1+m-n\sqrt{3}$ și din adunare rezultă: $m = \frac{1}{2}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{2p-1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2p-1} - 2\right) =$

$= \frac{1}{2^{2p}}\left(\left(4+2\sqrt{3}\right)^{2p-1} + \left(4-2\sqrt{3}\right)^{2p-1} - 2\cdot 3^{2p-1}\right) =$

$= \frac{1}{2^{2p}}\left(\left(1+\sqrt{3}\right)^{2p-1} + \left(1-\sqrt{3}\right)^{2p-1}\right)^2 =$

$= \left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2p-1} + \left(1-\sqrt{3}\right)^{2p-1}}{2^p}\right)^2, m \in \mathbb{Z},$

rezultă ușor din binomul lui Newton în $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2p-1} = 1+m+n\sqrt{3}$.

Se poate arăta prin inducție că $\left(1+\sqrt{3}\right)^{2p-1} + \left(1-\sqrt{3}\right)^{2p-1} \vdots 2^p$ și $\left(1+\sqrt{3}\right)^{2p} + \left(1-\sqrt{3}\right)^{2p} \vdots 2^p, \forall\, p \in \mathbb{N}^*$.

Olimpiadă S.U.A., 1982

35**. Utilizând dezvoltările după binomul lui Newton rezultă că $\sqrt{3}[M_3 - 2C_n'] = 0 \Rightarrow C_n' = M_3 \Rightarrow n = 3k$ și

$A_n = \left(3+\sqrt{3}\right)^{3k} + \left(1-2\sqrt{3}\right)^{3k} = \left(54+30\sqrt{3}\right)^k + \left(37-30\sqrt{3}\right)^k$ (*).

Pentru $k=1 \Rightarrow A_n \in \mathbb{Z}$, deci $n=3$. Pentru $k>1$ fiecare termen din primul binom din (*) care conține pe $\sqrt{3}$ este mai mare decât termenul corespunzător din al doilea binom, deci nu se pot reduce. Rezultă că $A_n \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Concurs Bulgaria, 1988

36. Evident pentru $m=n=0$ are loc egalitatea. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ pentru care are loc egalitatea de mai sus, atunci rezultă că și $\left(5-3\sqrt{2}\right)^m =$
$= \left(3-5\sqrt{2}\right)^n$ dar care este imposibilă , deoarece $0 < 5-3\sqrt{2} < 1$ și $5\sqrt{2}-3 > 1$, pentru n par (altfel membrul drept ar fi negativ).

Olimpiada U.R.S.S., 1983

37***. Notăm $A = \left(m+\sqrt{m^2-1}\right)^n, \bar{A} = \left(m-\sqrt{m^2-1}\right)^n$. Prin inducție se deduce că: $A = x_n + y_n\sqrt{m^2-1}, \bar{A} = x_n - y_n\sqrt{m^2-1}$, cu $x_n, y_n \in \mathbb{N}$. Avem

Scanned with OKEN Scanner

$A = (A + \bar{A} - 1) + (1 - \bar{A}) = 2x_n - 1 + (1 - \bar{A})$, dar cum $2x_n - 1 \in \mathbb{N}$ și $1 - \bar{A} \in (0,1) \Rightarrow [A] = 2x_n - 1$ și $\{A\} = 1 - \bar{A}$.

Prin urmare, determinarea primelor $\left[\frac{n}{2}\right]$ zecimale ale lui $\bar{A}$: fie $n = 2q + r$ unde $q = \left[\frac{n}{2}\right], r \equiv n \pmod 2$.

Avem $A = \left(\left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right)^2\right)^q = \left(2m^2 - 1 + 2m\sqrt{m^2 - 1}\right)^q > 10^q$ și din $A\bar{A} = 1 \Rightarrow \bar{A} = \frac{1}{A} < \frac{1}{10^q}$ ceea ce înseamnă că primele q zecimale ale lui $\bar{A}$ sunt egale cu 0. Prin urmare, $\{A\} = 1 - \bar{A} = 1 - \underbrace{0{,}00\ldots0ab}_{q \text{ cifre}}\ldots =$

$= \underbrace{0{,}999 - 9xy}_{q \text{ cifre}}$, deci primele $q = \left[\frac{n}{2}\right]$ zecimale ale lui A sunt egale cu 9.

Nicolae Pavelescu

38***. Din problema precedentă rezultă $A = \left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right)^n$ și $a = [A]$. Avem $A = x_n + y_n\sqrt{m^2 - 1}, \bar{A} = \left(m - \sqrt{m^2 - 1}\right)$ cu $x_n, y_n \in \mathbb{N}$ și $A\bar{A} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A + \bar{A} = 2x_n \Rightarrow A^2 + \bar{A}^2 + 2 = 4x_n^2 \Rightarrow x_n^2 = \frac{A^2 + \bar{A}^2 + 2}{4}$ și $A - \bar{A} =$

$= 2y_n\sqrt{m^2 - 1} \Rightarrow (A - \bar{A})^2 = 4y_n^2(m^2 - 1), A = (A + \bar{A} - 1) + (1 - \bar{A}) =$

$= 2x_n - 1 + (1 - \bar{A}), [A] = 2x_n - 1.$

Avem $E = \frac{(a-1)(a+3)}{4(m^2-1)} = \frac{2(x_n - 1)2(x_n + 1)}{4(m^2-1)} = \frac{x_n^2 - 1}{m^2 - 1} =$

$= \frac{\frac{A^2 + \bar{A}^2 + 2}{4} - 1}{m^2 - 1} = \frac{A^2 + \bar{A}^2 - 2}{4(m^2-1)} = \frac{(A - \bar{A})^2}{4(m^2-1)} = \frac{4y_n^2(m^2-1)}{4(m^2-1)} = y_n^2.$

Andrei Vasilescu, G.M. nr. 1/2010

39**. În urma dezvoltări celor două binoame rezultă că $\left(1 + \sqrt{3}\right)^n +$

$+\left(1 - \sqrt{3}\right)^n = 2a_n$ este un număr natural par, atunci

$\left(1 + \sqrt{3}\right)^n = 2a_n - \left(1 - \sqrt{3}\right)^n \Rightarrow \left[\left(1 + \sqrt{3}\right)^n\right] = \left[2a_n - \left(1 - \sqrt{3}\right)^n\right] =$

$= 2a_n + \left[-\left(1 - \sqrt{3}\right)^n\right] = \begin{cases} 2a_n - 1, & \text{dacă } n \text{ par} \\ 2a_n, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}$

Deoarece, dacă n par, $\left(1 - \sqrt{3}\right)^n \in (0,1) \Rightarrow \left[-\left(1 - \sqrt{3}\right)^n\right] = -1$, iar dacă n impar $-\left(1 - \sqrt{3}\right)^n = \left(\sqrt{3} - 1\right)^n \in (0,1) \Rightarrow \left[-\left(1 - \sqrt{3}\right)^n\right] = 0$. Prin urmare, dacă n este par $\left[\left(1 + \sqrt{3}\right)^n\right]$ este impar și nu se divide la nicio putere a lui 2. Fie n impar, $n = 2m + 1$, atunci

Scanned with OKEN Scanner

$\left[(1+\sqrt{3})^{2m+1}\right] = (1+\sqrt{3})^{2m+1} + (1-\sqrt{3})^{2m+1} =$
$= (1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^{2m} + (1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})^{2m} =$
$= (1+\sqrt{3})\left[(4+2\sqrt{3})^{m} + (1-\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})^{m}\right] =$
$= 2^m\left[(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{m} + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{m}\right] =$
$= 2^m\left\{(2+\sqrt{3})^{m} + (2-\sqrt{3})^{m} + \sqrt{3}\left[(2+\sqrt{3})^{m} - (2-\sqrt{3})^{m}\right]\right\} =$
$\left(\text{deoarece } (2+\sqrt{3})^{m} = a_m + b_m\sqrt{3} \text{ unde } a_m, b_m \in \mathbb{Z}, \text{atunci } (2-\sqrt{3})^{m} = a_m - b_m\sqrt{3}\right)$
$= 2^m(2a_m + 6b_m) = 2^m(a_m + 3b_m)$ și $a_m + 3b_m$ este impar. Într-adevăr
$(a_m - 3b_m)(a_m + 3b_m) = a_m^2 - 9b_m^2 = a_m^2 - 3b_m^2 - 6b_m^2 =$
$= (a_m - \sqrt{3}b_m)(a_m + \sqrt{3}b_m) - 6b_m^2 = (2-\sqrt{3})^{m}(2+\sqrt{3})^{m} - 6b_m^2 =$
$= 1 - 6b_m^2.$

Așadar puterea cea mai mare a lui 2 prin care se divide $\left[(1+\sqrt{3})^{n}\right]$, pentru n impar este $m+1 = \frac{n+1}{2} = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Deci $\left[(1+\sqrt{3})^{2m+1}\right] \vdots 2^{m+1}$.

Concurs G.M.

40*.** Cum $(2+\sqrt{2})^{n} + (2-\sqrt{2})^{n} \in \mathbb{N}^*$, deci $\left[4^n - (2+\sqrt{2})^{n}\right] =$
$= 4^n - (2+\sqrt{2})^{n} - (2-\sqrt{2})^{n}$. Trebuie să arătăm că există $x, y, z \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a_{n+3} = xa_{n+2} + ya_{n+1} + za_n$, unde $a_0 = 0, a_1 = 4, a_2 = 24$, $a_3 = 120, a_4 = 560$ (1). Din relația (1) rezultă relațiile de recurență pentru termenii $4^k, (2+\sqrt{2})^{k}, (2-\sqrt{2})^{k}$, $k \in \{n, n+1, n+2, n+3\}$. Avem:

$$\begin{cases} 4^{n+3} = 4^{n+2}x + 4^{n+1}y + 4^n z \\ (2+\sqrt{2})^{n+3} = (2+\sqrt{2})^{n+2}x + (2+\sqrt{2})^{n+1}y + (2+\sqrt{2})^{n}z \\ (2-\sqrt{2})^{n+3} = (2-\sqrt{2})^{n+2}x + (2-\sqrt{2})^{n+1}y + (2-\sqrt{2})^{n}z \end{cases}$$

de unde rezultă: $\begin{cases} 4^2x + 4y + z = 4^3 \\ (2+\sqrt{2})^{2}x + (2+\sqrt{2})y + z = (2+\sqrt{2})^{3} \\ (2-\sqrt{2})^{2}x + (2-\sqrt{2})y + z = (2-\sqrt{2})^{3} \end{cases}$ (2).

Din (2) rezultă $x = 8, y = -18, z = 8$ și recurența (1) devine:

$$a_{n+3} = 8a_{n+2} - 18a_{n+1} + 8a_n \quad (3).$$

Scanned with OKEN Scanner

Numerele naturale n impare și nedivizibile cu 3, adică $n = 6m \pm 1, m \in \mathbb{N}$ dar cum $112 = 2^4 \cdot 7$ și cum numerele $a_n, n \geq 4, a_{6m\pm1} \vdots 16$, mai trebuie să arătăm că $a_{6m\pm1} \vdots 7$. Trecem relația (1) în clase de resturi și $a_{n+3} \equiv a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n \pmod 7 \equiv 4a_{n+1} + 4a_n + a_{n-1} \pmod 7 \equiv$ $\equiv a_n - a_{n-1} + 4a_{n-2} \pmod 7 \equiv a_{n-3} \pmod 7$ (se ține seama mereu de (3)). Prin urmare șirul $\{a_n \pmod 7\}$ este periodic cu perioada 6. Avem $a_{6m-1} \vdots 112$ și $a_5 \vdots 4a_3 + 4a_2 + a_1 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7$ și $a_5 \vdots 16 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_5 \vdots 112$ și prin urmare $a_{6m-1} \vdots 112$ (primul n impar, nedivizibil cu 3 este 5).

I.M.O., 1990

41.** Evident din $(2+\sqrt{3})^{2n+1} + (2-\sqrt{3})^{2n+1} = A \in \mathbb{Z}$ și $(2+\sqrt{3})^{2n+1} =$ $= (2+\sqrt{3})^{2n+1} + (2-\sqrt{3})^{2n+1} - (2-\sqrt{3})^{2n+1} = A - (2-\sqrt{3})^{2n+1} \Rightarrow$ $\Rightarrow \left[(2+\sqrt{3})^{2n+1} = A - 1 = (2+\sqrt{3})^{2n+1} + (2-\sqrt{3})^{2n+1} - 1\right]$ și $(4+\sqrt{15})^m = (4+\sqrt{15})^m + (4-\sqrt{15})^m - 1 = B - 1.$

Dezvoltând după binomul lui Newton obținem:

$2^{2n+1} + C_{2n+1}^2 2^{2n-1} \cdot 3 + \cdots + C_{2n+1}^{2n} 3^n \cdot 2 = 4^m + C_m^2 4^{m-2} \cdot 15 + \cdots \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{2n+1} + 3p = 4^m + 3q \Rightarrow 2^{2n+1} - 4^m \vdots 3$, fals.

Manea Cosmin, Petrică Dragoș, L.S. O.N., 2008

42*.** a) Presupunând prin absurd că are loc a) atunci $\{m\sqrt{a}\} = \{-n\sqrt{a}\}$ deoarece $ma, na \in \mathbb{N} \Rightarrow m\sqrt{a} + n\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$, absurd. Așadar, are loc a).

b) Presupunând prin absurd că există $m, n \in \mathbb{N}^*$ diferite și $A \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A = [m(a+\sqrt{a})] = [n(a-\sqrt{a})] \Rightarrow A < m(a+\sqrt{a}) < A+1$, $A < n(a-\sqrt{a}) < A+1$ (cu inegalități stricte, deoarece $m(a+\sqrt{a})$, $n(a-\sqrt{a}) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) $\Rightarrow \dfrac{A}{a+\sqrt{a}} < m < \dfrac{A+1}{a+\sqrt{a}}$,

$\dfrac{A}{a-\sqrt{a}} < n < \dfrac{A+1}{a-\sqrt{a}} \Rightarrow A\dfrac{2}{a-1} < m+n < (A+1)\dfrac{2}{a-1}$,

$A < \dfrac{a-1}{2}(m+n) < A+1$, contradicție $\left(\dfrac{(a-1)(m+n)}{2} \in \mathbb{N}^*\right)$.

Observație: Problema poate fi considerată ca parte din teorema lui Beatty (vezi ultimul capitol) care afirmă că mulțimile de tipul $[na]$ și $[nb]$ determină o partiție a mulțimii numerelor naturale, dacă și numai dacă $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ cu $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.

O.N., 2014

Scanned with OKEN Scanner

§ 3.

43. Evident $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Dacă $1 \leq x \leq \frac{5}{3}, \frac{3}{5} \leq \frac{1}{y} \leq 1, \frac{3}{5} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{5}{3}$,

$\left(t-\frac{5}{3}\right)\left(t-\frac{3}{5}\right) \leq 0, t^2 - t\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{5}\right)+1<0, t^2-\frac{34}{15}t+1<0$,

$t+\frac{1}{t} \leq \frac{34}{15} \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq \frac{35}{115}$.

$E \leq 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c} \leq 3+3\cdot\frac{34}{15}=3+\frac{34}{5}=\frac{49}{5}=9{,}8$,

$9 \leq E < 9{,}8 \Rightarrow [E]=9$.

Gh. Andrei

44. Avem $\frac{\alpha}{2\beta}<\frac{a}{b+c}<\frac{\beta}{2\alpha} \Rightarrow \frac{3\alpha}{2\beta}<E<\frac{3\beta}{2\alpha}$ (1) și $\frac{\beta}{\alpha}<\frac{3}{2}, \frac{\alpha}{\beta}>\frac{2}{3}$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $1<\frac{3\alpha}{2\beta}<E<\frac{3}{2} \Rightarrow [E]=1$ și din (1) rezultă

$\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}<\sqrt{E}<\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ (3) și utilizând (2) $\Rightarrow 1<\sqrt{E}<\frac{3}{2} \Rightarrow [\sqrt{E}]=1$.

Gh. Andrei

45.** Utilizăm inegalitatea $\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{a+b}, \forall\, a>0, b>0$, deci

$$E(a,b,c)=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \geq$$

$$\geq \frac{2a}{2a+b+c}+\frac{2b}{2b+a+c}+\frac{2b}{2c+a+b} \geq \frac{2a+2b+2c}{2a+2b+2c}=1.$$

Pe de altă parte avem:

$$E=\sqrt{\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}\cdot\frac{b}{b+a}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}\cdot\frac{c}{a+b}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{b}{b+a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right)=\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1<E<\frac{3}{2} \Rightarrow [E]=1$.

Gh. Szollösy, R.M.T., 2000

46.** Avem $a \leq \sqrt{a^2+a}<a+1$ și $b \leq \sqrt{b^2+b+1} \leq b+1 \Rightarrow a+b<$

$<F(a,b)<a+b+2$ și $\left[\sqrt{a^2+a}\right]=a$ și $\left[\sqrt{b^2+b+1}\right]=\begin{cases} b, & b \neq 0 \\ b+1, & b=0 \end{cases} \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow E(a,b)=\begin{cases}a+b, b\neq 0\\ a+1, b=0\end{cases}$ și analog $F(a,b)=\begin{cases}a^3+b^3, b\neq 0\\ a^3+1, \ b=0\end{cases}$.

Dacă $b\neq 0, 3E=2F \Leftrightarrow 3(a+b)=2(a^3+b^3) \Leftrightarrow 2(a^2-ab+b^2)=3$, imposibil. Pentru $b=0$, rezultă $a=0$. Prin urmare, unica pereche este $(a,b)=(0,0)$.

Lucian Dragomir, R.M.T., 2003

47**. Fie funcția $f:[1,3]\to\mathbb{R}, f(a)=\dfrac{b+c}{bc}a+(b+c)\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}$ și cum f este descrescătoare pe $[1,\sqrt{bc}]$ și crescătoare pe $[\sqrt{bc},3]$, deci

$\text{Im}f=\left[f(\sqrt{bc}), \max f(1)f(3)\right]\subset\left[6,\dfrac{26}{3}\right]$.

Cum $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{a+c}{b}+\dfrac{a+b}{c}\geq 6\Rightarrow E\geq 6$ și prin urmare $[E]\in\{6,7,8\}$.

Pentru $a=b=c\Rightarrow [E]=6$ și pentru $a=1, b=c=3\Rightarrow [E]=8$.

Deoarece $E\in\left[6,\dfrac{26}{3}\right]\Rightarrow\sqrt{6}<\sqrt{E}<\sqrt{\dfrac{26}{3}}\Rightarrow[\sqrt{E}]=2$.

Sorin Peligrad, G.M., 2001

48***. Considerăm cazurile:

a) Triunghiul este ascuțitunghic sau dreptunghic, atunci $a^2\leq b^2+c^2$, $b^2\leq a^2+c^2, c^2\leq a^2+b^2$, unde cel puțin două dintre inegalități sunt stricte și atunci $E<3$.

b) Dacă triunghiul este obtuzunghic, putem presupune că $a>b>c$, atunci:

$\dfrac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq\dfrac{b+c}{\sqrt{b^2+c^2}}\leq\sqrt{2}$ (1), dar cum $a<b+c\Rightarrow$

$\Rightarrow a^2<(b+c)^2\Rightarrow\dfrac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}<\sqrt{\dfrac{(b+c)^2}{b^2+c^2}}=\sqrt{1+\dfrac{2bc}{b^2+c^2}}<\sqrt{2}$ (2).

Dar din (1) și (2) $\Rightarrow E<2\sqrt{2}<3$. Așadar, oricare ar fi triunghiul, $E<3$. Arătăm că $E\geq 2$. Într-adevăr, dacă notăm $a^2+b^2+c^2=s^2, s>0$ și

$\dfrac{a}{s}=x, \dfrac{b}{s}=y, \dfrac{c}{s}=z\Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$ și

$E=\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}$

și cum $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\geq 2t^2$, rezultă $E\geq 2(x^2+y^2+z^2)=2\Rightarrow 2\leq E<3\Rightarrow$

$\Rightarrow [E]=2$.

Meda Bujor, Argument nr. 16, 17

Scanned with OKEN Scanner

49*. Din $x-1<[x]\leq x$ rezultă $\frac{a+b}{c}-1+\frac{b+c}{a}-1+\frac{c+a}{b}-1<n\Rightarrow$
$\Rightarrow\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-3<n\Rightarrow n>2+2+2-3\Rightarrow n\geq 4.$
Pentru $n=4$ se pot lua $a=b=4,c=3$. Pentru $n=5$ se pot lua $a=b=3$, $c=2$. Pentru $n=6$ se pot lua $a=b=c=1$. Pentru $n=7$ se pot lua $a=1$, $b=c=3$. În general pentru $n=2k,k\in\mathbb{N},k\geq 4$ rezultă soluția $a=1,b=k-1,c=k+1$. Pentru $n=9\Rightarrow a=1,b=3,c=4$ și în general pentru $n=2k+1,k\in\mathbb{N},k\geq 5$ rezultă $a=1,b=k-1$, $c=k+1$.

Vasile Pop Concursul „Alexandru Papiu-Ilarian", 2015

50. Avem $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}\Rightarrow\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}<\frac{2(a+b+c)}{2}=2$ și din $(b-a)<c\Rightarrow b^2+a^2-2ab<c^2$ și analoagele (1) $\Rightarrow a^2+b^2+c^2<$ $<2(ab+bc+ac)$ (2). Dar cum $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ sunt tot laturile unui triunghi atunci (2) devine: $2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\right)>a+b+c=2\Rightarrow\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+$ $+\sqrt{ac}>1\Rightarrow 1<\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}<2\Rightarrow\left[\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\right]=1.$

Gh. Duță, O.J., 1998

51**. Notăm $a=y+z,b=x+z,c=x+y$ cu $x,y,z>0$ atunci avem:
$E=\sqrt{\frac{S-x}{S+x}}+\sqrt{\frac{S-y}{S+y}}+\sqrt{\frac{S-z}{S+z}}$, unde $S=x+y+z$. Utilizând inegalitatea C. B. S. obținem $E^3\leq 3\left(\frac{S-x}{S+x}+\frac{S-y}{S+y}+\frac{S-z}{S+z}\right)$ (1).
Vom demonstra că $\frac{S-x}{S+x}+\frac{S-y}{S+y}+\frac{S-z}{S+z}<2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(S-x)(S+y)(S+z)+(S-y)(S+x)(S+z)+$
$+(S-z)(S+x)(S+y)<2(S+x)(S+y)(S+z).$
După calcule, ultima inegalitate devine $3S(xy+yz+zx)+5xyz>0$, $\forall x,y,z>0$. Prin urmare din (1) rezultă:

$$E^2<6\text{ și }E\geq 3\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 2<\frac{3\sqrt{2}}{2}<E<\sqrt{6}\Rightarrow[E]=2.$$

Sau, cum $\frac{a}{b+c}<1,\frac{b}{a+c}<1,\frac{c}{a+b}<1\Rightarrow E<3.$

Petre Catrinaru, G.M. nr. 3/2002

Scanned with OKEN Scanner

52***. Dacă se fac notațiile $D=\frac{a+b+c}{d}, A=\frac{b+c+d}{a,}, B=\frac{c+d+a}{b}$, $C=\frac{d+a+b}{c}$, atunci $[D]+[A]+[B]+[C]>D+A+B+C-4>8$ (1), deoarece $D+A+B+C=\left(\frac{a}{d}+\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{b}{d}+\frac{d}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+$ $+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geq 12$.

Prin urmare (1) devine $[D]+[A]+[B]+[C]\geq 9$. Trebuie arătat că se atinge valoarea 9 și atunci $E_{min}=9$. De exemplu să găsim valori ale lui $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$ pentru care $[D]=3,[A]=[B]=[C]=2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\leq D<4\\2\leq A<3\\2\leq B<3\\2\leq C<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4d\leq S<5d\\3a\leq S<4a\\3b\leq S<4b\\3c\leq S<4c\end{cases}, \text{unde } S=a+b+c+d.$$

De exemplu pentru $a=b=c=5,d=4$. (se poate considera $a=b=c=n,d=n-1,\forall\, n\geq 5$).

Concurs „Beneloux", 2014

53***. Soluția 1

Avem $[nx]\leq nx<[nx]+1=0\leq x-\frac{[nx]}{n}<\frac{1}{n}\Rightarrow\left|x-\frac{[nx]}{n}\right|<1$ și

$$[a+b-c-d]=\left[a+b-c-d-\frac{[na]}{n}-\frac{nb}{n}+\frac{[nc]}{c}+\frac{[nd]}{n}\right]<\frac{4}{n},$$

$\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, prin urmare $|a+b-c-d|=0\Rightarrow a+b=c+d$.

Soluția 2

Se știe că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[an]}{n}=a$, adică pentru n suficient de mare $\frac{[an]}{n}\equiv a$ și $\frac{[an]}{n}+\frac{[bn]}{n}=\frac{[cn]}{c}+\frac{[dn]}{n}$. Prin trecere la limită rezultă $a+b=c+d$.

$[a_1n]+[a_2n]+\cdots+[a_pn]=[b_1n]+[b_2n]+\cdots+[b_pn]$,

atunci rezultă $a_1+a_2+\cdots+a_p=b_1+b_2+\cdots+b_p$, se aplică soluția 2.

54***. a) Evident dacă $a=b$ egalitatea se realizează. Pentru implicația inversă procedăm prin aducere la absurd. Dacă $a<b$, atunci $\left[\frac{a}{b}\right]=0$ și $\left[\frac{b}{a}\right]\geq 1\Rightarrow a+0=b+\left[\frac{b}{a}\right]$, fals. La fel dacă $a>b$.

Prin urmare rezultă $a=b$;

b) Căutăm $a<b<0,a,b\in\mathbb{Q}$ astfel ca $\frac{a}{b}=k\in\mathbb{Z},k>1\Rightarrow a=kb$

și $0 < \frac{b}{a} < 1 \Rightarrow \left[\frac{b}{a}\right] = 0$. Relația devine

$bk + k = b \Rightarrow b = -\frac{k}{k-1}, a = -\frac{k^2}{k-1}$, cu $k > 1, k \in \mathbb{N}^*$

și prin urmare numerele a și b de mai sus verifică egalitatea.

Căutăm $a < 0 < b, a, b \in \mathbb{Q}$ astfel ca $\frac{b}{a} = k \in \mathbb{Z}, k < 0 \Rightarrow b = ak$ și relația devine $a + \left[\frac{1}{k}\right] = ak + k$ și cum $\left[\frac{1}{k}\right] = -1$ relația devine $a - 1 = ak + k$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{k+1}{k-1}, b = \frac{k(k+1)}{k-1}, k \in \mathbb{Z}, k < 0$. Pentru aceste valori ale lui a și b se verifică egalitatea.

c) Considerăm perechile $a = \frac{k^2}{k-1}, b = \frac{k}{k-1}$ care verifică egalitatea.

Mihai Dicu, G.M. nr. 3/2014

55**. Cum $k \leq \sqrt{a} < k + 1 \Rightarrow [\sqrt{a}] = k$. Dacă $a \in [k^2, k^2 + k]$ atunci inegalitatea devine: $k \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \Leftrightarrow 2k - 1 \leq \sqrt{1 + 4a}$. Pentru $k = 0$, inegalitatea este evidentă, iar pentru $k \geq 1$ inegalitatea este echivalentă cu $k^2 - k \leq a$, care este evident adevărată.

Dacă $a \in [k^2 + k, (k+1)^2)$ inegalitatea devine $k + 1 \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k + 1 \leq \sqrt{1 + 4a} \Leftrightarrow k^2 + k \leq a$, care este adevărată.

Ovidiu Pop, G.M. nr. 5/2013

56***. Arătăm că intervalul $\left(n\sqrt{p} - \frac{\alpha}{n}, n\sqrt{p} + \frac{\alpha}{n}\right)$ nu conține nici măcar un număr natural pentru orice $n \geq \left[\frac{\alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha\sqrt{p}}}\right] + 1$. Presupunem că există

$k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $n\sqrt{p} - \frac{\alpha}{n} < k \leq n\sqrt{p} + \frac{\alpha}{n} \Rightarrow n^2 p + \frac{\alpha^2}{n^2} - 2\alpha\sqrt{p} < k^2 \leq$

$\leq n^2 p + \frac{\alpha^2}{n^2} + 2\alpha\sqrt{p}$. Se observă că $\frac{\alpha^2}{n^2} + 1 > 2\alpha\sqrt{p}$ (1) (din condiția dată $p\alpha^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha\sqrt{p} < \frac{1}{2}$) și din (1) rezultă $\frac{\alpha^2}{n^2} - 2\alpha\sqrt{p} > -1$ (2) și dacă

Scanned with OKEN Scanner

$n \geq \left[\frac{\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\sqrt{p}}}\right] + 1$, atunci $\frac{\alpha^2}{n^2} + 2\alpha\sqrt{p} < 1$,

deci $n^2p - 1 < k^2 < n^2p + 1 \Rightarrow n^2p - 1 < k^2 < n^2p + 1 \Rightarrow k^2 = n^2p \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{p} = \frac{k}{n}$, absurd, întrucât $\sqrt{p} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Aşadar, pentru $n \geq \left[\frac{\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\sqrt{p}}}\right] + 1$ intervalul $\left(n\sqrt{p} - \frac{\alpha}{n}, n\sqrt{p} + \frac{\alpha}{n}\right)$

nu conţine nici un număr natural, deci: $\left[n\sqrt{p} - \frac{\alpha}{n}\right] = \left[n\sqrt{p} + \frac{\alpha}{n}\right]$.

Dorin Andrica

57***. Fie $\frac{x}{[x]} = \frac{y}{[y]} = \frac{z}{[z]} = k \in [1,2)$, atunci $\frac{x^2}{[x]^2} = \frac{y^2}{[y]^2} = \frac{z^2}{[z]^2} =$
$= \frac{x^2+y^2+z^2}{[x]^2+[y]^2+[z]^2} = k^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = k\sqrt{\{x\}^2+\{y\}^2+\{z\}^2}$ (1)
şi cum $\frac{x-[x]}{[x]} = \frac{y-[y]}{[y]} = \frac{z-[z]}{[z]} = k-1 \Rightarrow \frac{\{x\}^2}{[x]^2} = \frac{\{y\}^2}{[y]^2} =$
$= \frac{\{z\}^2}{[z]^2} = \frac{\{x\}^2+\{y\}^2+\{z\}^2}{[x]^2+[y]^2+[z]^2} = (k-1)^2 \Rightarrow \sqrt{\{x\}^2+\{y\}^2+\{z\}^2} =$
$= (k-1)\sqrt{[x]^2+[y]^2+[z]^2}$ (2).
Scăzând membru cu membru (1) din (2) rezultă concluzia. Dacă
$x, y, z \in (-\infty, -1] \Rightarrow k \in (0,1]$ şi procedând analog rezultă:
$\sqrt{[x]^2+[y]^2+[z]^2} - \sqrt{\{x\}^2+\{y\}^2+\{z\}^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Dan Plăeşu, R.M., 2007

58***. Evident $\{x\} \in [0,1)$ şi pentru $x = 1 \Rightarrow \{a\} + \{b\} = 0 \Rightarrow \{a\} = \{b\} =$
$= 0 \Rightarrow a, b \in \mathbb{Z}$. Presupunând $a \neq 0$ şi $b \neq 0 \Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $a\alpha$,
$b\alpha \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \{a\alpha\} + \{b\alpha\} = \{\alpha\}$ (1) şi $\{-a\alpha\} + \{-b\alpha\} = \{-\alpha\}$ (2) şi cum
$\{x\} + \{-x\} = 1, \forall\, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ atunci din (1) şi (2) rezultă $2 = 1$, absurd.
Aşadar $a = 0$ sau $b = 0$. Dacă $b = 0 \Rightarrow \{a\alpha\} - \{x\}, \forall\, x \in \mathbb{R}$, deci
$ax - x \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 1$. Prin urmare $a = 1, b = 0$ sau $a = 0, b = 1$.

Gh. Dumitrescu

59***. a) Arătăm că $a \neq b$. Dacă $a = b \Rightarrow 2[x + a] = [2x], \forall\, x \in \mathbb{R}$. Pentru
$x = -a$, $0 = [-2a]$ rezultă că a nu poate fi strict pozitiv, iar pentru
$a = 0 \Rightarrow 2[x] = [2x]$, fals. Dacă $a < 0 \Rightarrow 2[2a] = [2a]$, fals. Prin urmare
$a \neq b$.
Să presupunem $0 \leq a < b$, atunci pentru $x = -a \neq 0$, $[b - a] = [-2a]$,
fals.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare $a = 0$ și relația devine $[x] + [x + b] = [2x], \forall\, x \in \mathbb{R}$. Ținând seama de identitatea lui Hermite $\Rightarrow [2x] - [x] = \left[x + \frac{1}{2}\right] = [x + b]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Arătăm că $b = \frac{1}{2}$. În relația $[x + b] = \left[x + \frac{1}{2}\right]$ $(*)$, fie $b > \frac{1}{2}$. Atunci pentru $x = -b$ în $(*)$ rezultă o contradicție.

Dacă $b \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, atunci pentru $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left[b - \frac{1}{2}\right] = 0$, fals.

b) Notăm $f(x) = \sum_{k=1}^{n} [x + a_k]$ atunci relația devine $f(x) = [2x]$.

Pentru $x = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} [a_k] = 0$ (1) și pentru $x = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} [1 + a_k] = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n + \sum_{k=1}^{n} [a_k] = 2 \Rightarrow n = 2.$

Atunci $a_1 = a, a_2 = b$ și relația devine: $[x + a] + [x + b] = [2x], \forall\, x \in \mathbb{R}$, și din punctul a) rezultă $a = 0$ și $b = \frac{1}{2}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu

60***. Observăm că $T = 1$ este perioadă și vom utiliza $x \in [0,1]$.

Pentru $x = 0 \Rightarrow [a] + [b] = [c]$ (1),

$x = \frac{1}{3} \Rightarrow \left[a + \frac{1}{3}\right] + \left[b + \frac{2}{3}\right] = [c] + 1$ (2),

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[a + \frac{1}{2}\right] + \left[b + \frac{1}{2}\right] = \left[c + \frac{1}{2}\right]$ (3),

$x = \frac{2}{3} \Rightarrow \left[a + \frac{2}{3}\right] + \left[b + \frac{1}{3}\right] = [c] + 1$ (4),

$x = \frac{1}{6} \Rightarrow \left[a + \frac{1}{6}\right] + \left[b + \frac{1}{3}\right] = \left[c + \frac{1}{2}\right]$ (5),

$x = \frac{5}{6} \Rightarrow \left[a + \frac{5}{6}\right] + \left[b + \frac{2}{3}\right] = \left[c + \frac{1}{2}\right] + 1$ (6).

Din (1), (2), (4) rezultă: $\left[a + \frac{1}{3}\right] + \left[b + \frac{2}{3}\right] = \left[a + \frac{2}{3}\right] + \left[b + \frac{1}{3}\right] =$

$= [a] + [b] + 1$ (7), falsă pentru $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ și $b \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ sau $b \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$ apoi pentru $a \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$ și $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ sau $b \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$, analog.

Scanned with OKEN Scanner

Rămâne cazul $a \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ și $b \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Din (3), (5) și (6) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[c+\frac{1}{2}\right] = \left[a+\frac{1}{2}\right] + [b] = \left[a+\frac{1}{6}\right] + \left[b+\frac{1}{3}\right] = \left[a+\frac{5}{6}\right] + \left[b+\frac{2}{3}\right] - 1$ (8).

Relația (8) este falsă pentru $a \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ și $b \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Așadar, nu există $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care să aibă loc egalitatea.

Ion Nedelcu, G.M. nr. 10/2012

61***. Pentru $x = a^{n-1}$, atunci din $ax + by = a^n + b^n \Rightarrow y = b^{n-1}$ și identitatea se verifică. Dacă $x \neq a^{n-1} \Rightarrow y \neq b^{n-1}$ și $ax + by = a^n + b^n$ rezultă $a|b(b^{n-1} - y)$ și cum $(a, b) = 1 \Rightarrow a|b^{n-1} - y \Rightarrow \frac{b^{n-1}}{a} - \frac{y}{a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\frac{b^{n-1}}{a}\right\} = \left\{\frac{y}{a}\right\}$ (1) (s-a utilizat proprietatea $x - y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{x\} = \{y\}$)

și analog rezultă $\left\{\frac{a^{n-1}}{b}\right\} = \left\{\frac{x}{b}\right\}$. Atunci deducem că: $\left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{y}{a}\right] = \frac{x}{b} + \frac{y}{a} -$

$$- \left\{\frac{x}{b}\right\} - \left\{\frac{y}{a}\right\} = \frac{ax+by}{ab} - \left\{\frac{x}{b}\right\} - \left\{\frac{y}{a}\right\} = \frac{a^n + b^n}{ab} - \left\{\frac{a^{n-1}}{b}\right\} - \left\{\frac{b^{n-1}}{a}\right\} =$$

$$= \frac{a^{n-1}}{b} - \left\{\frac{a^{n-1}}{b}\right\} + \frac{b^{n-1}}{a} - \left\{\frac{b^{n-1}}{a}\right\} = \left[\frac{a^{n-1}}{b}\right] + \left[\frac{b^{n-1}}{a}\right].$$

Marcel Chiriță, Mihai Piticari, G.M. nr. 1/1991

62***. Soluția 1 (Variantă alternativă)

Pentru $x = y = 1 \Rightarrow [a + b] = 1 \Rightarrow a + b \geq 1$. Dacă $a + b > 1$, considerăm $x = y = \frac{1}{a+b} \in (0,1)$ și rezultă $\left[\frac{a+b}{a+b}\right] + \left[\frac{a+b}{a+b}\right] = \left[\frac{1}{a+b}\right] + \left[\frac{1}{a+b}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 = 0$, fals.

Prin urmare $a + b = 1$. Pentru $x = 1, y = 0 \Rightarrow [a] + [b] = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [a] + [b] = a + b$ și cum $[t] \leq t, (\forall)\, t \in \mathbb{R}$ cu egalitate pentru $t \in \mathbb{Z}$. Obținem $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $a + b = 1$ și $a \neq b$. Fie $a > b$, dacă $a - b > 1$, atunci luând $x = \frac{1}{a-b}$ și $y = -\frac{1}{a-b} \Rightarrow [x] = 0, [y] = -1$ și $\left[\frac{a-b}{a-b}\right] + \left[\frac{-a+b}{a-b}\right] = -1$, fals. Rămâne cazul $a - b = 1 \Rightarrow a = 1$ și $b = 0$, adică perechea $(1,0)$. Analog rezultă și perechea $(0,1)$.

Soluția 2

Pentru $x = 1, y = 0 \Rightarrow [a] + [b] = 1$ (1), iar pentru $x = -1, y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow [-a] + [-b] = -1$ (2). Însumând (1) cu (2) și ținând seama că

$[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ rezultă $[a] + [-a] + [b] + [-b] = 0 \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$[a]+[-a]=[b]+[-b]=0 \Rightarrow a,b \in \mathbb{Z}$. Pentru $x=y=1 \Rightarrow [a+b]=1$ $\Rightarrow a+b=1$. Este evident că egalitatea este adevărată pentru cazul $b=1-a \in \{0,1\} \Rightarrow b=0, a=1$ sau $b=1, a=0$. Dacă presupunem că egalitatea este verificată pentru $a=-n, b=1+n$ (cu $a+b=1, a,b \in \mathbb{Z}$), atunci egalitatea devine: $[-nx+(n+1)y]+[-ny+(n+1)x]=[x]+[y]$.

Pentru $y=0, x=\frac{1}{2(n+1)} \Rightarrow \left[-\frac{n}{2(n+1)}\right]+\left[\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{1}{2(n+1)}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow -1=0$, fals.

Gh. Dumitrescu, G.M. nr. 9/1997

63***. Notăm cu $d=a-b$, atunci pentru $y=-x \Rightarrow$

$\Rightarrow [x(a-b)]+[-x(a-b)]=0 \Leftrightarrow [xd]+[-xd]=0$ (1) $\Rightarrow d=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b=a$ (dacă $d \neq 0$, atunci pentru $x=\frac{1}{2d}$ relația (1) $\left[\frac{1}{2}\right]+\left[-\frac{1}{2}\right]=0$, fals). Altfel, se știe că $[y]+[-y]=0 \Leftrightarrow y \in \mathbb{Z}$ și prin urmare $xd \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (2) $\Rightarrow d=0$ (dacă $d \neq 0$, atunci pentru $x=\frac{1}{2d}$ relația (2) este falsă).

Relația devine $2[a(x+y)]=2a[x+y] \Rightarrow [a(x+y)]=a[x+y]$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$ (3).

Pentru $x+y=1 \Rightarrow [a]=a \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$. Evident, $a=0=b$ este soluție. Dacă $a \neq 0$ din (3) $\Rightarrow a[x+y] \leq a(x+y)$ și pentru $x+y=\frac{1}{2}$ rezultă $a \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \geq 1, a \in \mathbb{N}^*$. Pentru $x+y=\frac{1}{a}$ relația (3) devine: $1=a\left[\frac{1}{a}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{a}\right]=\frac{1}{a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a=1$. Așadar, $a=b=0$ sau $a=b=1$.

O.J., 2015

§ 4.

64***. Dacă $a=1$, egalitatea este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dacă $a \in (0,1) \Rightarrow$ $\Rightarrow [a]=0 \Rightarrow [na^2]=0, \forall n \in \mathbb{N}$, fals, deci $a>1$. Fie $a=[a]+\{a\}=k+t$, $k \in \mathbb{N}^*, t \in [0,1)$. Trebuie să arătăm că $a \in \mathbb{N}^*$, deci $t=0$. Înlocuind în relația dată rezultă: $[2knt+nt^2]=[knt]$ (1) și ținând seama că $a-1<[a] \leq a$ atunci din (1) rezultă: $2knt+nt^2-1<nkt \Rightarrow$

$\Rightarrow kt+t^2<\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow t(k+t) \leq 0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow a \in \mathbb{N}$ (deoarece $k \geq 1$).

Ion Cucurezeanu

65**. Fie $a=[a]+\{a\}=k+t$, $k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ atunci egalitatea devine $[2nt]=2[nt], \forall n \in \mathbb{N}$. Vom arăta că $t=0$. Presupunem prin absurd că

Scanned with OKEN Scanner

$t \in (0,1) \Rightarrow [t] = 0$. Pentru $k \in \mathbb{N}^*$ avem $[2^k\alpha] = 2[2^{k-1}\alpha] = \cdots = 2^k[\alpha] = Q \Rightarrow [2^k\alpha] = 0 \Rightarrow 0 < 2^k\alpha < 1, \forall\ k \in \mathbb{N}^*$, absurd.

Ion Cucurezeanu

66***. Din $a^2 = a + 1 \Rightarrow na^2 = na + n \Rightarrow [a^2n] = [na + n] = n + [an]$.

Din $a^2 = a + 1 \Rightarrow a = 1 + \frac{1}{a}, [a[an]] = \left[\left(1 + \frac{1}{a}\right)[an]\right] = \left[[an] + \frac{[an]}{a}\right] =$

$= [an] + \left[\frac{[an]}{a}\right]$.

Dar $an - 1 < [an] < an \Rightarrow n - \frac{1}{a} < \frac{[an]}{a} < n \Rightarrow \left[n - \frac{1}{a}\right] \leq$

$\leq \left[\frac{[an]}{a}\right] < n \Rightarrow n + \left[-\frac{1}{a}\right] \leq \left[\frac{[an]}{a}\right] \leq n - 1 \Rightarrow n - 1 \leq \left[\frac{[an]}{a}\right] \leq n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{[an]}{a}\right] = n - 1$. Așadar $[a^2n] = [an] + n$ și $[a[an]] = [an] + n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [a[an]] + 1 = [an] + n$.

Olimpiadă Austria, 1984

67***. Din $a^2 = 1 - a \Rightarrow [a^2n] = [-an + n] = [-an] + n = -[an] - 1 + n$.

Din $a = \frac{1}{a} - 1 \Rightarrow [a[an]] = \left[-[an] + \frac{[an]}{a}\right] = -[an] + \left[\frac{[an]}{a}\right]$. Din

$[an] < an \Rightarrow \frac{[an]}{a} > n \Rightarrow \left[\frac{[an]}{a}\right] \geq n$. Din $[an] > an - 1 \Rightarrow \frac{[an]}{a} < n - \frac{1}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{[an]}{a}\right] \leq \left[n - \frac{1}{a}\right] = n \Rightarrow \left[\frac{[an]}{a}\right] = n, [a^2n] = -[an] - 1 + n$ și

$[a[an]] = -[an] + n$ de unde rezultă egalitatea cerută.

Ion Cucurezeanu, 1987

68***. <u>Soluția 1</u>

Vom arăta că a nu poate fi în cazurile:

1) $a < 0$, 2) $0 \leq a < 1$, 3) $1 \leq a < 2$, 4) $2 \leq a < 3$, 5) $a \geq 4$.

Pentru $n = 1 \Rightarrow 4[a] = 1 + [a[a]] \Rightarrow [a[a] - 4[a]] = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(a - 4)[a]] = -1$ $(*)$ și evident egalitatea $(*)$ nu poate avea loc în nici unul din cele 5 cazuri de mai sus. Fie $3 \leq a < 4 \Rightarrow [a] = 3$. Avem $4[an] - n = [a[an]] \leq a[an] < 4[an] - n + 1 \Rightarrow 0 \leq (a - 4)[an] + n <$

$< 1 \Rightarrow 0 \leq (a - 4)(an - \{an\} + n) < 1 \Rightarrow 0 \leq (a - 4)an - (a - 4)\{an\} +$

$+ n < 1 \Rightarrow 0 \leq (a - 4)an - b + n < 1$ $(**)$, unde $b = (a - 4)\{an\}$ și

$-1 < b < 0$.

Într-adevăr avem, $-1 < a - 4 < 0$ și $-1 < -\{an\} < (a - 4)\{an\} < 0$.

Din $(**)$ rezultă: $-1 < b \leq (a - 4)an + n < 1 + \alpha < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 < n(a^2-4a+1) < 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} < a^2-4a+1 < \frac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$

deci ultima inegalitate are loc dacă $a = 2+\sqrt{3}$.

Soluția 2

Din egalitatea dată rezultă: $4(an-1) < n + a(an)$ și

$4an > n + a(an-1) - 1 \Rightarrow 1 + a^2 - \frac{a+1}{n} < 4a < 1 + a^2 + \frac{4}{n}.$

Pentru n suficient de mare $(n \to \infty)$ rezultă că $1 + a^2 = 4a \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \{2 \pm \sqrt{3}\}$.

Pentru $n = 1$, $a = 2 - \sqrt{3}$ nu convine. Arătăm că $a = 2 + \sqrt{3}$ este numărul căutat.

Dacă notăm cu $b = \left[\frac{n}{a}\right] \Leftrightarrow \frac{n}{a} - 1 < b \leq \frac{n}{a} \Leftrightarrow -\frac{a}{n} \leq -b < -\frac{a}{n} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{a}{n} - 1 < -b - 1 < -\frac{a}{n} < -b \Rightarrow \left[-\frac{a}{n}\right] = -b - 1.$

Avem $n + [a[an]] = [n + a([an])] = [n + a([an])] = \left[n + a\left[4n - \frac{n}{a}\right]\right] =$

$= \left[n + 4an - a\left[-\frac{n}{a}\right]\right] = [n + 4an + a(-b-1)] = [n + a(4n - b - 1)] =$

$= [a(4n-1) + n - ab] = [a(4n-1) + ac] = [a(4n - 1 + c)] =$

$= \left[\left(4 - \frac{1}{a}\right)(4n - 1 + c)\right] = \left[4(4n-1) - 4\left(\frac{n}{a} - c\right) + \frac{1-c}{a}\right] =$

$= 4(4n - 1 - b) = 4\left[4n - \frac{n}{a}\right] = 4[an].$

Prin urmare $a = 2 + \sqrt{3}$ este numărul căutat.

Olimpiadă Bulgaria, 2003

69***. Utilizăm identitatea lui Hermite

$[mx] - [x] = \sum_{i=1}^{m-1} \left[x + \frac{i}{m}\right]$ (1), $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \forall\, m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Facem substituția $x \to \frac{x}{m^k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{x}{m^{k-1}}\right] = \sum_{i=1}^{m-1} \left[\frac{x}{m^k} + \frac{i}{m}\right] = \sum_{i=1}^{m-1} \left[\frac{x + im^{k-1}}{m^k}\right]$ (2).

Însumând în (2) de la $k = 1$, la $k = n$ rezultă

$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x}{m^{k-1}}\right] - \left[\frac{x}{m^k}\right] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m-1} \left[\frac{x + im^{k-1}}{m^k}\right] = [x] - \left[\frac{x}{m^n}\right]$ (3),

$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|x| < m^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{[x]}{m^n} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{m^n}\right] = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Rezultă că suma din enunț $S = \begin{cases} [x], & x \geq 0 \\ [x]+1, & x < 0 \end{cases}$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, T. Mateescu, G.M. nr. 9/1989

70*.** a) $\Rightarrow b)$ deoarece $[2na+b]+[b] = 2na+[b]+[b]$ este par, reciproc, deoarece $[2na+b]+[b]$ este par $\Rightarrow [2na+b]-[b]$ este par. De asemenea, numerele de mai jos sunt tot pare: $[2na+b]-[b]-2n[a] =$

$= [2na+b-[b]-2n[a]] = [2n(a-[a])+(b-[b])]$ (1),

$[2n(a-[a])+(b-[b])]-2n = [2n(a-[a]-1)+(b-[b])]-2n$ (2).

Dacă $\{a\} \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$, atunci numărul $n = \left[\frac{1-\{b\}}{2\{a\}}\right]+1$ verifică relația

$\frac{1-\{b\}}{2\{a\}} < n < \frac{2-\{b\}}{2\{a\}}$ (3). Într-adevăr, $\left[\frac{1-\{b\}}{2\{a\}}\right] < n \Rightarrow \frac{1-\{b\}}{2\{a\}} < n$,

iar pentru a doua inegalitate,

$n = \left[\frac{1-\{b\}}{2\{a\}}\right]+1 \leq \frac{1-\{b\}}{2\{a\}}+1 = \frac{1-\{b\}+2\{a\}}{2\{a\}} < \frac{2-\{b\}}{2\{a\}}$.

Așadar din (3) deducem că: $1 < 2n\{a\}+\{b\} < 2 \Rightarrow [2n\{a\}+\{b\}] = 1$,

(contradicție, $1 \neq$ par). Dacă $\{a\} \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, atunci $\alpha = \{a\}-1 \in \left(-\frac{1}{2},0\right)$.

În mod analog se stabilesc inegalitățile $\frac{[b]-b}{2\alpha} < n < \frac{[b]-b-1}{2\alpha}$ de unde rezultă: $-1 < 2n(a-[a]-1)+(b-[b]) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow [2n(a-[a]-1)+(b-[b])] = -1$, din nou contradicție cu (2).

Dacă $\{a\} = \frac{1}{2}$, atunci din relația (1) pentru $n = 1$ rezultă

$[2(a-[a])+(b-[b])] = [1+b-[b]] = 1$, care nu este par.

Rămâne singura posibilitate, convenabilă $\{a\} = 0 \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$.

Gh. Eckstein, R.M.T. nr. 1/1985

71*.** Observăm că $a \in \{0,1\}$ verifică enunțul. Fie $a \in \mathbb{R}-\{0,1\}$, atunci:

$a^2-a = [a^2]+\{a^2\}-[a]-\{a\} = [a^2]-[a] = k \in \mathbb{Z}^*$ de unde rezultă ecuația: $a^2-a-k = 0$ are soluție, deci $\Delta = 1+4k \geq 0 \Rightarrow k \in \mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$.

Avem $a^n-a = [a^2]-[a] = l \in \mathbb{Z}^*$ (1). Vom arăta că $\forall\, m \in \mathbb{N}, m \geq 3$, există $a_m, b_m \in \mathbb{N}$ cu $a_m \geq 2 \Rightarrow a^m = a_m a + b_m$ (2).

α) Pentru $m = 3 \Rightarrow a^3-a^2a = (a+k)a = a^2+ka =$

$= a+k+ka = (k+1)a+k$, deci alegem $a_3 = k+1 \geq 2, b_3 = k \in \mathbb{N}^*$;

β) Fie $p \in \mathbb{N}^*, p \geq 3$. Presupunem că $(\exists)\ a_p, b_p \in \mathbb{N}$, cu $a_p \geq 2$ astfel încât $a^p = a_p a + b_p$ și vom arăta că $(\exists)\ a_{p+1}, b_{p+1} \in \mathbb{N}$, $a_{p+1} \geq 2$ și $a^{p+1} = a_{p+1}a + b_{p+1}$. Avem $a^{p+1} = a_p a = (a_p a + b_p)a = a_p a^2 + b_p a =$ $= a_p(a+k) + b_p a = (a_p + b_p)a + ka_p$. Alegem $a_{p+1} = a_p + b_p \geq 2$ și $b_{p+1} = ka_p \in \mathbb{N}$. Prin urmare relația (2) este adevărată, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*, m \geq 3$. Obținem $a^n = a_n a + b_n = a + l \Rightarrow (a_n - 1)a + b_n = l \in \mathbb{Z}^*$. Rezultă că $a = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$ cu $u, v \in \mathbb{Z}^*$, este o soluție a ecuației $a^2 - a - k = 0 \Rightarrow u|k, v|1$ $\Rightarrow a \in \mathbb{Z}$.

Laurențiu Panaitopol, O.N., 1997

72***. Notăm $\left[\sqrt[k]{n}\right] = a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a \leq \sqrt[k]{n} < a+1 \Rightarrow a^k \leq n < (a+1)^k$ (1) și din $\left[\sqrt[k]{n}\right] | n \Rightarrow n = \left[\sqrt[k]{n}\right] b = ab, b \in \mathbb{N}^*$ (2). Din (1) și (2) rezultă

$$a^{k-1} \leq b < \frac{(a+1)^k}{a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^{k-1} \leq b < a^{k-1} + C_k^1 a^{k-2} + C_k^2 a^{k-3} + \cdots + C_k^{k-2} a + C_k^{k-1} + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b \in \left\{a^{k-1}, a^{k-1}+1, \ldots, a^{k-1} + C_k^1 a^{k-2} + \cdots + C_k^{k-2} a + C_k^{k-1}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = ab \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n \in \left\{a^k, a^k + a, a^k + 2a, \ldots, a^k + C_k^1 a^{k-1} + \cdots + C_k^{k-2} a^2 + C_k^{k-1} a\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n \in \{a^k, a^k + a, a^k + 2a, \ldots, (a+1)^k - 1\}.$$

Concursul „Matematica cu drag", 2008

73**. Fie $\sqrt[n]{[x^n]} = k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow [x^n] = k^n \Rightarrow k^n \leq x^n < k^n + 1$,

$$k \leq x < \sqrt[n]{k^n + 1} \Rightarrow x \in \left[k, \sqrt[n]{k^n+1}\right) \Rightarrow x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[k, \sqrt[n]{k^n+1}\right).$$

Mihai Piticari, Dan Popescu, Concursul „Al. Myller", 2004

74***. a) Făcând substituția $n \to n + p$ rezultă:

$$\left[\frac{n+p}{p}\right] + \left[\frac{n+p+1}{p}\right] + \left[\frac{n+p+2}{p}\right] = n + p \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 + \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n+1}{p}\right] + \left[\frac{n+2}{p}\right] = n + p \Rightarrow 3 + n = n + p \Rightarrow p = 3.$$

Relația devine: $\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{n}{3} + \frac{2}{3}\right] = \left[3 \cdot \frac{n}{3}\right] \equiv n$ (Hermite);

b) Facem substituția $n \to n + p, q, r$ și relația devine:

$$\left[\frac{n+pqr}{p}\right] + \left[\frac{n+pqr+1}{p}\right] + \left[\frac{n+pqr+2}{p}\right] = n + pqr \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n+1}{q}\right] + \left[\frac{n+2}{r}\right] + pq + qr + rp = n + pqr \Rightarrow$$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow pq+qr+pr=pq \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1.$

Rezolvând această ecuație în $\mathbb{N}^*$, putem să punem o ordine

$p \le q \le r \Rightarrow \frac{p}{3} \le 1p \le 3$. Dacă $p=3 \Rightarrow p=q=r.$

Dacă $p=2 \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2} \Rightarrow q,r \in \{(4,4),(3,6)\}$ rezultă soluțiile

$(p,q,r) \in \{(3,3,3),(2,4,4),(2,3,6)\}$.

Analizând cele 10 cazuri posibile pentru (p,q,r) (rezultate din permutările lui p,q,r) se găsesc contraexemple pentru restul situațiilor, rămânând cazurile $p=q=r=3$ și $p=r=4, q=2$.

Cazul $p=q=r=3$ este identitatea lui Hermite pentru $n=3$.

Pentru $p=r=4, q=2$ se aplică identitatea lui Hermite în cazul $n=2$ (de două ori). Într-adevăr, avem

$$\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]=\left[\frac{\frac{n}{2}}{2}\right]+\left[\frac{\frac{n}{2}+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=$$

$$=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right]=n.$$

Marius Burtea, L.S., 2004

75***. Rezultă că egalitatea are loc pentru un subșir $(n_k) \subset \mathbb{N}^*$ și deci:

$\frac{1}{n_k}\left[\frac{n_k}{a}\right]+\frac{1}{n_k}\left[\frac{n_k}{b}\right]+\frac{1}{n_k}\left[\frac{n_k}{c}\right]=1$ (1), dar, cum $n_k \to \infty$ se trece la limită în (1) și rezultă: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Rightarrow (a,b,c) \in \{2,3,6\}$.

Dinu Șerbănescu, G.M. nr. 1/2007

76***. a)

Pentru $n=0 \Rightarrow \left[\frac{a}{6}\right]+\left[\frac{b}{6}\right]=\left[\frac{c}{6}\right]$ (1).

Pentru $n=1 \Rightarrow \left[\frac{a+1}{6}\right]+\left[\frac{b+1}{6}\right]=\left[\frac{c+1}{6}\right]$ (2).

Pentru $n=2 \Rightarrow \left[\frac{a+2}{6}\right]+\left[\frac{b+2}{6}\right]=\left[\frac{c+2}{6}\right]+1$ (3).

Pentru $n=3 \Rightarrow \left[\frac{a+3}{6}\right]+\left[\frac{b+3}{6}\right]=\left[\frac{c+3}{6}\right]$ (4).

Pentru $n=4 \Rightarrow \left[\frac{a+4}{6}\right]+\left[\frac{b+4}{6}\right]=\left[\frac{c+4}{6}\right]+1$ (5).

Pentru $n=5 \Rightarrow \left[\frac{a+5}{6}\right]+\left[\frac{b+5}{6}\right]=\left[\frac{c+5}{6}\right]+1$ (6).

Relațiile sunt într-o anumită simetrie și putem considera $a \le b$.

Scanned with OKEN Scanner

Din (2) rezultă că $a,b,c \leq 4$ sau $c = b = 5, a \leq b$, dar atunci nu se verifică (3) sau (4), deci $a,b,c \leq 4$. Din (3) rezultă $a < b = 4$ și $c \leq 3$ sau $a = b = c = 4$. În al doilea caz nu se verifică (4) deci $b = 4$ și $a,c \leq 3$. Din (4) rezultă $a \leq 2, c = 3, b = 4$. Din (5) și (6) rezultă $a = 2, c = 3, b = 4$ sau situația simetrică $a = 4, c = 3, b = 2$;

b) Din (1) rezultă că dacă $a \geq 6$ sau $b \geq 6$ atunci $c \geq 6$ și din tripletul (a,b,c) putem obține tripletul $(a-6,b,c-6)$ sau $(a,b-6,c-6)$ și dacă $c \geq 6$, atunci $a \geq 6$ sau $b \geq 6$. Efectuând repetat această operație se ajunge la un triplet cu $a \leq 5, b \leq 5, c \leq 5$, deci la (2,4,3) sau (4,2,3). Fie $a = 2 + 6q_1$, $b = 4 + 6q_2, c = 3 + 6q_3$ de unde rezultă condiția $q_1 + q_2 = q_3$ și prin urmare tripletele sunt $(2 + 6q_1, 4 + 6q_2, 3 + 6q_3)$ sau $(4 + 6q_1, 2 + 6q_2, 3 + 6q_3)$ cu $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{N}, q_1 + q_2 = q_3$.

Vasile Pop

77***. Notăm cu S suma din stânga. Utilizând $\boldsymbol{P_4}$ rezultă:
$\left[\frac{n}{2}\right] \geq \frac{n+1}{2} - 1, \left[\frac{n}{3}\right] \geq \frac{n+1}{3} - 1, \left[\frac{n}{11}\right] \geq \frac{n+1}{11} - 1$ și $\left[\frac{n}{13}\right] \geq \frac{n+1}{13} - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow S \geq \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{3} + \frac{n+1}{11} + \frac{n+1}{13} - 4 = \frac{859n}{858} - \frac{3 \cdot 858 - 1}{858}$ (1).
Dar cum $858 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$ și $859 = 3 \cdot 11 \cdot 13 + 2 \cdot 11 \cdot 13 + 2 \cdot 3 \cdot 13 + +2 \cdot 3 \cdot 11$, 859 nu este divizibil cu 2,3,11,13. Deoarece ambii membri ai inegalității date sunt numere naturale, rezultă $S \leq n - 1$ (2). Din (1) și (2) rezultă: $\frac{859n}{858} - \frac{3858 - 1}{858} \leq S \leq n - 1 \Rightarrow n \leq 2 \cdot 858 - 1$. Prin urmare cea mai mare valoare a lui n este $2 \cdot 858 - 1 = 1715$.

U.S.A. Talent 2007-2005

78***. Cum $x = [x] + \{x\} \Rightarrow [x] + [2x] + [3x] + [4x] = 10[x] + [2\{x\}] + +[3\{x\}] + [4\{x\}]$. Dar cum $[2\{x\}]$ își schimbă valoarea când $\{x\} = \frac{1}{2}$, $[3\{x\}]$ își schimbă valoarea $\frac{1}{3}$ și $\frac{2}{3}$, iar $[4\{x\}]$ își schimbă valoarea $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ și cum $\{x\}$ aparține pe rând intervalelor $\left[0, \frac{1}{4}\right), \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right), \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right), \left[\frac{3}{4}, 1\right)$, se obțin valorile $10[x], 10[x] + 1, 10[x] + 2, 10[x] + 3, 10[x] + 4, 10[x] + 5, 10[x] + 6$, adică exact numerele cu ultima cifră 0,1,2,4,5,6. Sunt 1206 asemenea numere până la 2008.

79. Din ecuația $x^5 = x^3 + x + 2 \Rightarrow \frac{2}{x^5} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 1$ și dacă notăm cu $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x^5} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}$ rezultă că este strict descrescătoare și ecuația $f(x) = 1$ are cel mult o soluție pe $(0,\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=x^5-x^3-x-2$ continuă cu $g(\sqrt[3]{3})>0$ (prin calcul). Prin urmare ecuația are o singură rădăcină $x\in\left(\sqrt[3]{3},\frac{3}{2}\right)$. Observăm că $x_0^6>9$ și $x_0^6<10$.

Într-adevăr, din $x_0^5=x_0^3+x_0+2<\frac{55}{8}<7\Rightarrow x_0<\sqrt[5]{7}$

și cum $x_0^6=x_0^4+x_0^2+2x_0<\sqrt[5]{7^4}+\sqrt[5]{7^2}+2\cdot\frac{2}{3}=10$

(deoarece $\sqrt[5]{7^2}<2{,}25=\frac{9}{4}, \sqrt[5]{7^4}<4{,}75=\frac{19}{4}$.

Prin urmare $9<x_0^6<10\Rightarrow[x_0^6]=9$.

Marcel Chiriță

80***. Adoptăm notația:

$S(p,q)=[\sqrt{p}]+[\sqrt{p+1}]+\cdots+[\sqrt{q}]$ (1) și $S(1,n^2-1)=$

$=[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{n^2-1}]=\sum_{k=1}^{n^2-1}[\sqrt{k}]=\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$,

$\forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$ (2) (vezi un exercițiul anterior). Notăm cu $N(i)$ numărul termenilor din suma

$[\sqrt{i^2}]+[\sqrt{i^2+1}]+\cdots+[\sqrt{(i+1)^2-1}]$, deci $N(i)=2i+1$ (3)

de unde deducem că $S(m^2,n^2-1)=S(1,n^2-1)-S(1,m^2-1)$, unde $m,n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, cu $m<n$ (4). Relativ ușor se deduce o sumă mai generală decât (4), anume:

$$(5)\begin{cases}S(m^2+a,n^2+b-1)=S(m^2,n^2-1)-ma+nb\\0\leq a<N(m), m\in\mathbb{N}^*-\{1\}\\0\leq b<N(n), n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\end{cases}\text{ cu } m<n \text{ și } a,b\in\mathbb{N}.$$

Dar cum $S(1^2,14^2-1)=1729$ și $S(1^2,15^2-1)=2135$, din (4) se deduc cazurile:

$$\text{a)}\begin{cases}S(1^2+a,14^2+b-1)=2011\\0\leq a<N(1)\\0\leq b<N(14)\end{cases}a,b\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\begin{cases}1729-a+14b=2011\\0\leq a<3\\0\leq b<29\end{cases}a,b\in\mathbb{N};$$

$$\text{b)}\begin{cases}S(2^2+a,14^2+b-1)=2011\\0\leq a<N(2)\\0\leq b<N(14)\end{cases}a,b\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\begin{cases}1729-3-2a+14b=2011\\0\leq a<5\\0\leq b<29\end{cases}a,b\in\mathbb{N};$$

$$\text{c)}\begin{cases}S(3^2+a,14^2+b-1)=2011\\0\leq a<N(3)\\0\leq b<N(14)\end{cases}a,b\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\begin{cases}1729-13-3a+14b=2011\\0\leq a<7\\0\leq b<29\end{cases}a,b\in\mathbb{N};$$

d) $\begin{cases} S(4^2+a, 14^2+b-1)=2011 \\ 0 \le a < N(4) \\ 0 \le b < N(14) \quad a,b \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1729-34-4a+14b=2011 \\ 0 \le a < 9 \\ 0 \le b < 29 \quad a,b \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Se verifică că ecuațiile diofanțiene din primele trei cazuri nu au soluții care să verifice condițiile date. Din ultima situație rezultă: $7b-2a=158 \Rightarrow$ $\Rightarrow b$ par. Fie $b=2b' \Rightarrow 7b'-a=79 \Rightarrow a=5, b'=12 \Rightarrow b=24$. Așadar $a=5, b=24$ și d) devine $S(4^2+5, 14^2+24)=S(21,219)=2011$. Prin urmare $S(21,219)=[\sqrt{21}]+[\sqrt{22}]+\cdots+[\sqrt{219}]=2011$.

S.A.M.M.T., 2012, A. Andreev

81***. Avem 73 de termeni și $73,7 < 546 < 73,8$ și cum $546 = 73,7 + 35$, iar în suma noastră nu sunt termeni decât cu valoarea $[r]$ sau $[r]+1$, rezultă că avem 38 de termeni cu valoarea 7 și 35 de termeni cu valoarea 8, deoarece $38 \cdot 7 + 35 \cdot 8 = 546$. Așadar,

$\left[r+\frac{p}{100}\right]=7, p \in \{19,20,\ldots,56\}$ și $\left[r+\frac{q}{100}\right]=7, q \in \{57,58,\ldots,91\}$.

Prin urmare $\left[r+\frac{56}{100}\right]=7$ și $\left[r+\frac{57}{100}\right]=8$;

$7,43 \le r < 7,44 \Rightarrow 743 \le 100r < 744 \Rightarrow [100r]=743$.

A.I.M.E., 1991

§ 5.

82***. Din ipoteză $\Rightarrow \frac{a_i}{[a_i]}=k \in \mathbb{Q}, \forall\, i=\overline{1,2009} \Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{2009} a_i^2}{\sum_{k=1}^{2009}[a_i]^2}=k^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum a_i^2 = k^2 \sum_{i=1}^{n}[a_i]^2 \Rightarrow \sqrt{\sum a_i} = k\sqrt{\sum [a_i]^2}$ (1) și din $\frac{a_i}{[a_i]}=k \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a_i-[a_i]}{[a_i]}=\frac{\{a_i\}}{[a_i]}=k-1 \Rightarrow \frac{\sum\{a_i\}^2}{\sum[a_i]^2}=(k-1)^2 \Rightarrow \sqrt{\sum\{a_i\}^2}=$

$=(k-1)\sqrt{\sum[a_i]^2}$ (2). Din (1) și (2) rezultă egalitatea.

Constantin Popescu, R.M.G. nr. 34, 2010, Concursul „Cristian Calude"

83***. $a_n=\sum_{k=1}^{n}\{nq_k\}=\sum_{k=1}^{n}nq_k-[nq_k]=n\sum_{k=1}^{n}q_k-\sum_{k=1}^{n}[nq_k] \in \mathbb{Z}$ și cum $\{nq_k\}<1 \Rightarrow 0 \le a_n < 2012 \Rightarrow a_n \le 2011, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $q_k=\frac{b_k}{c_k}, (b_k, c_k)=1, k=\overline{1,2012}$.

Pentru $N=C_1C_2\ldots C_n-1 \Rightarrow \{Nq_k\}=\left\{\frac{b_k}{c_k}(C_1C_2\ldots C_{2012}-1)\right\}=$

$= \left\{b_k \frac{C_1 C_2 \dots C_{2012}}{C_k} - \frac{b_k}{c_k}\right\} = \{-q_k\} = 1 - q_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{2012} \{N q_k\} = \sum_{k=1}^{2012} (1 - q_k) =$

$= 2012 - (q_1 + q_2 + \cdots + q_{2012}) = 2011 \Rightarrow$ cel mai mare element al mulțimii A este 2011.

84***. a) Aplicând inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwartz rezultă:

$\left(\sqrt{[x_1] + \{x_2\}} + \sqrt{[x_2] + \{x_3\}} + \cdots + \sqrt{[x_n] + \{x_1\}}\right)^2 \leq (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)$

$([x_1] + \{x_2\} + \cdots + [x_n] + \{x_1\} + \{x_1\} + \cdots + \{x_n\}) =$

$= n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = n^2$, deci $E_{max} = n$;

b) Avem egalitate în inegalitatea de mai sus dacă: $[x_1] + \{x_2\} =$

$[x_1] + \{x_2\} = [x_2] + \{x_3\} = \cdots = [x_n] + \{x_1\} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x_1] + \{x_2\} = 1 \Rightarrow [x_1] = 1, \{x_2\} = 0$ și la fel $[x_k] = 1, \{x_k\} = 0,$

$\forall\, k = \overline{1,n} \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1.$

Gh. Alexe

85***. a) Avem $[x] = [a_1 x] + [a_2 x] + [a_n x] \leq (a_1 + a_2 + a_n)x, \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 1 \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x, \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1 + a_2 + \cdots + a_n - 1)x + 1 \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ sau din $x \geq [x] \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x - n \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1 + a_2 + \cdots + a_n - 1)x \leq n, \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1;$

b) Pentru $x = 1 \Rightarrow \{a_1\} + \cdots + \{a_n\} = 0 \Rightarrow \{a_k\} = 0 \Rightarrow a_k \in \mathbb{Z}.$

Fie $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m > \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$ atunci pentru $x = \frac{1}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\frac{a_1}{m}\right\} + \left\{\frac{a_2}{m}\right\} + \cdots + \left\{\frac{a_n}{m}\right\} = \frac{1}{m}$. Dacă $a_1 + a_2 + \cdots + a_k > 0$ și $a_{k+1}, a_{k+2},$

$a_n < 0$, atunci $\frac{a_1}{m} + \frac{a_1}{m} + \cdots + \frac{a_k}{m} + 1 - \frac{a_{k+1}}{m} + \cdots + 1 - \frac{a_n}{m} = \frac{1}{m}$. Pentru m suficient de mare $(m \to \infty)$ se obține o contradicție. Așadar, numerele a_k sunt de același semn. Fie $a_k \geq 0 \Rightarrow a_k \in \mathbb{N}$. Din $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ rezultă că un singur $a_m = 1$, restul sunt nuli și atunci relația din b) este satisfăcută $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Gh. Dumitrescu, G.M. nr.6/1997

86***. Avem $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = [a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}] + \frac{1}{n},$

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n = [a_2 + a_3 + \cdots + a_n] + \frac{1}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} = [a_n + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2}] + \frac{1}{n},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Rightarrow (n-1)S = \sum_{k=1}^{n}[S-a_k]+1 \Rightarrow (n-1)[S]+(n-1)\{S\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[S-a_k]+1;$$

$$(n-1)\{S\} \in \mathbb{N} \Rightarrow \{S\} \in \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\right\}.$$

M.C.N.

87*.** a) Avem $2a_1 \leq a_2 \leq 2a_1+1$,

$a_1+a_2 \leq a_3 \leq a_1+a_2+1$,

.....

$a_1+a_{n-1} \leq a_n \leq a_1+a_n+1$ și prin adunare termen cu termen rezultă

$$na_1 \leq a_n \leq na_1+n-1 \Rightarrow a_1 \leq \frac{a_n}{n} \leq a_1+\frac{n-1}{n} \quad (1) \Rightarrow \left[\frac{a}{n}\right] = a_1;$$

b) Din (1)rezultă că există $y \in \left(0, \frac{n-1}{n}\right]$ astfel încât $\frac{a_n}{n} = a_1+y =$ $= x > 0 \Rightarrow a_n = nx \Rightarrow a_n = [nx]$.

Concurs S.U.A. 1995-1996

88*.** Arătăm pentru orice $x \in \mathbb{N}^*$ și $y \in \mathbb{R}$ cu $x\{y\} < 1 \Rightarrow [xy] = x[y]$. Într-adevăr, fie $xy = x[y]+x\{y\}$, cu $x[y] \in \mathbb{Z}$ și $x\{y\} \in (0,1)$ și conform ipotezei $x\{y\} = \{xy\}$, iar $x[y] = [xy]$.

a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ care verifică $\{n\alpha\} < \frac{1}{m_j} \Leftrightarrow \{n\alpha\}m_j < 1, \forall\, 1 \leq j \leq k$ (există un astfel de număr, conform teoremei de densitate a lui Kroneker). Așadar avem $[m_j n\alpha] = m_j[n\alpha], 1 \leq j \leq k$, deci pentru $x_j = m_j n, 1 \leq j \leq k$, cerința se verifică;

b) Fie $M_j = \frac{m_1 m_2 \ldots m_k}{m_j}, 1 \leq j \leq k$ și alegem $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $\{m\alpha\} < \frac{1}{M_j} \Leftrightarrow M_j\{m\alpha\} < 1, 1 \leq j \leq k$. Așadar avem $[M_j m\alpha] = M_j[m\alpha]$ și $m_j[y_j\alpha] = m_j M_j[m\alpha] = (m_1 m_2 \ldots m_k)[m\alpha], \forall\,, 1 \leq j \leq k$, unde $y_j = M_j m$, deci rezultă punctul b).

Marian Tetiva, R.M., 2011

89*.** Avem $\sqrt{1+a_0+a_1+\cdots+a_{i-1}}\sqrt{a_i+a_{i+1}+\cdots+a_n} <$ $< \frac{1+a_0+a_1+\cdots+a_{i-1}+a_i+a_{i+1}+\cdots+a_n}{2} = \frac{2}{2} = 1$ și

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{1+a_0+a_1+\cdots+a_{i-1}}\sqrt{a_i+a_{i+1}+\cdots+a_n}}\geq\sum_{i=1}^{n}a_i=1\Rightarrow 1\leq E.$$

Notăm $\alpha_i=\arcsin(a_0+a_1+\cdots+a_i), i=\overline{0,n}$
(pentru că $0<a_0+a_1+\cdots+a_i<1$)
și $\alpha_{i-1}=\arcsin(a_0+a_1+\cdots+a_{i-1})=\cos\alpha_{i-1}=$
$=\sqrt{1-(a_0+a_1+\cdots+a_{i-1})^2}=\sqrt{1+a_0+a_1+\cdots+a_{i-1}}\cdot$
$\cdot\sqrt{a_i+a_{i+1}+\cdots+a_n}$ și $\sin\alpha_i=a_0+a_1+\cdots+a_i$,
$\sin\alpha_{i-1}=a_0+a_1+\cdots+a_{i-1}$.

Rezultă: $E=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\cos\alpha_{i-1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\alpha_i-\sin\alpha_{i-1}}{\cos\alpha_{i-1}}$.

Dar cum $\sin\alpha_i-\sin\alpha_{i-1}=$
$=2\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i-1}}{2}\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i-1}}{2}\leq 2\frac{\alpha_i-\alpha_{i-1}}{2}\cos\alpha_{i-1}$ (s-au utilizat inegalitățile $\alpha_{i-1}<\alpha_i$, $\sin x<x, \forall x>0$ și funcția cos descrescătoare pe $(0,\pi)$, $\frac{\alpha_i+\alpha_{i-1}}{2}>\alpha_{i-1}$, $\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i-1}}{2}<\cos\alpha_{i-1}$). Prin urmare

$$E<\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\alpha_{i-1}=\alpha_n-\alpha_0<\frac{\pi}{2}<2\Rightarrow 1<E<2\Rightarrow[E]=1.$$

(prelucrare), Olimpiadă China 1995-1996

90***. Fie $A_n=\frac{1}{x_1+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}$ și $B_n=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}$. Atunci

$$B_{101}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{101}}=2+\frac{1}{x_1(x_1+1)}+\frac{1}{x_2(x_2+1)}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{x_{100}(x_{100}+1)}=2+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_{100}}-\frac{1}{x_{100}+1}.$$

Adică $B_{101}=2+B_{100}-A_{100}$ sau $A_{100}=2-\frac{1}{x_{101}}$. Cum $x_{101}>1$ rezultă $1<A_{100}<2$, deci $[A_{100}]=1$. Cum $x=\frac{1}{2}, x_2=\frac{3}{4}, x_3=\frac{21}{16}$, începând cu x_3 avem $x_k>1$, deci $x_{k+1}=x_k^2+x_k>2x_k\Rightarrow\frac{2}{x_{k+1}}<\frac{1}{x_k}$. Sumând aceste inegalități pentru $k=3,4,\ldots,n$, avem $\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\frac{2}{x_{n+1}}<\frac{1}{x_3}$, de unde $B_{100}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{2}{x_3}=2+\frac{4}{3}+\frac{32}{21}<2+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=5$ și

$B_{100}>\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=2+\frac{4}{3}+\frac{16}{21}<2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=4$. Deci $[B_{100}]=4$.

Scanned with OKEN Scanner

91**. Vom considera cazurile $m = 1$ și $m \geq 2$.

I. Fie $m = 1$.

Vom căuta valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right] = 1$

(trebuie ținut seama că șirul $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ este strict crescător și $a_n \to \infty$). Se găsesc valorile $n \in \{1,2,3\}$.

Avem soluțiile $(m, n) \in \{(1,1), (1,2), (1,3)\}$ (*).

II. Cazul $m \geq 2$. Se constată că:

$$1 < 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots + \frac{1}{n^m} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} <$$

$$< 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{23} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^n} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} =$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \Rightarrow \left[1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots + \frac{1}{n^m}\right] = 1,$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, m \geq 2$. Așadar singurele soluții rămân cele de la (*).

Aurel Ene, G.M. nr. 1/2001

92***. Din ipoteză rezultă:

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)m - n < (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)m, \forall\, m \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_n - \frac{n}{m} < b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \forall\, m \geq 1$, deci $m \to \infty$,

rezultă $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Analog rezultă și $b_1 + b_2 +$

$+ \cdots + b_n \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ și prin urmare: $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

(Generalizare ex.53) Manuela Praja, G.M. nr. 12/2001

93***. Pentru $k = 1 \Rightarrow \frac{a_1^2}{[a_1]} = 1$. Pentru $k = 2 \Rightarrow \frac{a_2^2}{[a_2]} = 3$ și prin inducție

$\frac{a_k^2}{[a_k]} = 2k - 1, \forall\, k \in \{1,2, \ldots, n\}$.

Se reduce la sistemul: $a_1^2 = [a_1], a_2^2 = 3[a_2], \ldots, a_n^2 = (2n-1)[a_n]$.

Ecuația $a_k^2 = (2k-1)[a_k]$ are trei soluții, pentru $p \in \{2k-3, 2k-2, 2k-1\}$. Deci $a_1 = 1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ au fiecare trei valori. Rezultă că numărul de „n"-upluri este $1 \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{n-1 \text{ ori}} = 3^{n-1}$.

Marius Burtea, G.M. nr. 11/2009

Scanned with OKEN Scanner

94.** Din inegalitatea mediilor rezultă:

$S_n \geq n\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_3}\cdot\frac{a_2}{a_4}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_1}\cdot\frac{a_n}{a_2}} = n$ și pe de altă parte inegalitatea

$2\frac{a_k}{a_{k+2}} \leq \frac{a_k^2}{a_{k+1}^2} + \frac{a_{k+1}^2}{a_{k+2}^2}$ (*) pentru $k = \overline{1,n}$, unde $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$.

Adunând relațiile din (*) și împărțind cu 2 rezultă:

$S_n \leq \frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{a_2^2}{a_3^2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_1^2} < n+1 \Rightarrow n \leq S_n < n+1 \Rightarrow [S_n] = n.$

Florin Rotaru, R.M.T. nr. 3/2015

95.** a) Notăm cu $b = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n}$ și fie $a_1 = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Avem $\frac{b^n}{a_1^n} = \frac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n}{a_1^n} = 1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n + \left(\frac{a_3}{a_2}\right)^n + \cdots + \left(\frac{a_p}{a_1}\right)^n \leq p \Rightarrow$

$\Rightarrow p \geq \left(\frac{b}{a_1}\right)^n = \left(1 + \frac{b-a_1}{a_1}\right)^n \geq 1 + n\cdot\frac{b-a_1}{a_1} \Rightarrow \frac{b}{a_1} \leq 1 + \frac{p-1}{n} < 2$

și cum $1 < \frac{b}{a_1} < 2 \Rightarrow \left[\frac{b}{a_1}\right] = 1 \Leftrightarrow [E] = 1.$

b) Caz particular, pentru $n = p = 2, a_1 = |\sin x|, a_2 = |\cos x|$ și $a_1^2 + a_2^2 = |\sin x|^2 + |\cos x|^2 = 1$ deci $[F] = 1$.

Sorin Puspană

96*.** Pentru $x = 0$: $[a_1] + \cdots + [a_n] = [b_1] + [b_2] + \cdots + [b_m]$ (1) și pentru $x = 1$: $[a_1 + 1] + \cdots + [a_n + 1] = [b_1 + 1] + [b_2 + 1] + \cdots + [b_m + 1] \Rightarrow$

$\Rightarrow n + [a_1] + \cdots + [a_n] = m + [b_1] + \cdots + [b_m]$ deci din (1) rezultă $m = n$.

Presupunem prin absurd că $a_1 \neq b_1$ (fie de exemplu $a_1 < b_1$). Luăm $x = -a_1 - c$, unde $c = \min n\left(b_1 - a_1, \min\limits_{2\leq k\leq n}(a_k - a_1)\right)$ și se obține:

$[-c] + [a_2 - a_1 - c] + \cdots + [a_n - a_1 - c] = [b_1 - a_1 - c] + \cdots +$

$+ [b_n - a_1 - c]$, unde $[-c] = -1$ și $[a_k - a_1 - c] = 0, k = \overline{2,n}$ și

$[b_k - a_1 - c] = 0, \forall\, k = \overline{1,n}$ deci avem $-1 = 0$, fals. Prin urmare, $a_1 = b_1$.

În mod analog rezultă $a_k = b_k$, $\forall\, k = \overline{2,n}$ (extindere ex. 53, 92).

Cristinel Mortici

97.** Este reciprocă a identității lui Hermite. Avem $[x] + [x + a_1] +$

$+ \cdots + [x + a_{n-1}] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$ și din exercițiul

precedent rezultă $a_k = \frac{k}{n}, \forall\, k = \overline{1,n-1}.$

Cristinel Mortici

Scanned with OKEN Scanner

98*.** Alegem $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$, astfel încât $\left(a+k_1-\frac{1}{p}\right)\cdot\left(a+k_2-\frac{1}{p}\right)\cdot$

$\cdot\left(a+k_n-\frac{1}{p}\right) > (1+k_1)\cdot\ldots\cdot(1+k_n)-1$. Se poate alege pentru că

$\lim\limits_{p\to\infty}\left(a+k_1-\frac{1}{p}\right)\cdot\ldots\cdot\left(a+k_n-\frac{1}{p}\right) = (1+k_1)\cdot\ldots\cdot(1+k_n) >$

$> (1+k_1)\cdot\ldots\cdot(1+k_n)-1$. Deci, $x_1 = 1+k_1-\frac{1}{p}$; $x_2 = 1+k_2-\frac{1}{p}$; ...;

$x_n = 1+k_n-\frac{1}{p}$.

99*.** Dacă $n = 3^m\cdot a + r$ cu $0 \leq r < 3^m \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{m}\left[\frac{n+3^{k-1}}{3^k}\right] =$

$= \sum\limits_{k=1}^{m}\left[\frac{3^m a + 3^{k-1}+r}{3^k}\right] = a(1+3+\cdots 3^{m-1}) + \sum\limits_{k=1}^{m}\left[\frac{r+3^{k-1}}{3^k}\right] =$

$= a\frac{3^m-1}{2} + \sum\limits_{i=1}^{m}\left[\frac{r+3^{i-1}}{3^i}\right]$. Relația devine: $\sum\limits_{i=1}^{m}\left[\frac{r+3^{i-1}}{3^i}\right] = \frac{r}{2}$. (1)

Din relația lui Hermite rezultă (2):

$\left[\frac{r}{3^i}\right] + \left[\frac{r+3^{i-1}}{3^i}\right] + \left[\frac{r}{3^i}+\frac{2}{3}\right] = \left[\frac{r}{3^{i-1}}\right] = \sum\limits_{i=1}^{m}\left[\frac{r}{3^{i-1}}\right] - \left[\frac{r}{3^i}\right] = r - \left[\frac{r}{3^m}\right] = r$

și din (1) și (2) rezultă $\sum\limits_{i=1}^{m}\left[\frac{r}{3^i}+\frac{2}{3}\right] = \sum\limits_{i=1}^{m}\left[\frac{r}{3^i}+\frac{1}{3}\right] = \frac{r}{2}$ (3). Dar cum

$\left[\frac{r}{3^i}+\frac{2}{3}\right] \geq \left[\frac{r}{3^i}+\frac{1}{3}\right]$ și din (3) rezultă că $\left[\frac{r}{3^i}+\frac{1}{3}\right] = \left[\frac{r}{3^i}+\frac{2}{3}\right], i = \overline{1,m}$. (4)

Fie descompunerea lui r în bază 3, adică

$r = a_{m-1}3^{m-1} + a_{m-2}3^{m-2} + \cdots + a_1 r + a_0 r^0$ cu $a_i \in \{0,1,2\}$.

Vom arăta că $a_i \neq 1, \forall\, 1 \leq i \leq m-1$. Dacă $a_{m-1} = 1$, atunci pentru $i = m$ din relația (4) rezultă o contradicție. Dacă ar exista $1 \leq i < m-1$ cu proprietatea $a_i = 1$, atunci

$\left[\frac{r}{3^{i+1}}+\frac{1}{3}\right] = 3^{m-i-2}a_{m-1} + 3^{m-i-3}a_{m-2} + \cdots + a_{i+1}$ și

$\left[\frac{r}{3^{i+1}}+\frac{2}{3}\right] = 3^{m-i-2}a_{m-1} + 3^{m-i-3}a_{m-2} + \cdots + a_{i+1} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{r}{3^{i+1}}+\frac{1}{3}\right] \neq \left[\frac{r}{3^{i+1}}+\frac{2}{3}\right]$ în contradicție cu relația (4). Prin urmare, în

Scanned with OKEN Scanner

descompunerea lui r în bază 3 toate cifrele sunt 2, deci numerele căutate sunt $n = 3^m a + r, 0 \le r \le 3^m - 1 \Rightarrow n = 3^m a + \frac{3^k - 1}{2}$, cu $a \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*$.

O.L Prahova, 2003

100**. a) $\cdots < a_{-3} < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ reprezintă o diviziune a lui $\mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ face parte dintr-un interval de forma $[a_m, a_{m+1})$ și prin urmare numai dintr-un astfel de interval;

b) $Z_{0,r} = \{mr | m \in \mathbb{Z}\}$. Dacă $a = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} r\right] = [nx]$.

Se demonstrează la fel ca la identitatea lui Hermite. Dacă $\left[x + \frac{r}{n}\right]_{a,r} +$

$+ \left[x + \frac{2r}{n}\right]_{a,r} + \cdots + \left[x + \frac{(n-1)r}{n}\right]_{a,r} = [nx]_{a,r}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $x = 0 \Rightarrow \left[\frac{r}{n}\right]_{a,r} + \left[\frac{2r}{n}\right]_{a,r} + \cdots + \left[\frac{(n-1)r}{n}\right]_{a,r} = [0]_{a,r}, \forall n \ge 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a + m_0 r \le \frac{r}{n} < a + (m_0 + 1)r, \forall n \ge 1,$

$2a + 2m_0^n \le 2a + 2(m_0 + 1)r,$

$na + nm_0 r < (n-1)a + (n-1)(m_0 + 1)r.$

Prin adunare și trecere la limita (n, ∞) obținem o contradicție dacă $a \ne 0$.

101**. $x^n - [x^n] = \sum_{k=1}^{n-1} a_k (x^k - [x^k]) \Rightarrow x^n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot x^k + \underbrace{[x^n] - \sum_{k=1}^{n-1} [x^k]}_{\substack{\text{notăm} \\ a_0 \in \mathbb{Z}}}$

$\Rightarrow x^n = c_1 x^1 + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} + a_0$. Mai departe este aceeași demonstrație de la polinoame cu coeficienți întregi.

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{p}{q} \Rightarrow p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, (p, q) = 1 \Rightarrow \frac{p^n}{q^n} = a_1 \frac{p}{q} + \cdots + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} +$

$+ a_0 | q^n \Rightarrow p^n = a_1 p q^{n-1} + \cdots + p^{n-1} q + a_0 q^n \vdots q \Rightarrow q | p^n, (q, p) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow q = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.

Nelu Chichirim

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 19 | Paragrafe speciale

§ 1. Proprietăți ale părții întregi analoage asociativității, comutativității și distributivității

P_1. Fie a un număr real nenul. Dacă:

$$[a[x]] = [ax] \qquad (1)$$

pentru orice x real, atunci a este inversul unui întreg pozitiv.

Demonstrație:

- pentru $a > 0$ luăm $x = \frac{1}{a}$ și atunci din $\left[a\left[\frac{1}{a}\right]\right] = 1 \Rightarrow \frac{1}{a}$ întreg pozitiv;
- pentru $a < 0$, egalitatea (1) nu are loc pentru orice x.

Luăm $x = \frac{-1}{an}$, cu $n > 1$.

Membrul drept din (1) este -1, iar membrul stâng, pentru $n > \frac{-1}{a}$, este 0.

Reciproc, dacă $a > \frac{1}{n}$, cu n întreg pozitiv, atunci (1) este cunoscut ca proprietate:

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right].$$

P_2. Fie a un număr real nenul. Dacă:

$$[a[x]] = [[a]x] \qquad (2)$$

pentru orice x real, atunci $a = 1$.

Soluție:

Fie $a > 0$. Pentru $x = 1 - \frac{1}{n}$ avem: $0 \leq [a] - \frac{[a]}{n} < 1$, de unde $0 \leq [a] \leq 1$, deci $[a] = 1$. Dacă $a = 1 + \varepsilon$ cu $\varepsilon > 0$, atunci $[\varepsilon[x]] = 0$ pentru orice x, fals. (Evident $[a] \neq 0$.) Fie $a < 0$. Pentru $x \in (0,1)$ ar trebui să avem din (2): $0 \leq [a]x < 1$, ceea ce este fals.

P_3. Fie a și b două numere reale nenule. Dacă:

$$[a[bx]] = [[ab]x] \quad (3), \text{ pentru orice } x \text{ real,}$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci b și ab sunt numere întregi, iar $\frac{1}{a}$ este întreg pozitiv.

Demonstrație:

Avem:

$$[a[bx]] - [ab]x| < 1,$$

de unde:

$$\{ab\}x - a\{bx\} < 1$$

și pentru x pozitiv putem scrie:

$$0 \leq \{ab\} < \frac{1}{x} + \frac{a\{bx\}}{x}.$$

De aici, pentru $x \to \infty$ rezultă $\{ab\} = 0$, deci ab întreg și atunci $[ab] = ab$ și egalitatea (3) devine:

$$[a[bx]] = [abx] \quad \text{(pentru orice } x\text{)}.$$

Iar din proprietatea $\boldsymbol{P_1}$ rezultă afirmația din enunț și reciproca ei.

$\boldsymbol{P_4}$. Fie a și b două numere reale nenule, $a \neq b$. Dacă:

$$[a[bx]] = [b[ax]] \qquad (4)$$

pentru orice x real, atunci a și b sunt inversele unor numere întregi pozitive.

Demonstrație:

Să arătăm, mai întâi, că a și b trebuie să fie pozitive.

(i) Într-adevăr, pentru $ab < 0$ luând $x = \frac{1}{n}$, pentru valori mari ale lui n, din (4) avem contradicție.

(ii) Pentru $a < 0$ și $b < 0$ luăm $x = \frac{1}{a}$ sau $\frac{1}{b}$ după cum $\frac{b}{a} < 1$ sau $\frac{b}{a} > 1$ și obținem contradicție. Deci, a și b sunt pozitive.

(iii) Pentru $a = 1$ sau $b = 1$, conform proprietății $\boldsymbol{P_1}$ rezultă afirmația din enunț.

Să arătăm că $a < 1$ și $b < 1$. Într-adevăr, dacă $a > 1$ și $b < 1$ luăm $x = \frac{-1}{a}$ și avem o contradicție. Analog, dacă $a < 1$ și $b > 1$. În fine, dacă $a > 1$ și $b > 1$, luăm $x = \frac{1}{a}$ sau $\frac{1}{b}$ după cum $a > b$ sau $a < b$ și obținem o contradicție.

Deci, $a < 1$ și $b < 1$. Luând $x = \frac{1}{ab}$ avem: $\left[a\left[\frac{1}{a}\right]\right] = \left[b\left[\frac{1}{b}\right]\right]$, de unde rezultă că $\frac{1}{a}$ și $\frac{1}{b}$ trebuie să fie simultan întregi sau nu.

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că $\frac{1}{a}$ și $\frac{1}{b}$ nu sunt întregi și punem $\frac{1}{a}=k+\alpha, \frac{1}{b}=l+\beta$ cu $0<\alpha,\beta<1, k\geq 1, l\geq 1$. Avem:

$$[a[bx]]=0 \Leftrightarrow 0\leq [bx]<\frac{1}{a} \Leftrightarrow 0\leq [bx]\leq \left[\frac{1}{a}\right]=k \Leftrightarrow 0\leq bx<k+1.$$

Deci,

$$[a[bx]]=0 \Leftrightarrow 0\leq x<\frac{k+1}{b}.$$

Analog:

$$[b[ax]]=0 \Leftrightarrow 0\leq x<\frac{l+1}{a}.$$

Apoi

$$[a[bx]]=-1 \Leftrightarrow -1\leq a[bx]<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{a}\leq [bx]<0 \Leftrightarrow -k\leq [bx]\leq -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -k\leq bx<0.$$

Deci,

$$[a[bx]]=-1 \Leftrightarrow \frac{-k}{b}\leq x<0.$$

Analog: $$[b[ax]]=-1 \Leftrightarrow \frac{-l}{a}\leq x<0.$$

Rezultă: $\frac{k+1}{b}=\frac{l+1}{a}$ și $\frac{-k}{b}=\frac{-l}{a}$, de unde $a=b$, contrar ipotezei.

Deci, $\frac{1}{a}$ și $\frac{1}{b}$ sunt numere întregi.

Reciproca este adevărată, fiindcă dacă $\frac{1}{a}=k$ și $\frac{1}{b}=l$, cu k și l întregi pozitivi, din cunoscuta egalitate:

$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right],$$

rezultă:

$$\left[\frac{\left[\frac{x}{l}\right]}{k}\right]=\left[\frac{x}{kl}\right]=\left[\frac{\left[\frac{x}{k}\right]}{l}\right].$$

Observație: Punând în enunț $a=\frac{1}{m}, b=\frac{1}{n}$ și mnx în locul lui x, acesta devine dacă pentru m,n reale nenule distincte avem:

$$\left[\frac{[mx]}{m}\right]=\left[\frac{[nx]}{n}\right]$$

pentru orice x real, atunci m și n sunt întregi pozitivi.

Scanned with OKEN Scanner

P_5. Fie a,b reale nenule cu $b \neq 1$. Dacă:

$$[a[bx]] = [ab[x]] \qquad (5)$$

pentru orice x real, atunci $\frac{1}{a}$ și $\frac{1}{b}$ sunt întregi pozitivi.

Demonstrație:

Punând $ab = \beta$ și $x = ay$, egalitatea (5) revine la:

$$[a[\beta y]] = [\beta[ay]] \text{ cu } a \neq \beta$$

(fiindcă $b \neq 1$) și y real arbitrar. Conform proprietății P_4 rezultă $\frac{1}{a}$ și $\frac{1}{\beta}$ întregi pozitivi, deci proprietatea P_5 și reciproca ei sunt adevărate.

P_6. Fie a și b două numere reale nenule. Dacă:

$$[(a+b)[x]] = [ax] + [bx] \qquad (6)$$

pentru orice x real, atunci $a = 1$ și $\frac{1}{b}$ întreg pozitiv sau invers.

Demonstrație:

Luând în (6) $x = 1$ și apoi $x = -1$ rezultă că măcar unul din numerele a și b trebuie să fie întreg. Presupunem a întreg.

- Pentru $a = 1$ egalitatea (6) devine $[b[x]] = [bx]$ și afirmația din enunț rezultă conform proprietății P_1.
- Pentru $a = k$ cu $k \geq 2$ întreg, luând în (6) $x = \frac{1}{k}$, dacă $b > 0$ și $x = \frac{1}{k+1}$ dacă $b < 0$, obținem o contradicție.
- Pentru $a = -k$ cu $k \geq 1$ întreg, luând $x = \frac{1}{nk}$, cu $n > 1$, egalitatea (6) devine:

$$0 = -1 + \left[\frac{b}{nk}\right]$$

și pentru valori mari ale lui n este falsă.

P_7. Fie a,b,c trei numere reale. Dacă:

$$[ax + bx] + [cx] = [ax] + [bx + cx] \qquad (7)$$

pentru orice x real, atunci $a = c$ sau $b = 0$.

Demonstrație:

Presupunem $b \neq 0$ și notând $\frac{a}{b} = \alpha, \frac{c}{b} = \gamma$, relația (7) revine la:

$$[\alpha x + x] - [\alpha x] = [\gamma x + x] - [\gamma x] \qquad \text{(i)}.$$

Dacă $\alpha = 0$, atunci $\gamma = 0$ (deci $\alpha = \gamma$, adică $a = c$). Într-adevăr luând $x = 1 - \frac{1}{n}$, pentru valori mari ale lui n, din $[\gamma x + x] - [\gamma x] = [x]$ avem o contradicție.

Scanned with OKEN Scanner

Putem presupune deci $\alpha \neq 0$ și luând $\alpha x = 1$ avem:

$$\left[\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right] = \left[\frac{\gamma}{\alpha}\right] + \left[\frac{1}{\alpha}\right].$$

Punând $\left\{\frac{\gamma}{\alpha}\right\} = \varepsilon_1$ și $\left\{\frac{1}{\alpha}\right\} = \varepsilon_2$ rezultă $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1$.

Luăm $\alpha x = 1 - \frac{1}{y}, y > 1$ arbitrar și (i) se scrie:

$$\left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{\gamma+1}{\alpha y}\right] - \left[\varepsilon_1 - \frac{\gamma}{\alpha y}\right] = 1 + \left[\varepsilon_2 - \frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right] \quad \text{(ii)}.$$

Nu putem avea simultan $\varepsilon_1 > 0$ și $\varepsilon_2 > 0$, fiindcă pentru valori mai mari ale lui y parantezele drepte din (ii) sunt zero (fiindcă $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1$) și (ii) ar da $0 = 1$. Deci $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$.

- Dacă $\varepsilon_1 = 0$, adică $\frac{\gamma}{\alpha}$ este întreg, pentru a avea egalitate în (ii) a doua paranteză dreaptă trebuie să fie -1 și atunci $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$.
- Dacă $\varepsilon_2 = 0$, adică $\frac{1}{\alpha}$ întreg, ultima paranteză dreaptă din (ii) trebuie să fie -1 și atunci $1 + \frac{1}{\alpha} > 1$, deci $\frac{1}{\alpha} > 0$.

Deci, dacă $\alpha \neq 0$, atunci $\frac{\gamma}{\alpha}$ întreg pozitiv sau $\frac{1}{\alpha}$ întreg pozitiv. Cum (i) este simetric în α și γ avem și: pentru $\gamma \neq 0$, $\frac{\alpha}{\gamma}$ sau $\frac{1}{\gamma}$ întreg pozitiv.

- Dacă $\frac{\gamma}{\alpha}$ și $\frac{\alpha}{\gamma}$ sunt întregi pozitivi, atunci $\alpha = \gamma$ (deci $a = c$).
- Dacă $\frac{1}{\alpha}$ și $\frac{1}{\gamma}$ sunt întregi pozitivi, punând $\frac{1}{\alpha} = m$ și $\frac{1}{\gamma} = n$, relația (ii) devine:

$$\left[x + \frac{x}{m}\right] - \left[\frac{x}{m}\right] = \left[x + \frac{x}{n}\right] - \left[\frac{x}{n}\right]$$

și dacă $n < m$ sau $m < n$ obținem o contradicție luând $x = \frac{n}{n+1}$, respectiv $x = \frac{m}{m+1}$. Deci, $m = n$, adică $a = c$.

Celelalte două cazuri: $\frac{1}{\alpha}$ și $\frac{\alpha}{\gamma}$ întregi pozitivi, respectiv $\frac{1}{\gamma}$ și $\frac{\gamma}{\alpha}$ întregi pozitivi se reduc la acesta din urmă, ceea ce încheie demonstrația.

P_8. Fie a,b reale pozitive, $a \neq b$. Dacă:

$$[ax] + [b[x]] = [bx] + [a[x]] \qquad (8)$$

pentru orice x real, atunci a și b sunt inversele unor numere întregi.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație:

Dacă $\frac{1}{a} = n$ cu n întreg pozitiv, ținând seama că: $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right]$ și de proprietatea P_1 rezultă din (8) că $\frac{1}{b}$ este întreg. Deci, $\frac{1}{a}$ și $\frac{1}{b}$ sunt simultan întregi sau nu.

Dacă $\frac{1}{a}$ și $\frac{1}{b}$ nu sunt întregi, luând $x = \frac{1}{a}$ sau $\frac{1}{b}$ după cum $b < a$ sau $b > a$ obținem o contradicție.

P_9. Fie a,b reale pozitive. Dacă:

$$[ax + b[x]] = [a[x]] + [bx] \qquad (9)$$

pentru orice x real, atunci $a = b$ întreg sau $b = 1$ și $\frac{1}{a}$ întreg.

Demonstrație:

Avem următoarele cazuri:

- Dacă $b < a$, luând $x = \frac{1}{a}$ relația (9) devine $1 = \left[a\left[\frac{1}{a}\right]\right]$, de unde rezultă $\frac{1}{a}$ întreg. Fie $\frac{1}{a} = n \geq 1$ și relația (9) se mai scrie:

$$\left[\frac{x}{n} + b[x]\right] = \left[\frac{x}{n}\right] + [bx].$$

Luând aici $x = \frac{-1}{k}, k > 1$, deducem $\left[\frac{-1}{kn} - b\right] = -2$, contradicție pentru valori mari ale lui k fiindcă $b < 1$ (având $b < a$ și $a \leq 1$).

- Dacă $b = a$ întreg, atunci evident (9) este adevărată.
- Dacă $b = a$, dar nu este întreg, fie $\{a\} = \varepsilon > 0$ deci $\{-a\} = 1 - \varepsilon$ și luând în (9) $x = 1$ rezultă $2\varepsilon < 1$ și apoi pentru $x = -1$ rezultă $2(1 - \varepsilon) < 1$, contradicție.
- Dacă $b > a$, luând $x = \frac{1}{b}$ avem: $\left[\frac{a}{b} + b\left[\frac{1}{b}\right]\right] = 1$ de unde $\frac{1}{b} \geq 1$.

Pentru $b = 1$, din (9) și din proprietatea P_1 rezultă $\frac{1}{a}$ întreg.

Pentru $b < 1$, luând în (9) $x = 1$ și apoi $x = -1$, obținem o contradicție, ceea ce încheie demonstrația.

P_{10}. Fie a,b reale pozitive, $a \neq b$. Dacă:

$$[a[x] + bx] = [b[x] + ax] \qquad (10)$$

pentru orice x real, atunci $a + b = \frac{1}{n}$ cu n întreg.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție:

Notăm $[x] = s$ și $\{x\} = \varepsilon$ și presupunem $b < a$. Relația (10) se scrie:

$$[(a+b)s + b\varepsilon] = [(a+b)s + a\varepsilon] \qquad (*)$$

și trebuie să aibă loc pentru orice s și ε reali cu $0 \leq \varepsilon < 1$.

Fie $a+b$ rațional, $a+b = \frac{m}{s}$ cu $(m,n) = 1$. Avem $a < \frac{m}{n}$ și $a > \frac{m}{2n}$.

Din teorema împărțirii avem $ms = nq + r$ cu $0 \leq r \leq n-1$.

Pentru $m = 1$, deci $a < \frac{1}{n}$ și $\frac{s}{n} = q + \frac{r}{n} \leq q + \frac{n-1}{n}$, așa că:

$$q \leq \frac{s}{n} + b\varepsilon < \frac{s}{n} + a\varepsilon < \frac{s}{n} + \frac{1}{n} \leq q+1$$

așa că relația $(*)$ are loc.

Pentru $m \geq 2$, deci $a > \frac{1}{n}$ relația $(*)$ nu are loc pentru orice x.

Într-adevăr, alegem s așa că $ms = nq + n - 1$ (se poate întotdeauna aceasta, fiindcă din $(m,n) = 1$ există s_1 și q_1, așa că $ms_1 - nq_1 = 1$ și înmulțim cu $n-1$) și atunci:

$$\frac{ms}{n} + a > q + 1.$$

Fie ε dat de $\frac{ms}{n} + a\varepsilon > q+1$. Deci, $\left[\frac{m}{n}s + b\varepsilon\right] = q$ și relația $(*)$ nu are loc.

Fie $a+b$ irațional, $a+b = \alpha$. Pentru orice redusă $\frac{q}{s}$ din dezvoltarea în fracție continuă a lui α avem $\left|\alpha - \frac{q}{s}\right| < \frac{1}{s^2}$, iar după cele de rang impar avem $\alpha < \frac{q}{s}$ și $\frac{q}{s} - \alpha < \frac{1}{s^2}$ de unde $\frac{\alpha}{2} > \frac{q}{2s} - \frac{1}{s^2}$.

Apoi, cum $a > \frac{\alpha}{2}$ avem $\alpha s + a > \alpha s + \frac{q}{2s} - \frac{1}{2s^2} > \alpha s + \frac{1}{s} > q$.

Deci, $\alpha s + a > q$ și atunci luăm ε dat de $\alpha s + a\varepsilon = q$ deci $[\alpha s + b\varepsilon] = q - 1$, iar $[\alpha s + a\varepsilon] = q$, deci $(*)$ nu are loc pentru orice s și ε (deci (10) nu are loc pentru orice x), ceea ce încheie demonstrația.

P_{11}. Fie a,b,c,d patru numere reale, $ab \neq 0$. Dacă:

$$[ax + bx + c] = [ax] + [bx + d] \qquad (11)$$

pentru orice x real, atunci $a = b, \{c\} = 0, \{d\} = \frac{1}{2}, [c] = [d]$.

Soluție:

Punând $\frac{b}{a} = \beta$, egalitatea (11) este echivalentă cu:

$$[x + \beta x + c] = [x] + [\beta x + d] \qquad (11').$$

Luând $x = -\frac{1}{n}$ cu $n > 1$, avem:

$$\left[\{c\}-\frac{\beta+1}{n}\right]=-1+\left[\frac{-\beta}{n}+\{d\}\right],$$

iar de aici rezultă $\{c\}=0$ și $\beta+1>0$.

Pentru $x=1$ avem $[\beta]=[\beta+\{d\}]$, iar pentru $x=1-\frac{1}{n}$ avem:

$$1+\left[\beta-\frac{\beta+1}{n}\right]=\left[\beta+\{d\}-\frac{\beta}{n}\right].$$

Punând $\beta=k+\varepsilon_1, \beta+\{d\}=k+\varepsilon$ cu k întreg și $0\le\varepsilon_1\le\varepsilon<1$, egalitatea precedentă se scrie:

$$1+\left[\varepsilon_1-\frac{\beta+1}{n}\right]=\left[\varepsilon-\frac{\beta}{n}\right]$$

de unde rezultă $\varepsilon_1=0$ și $\varepsilon>0$, deci β întreg și cum $\beta+1>0$ și $\beta\neq 0$ rezultă $\beta=k\ge 1$ și $\{d\}=\varepsilon$ și (11') devine:

$$[x+kx]=[x]+[kx+\varepsilon].$$

Iar de aici pentru $x=\frac{2}{k+1}$ avem $2=\left[\frac{2}{k+1}\right]+\left[\frac{2k+1}{k+1}\right]$ de unde $2\ge k+1$ și cum $k\ge 1$ rezultă $k=1$.

Deci, $\frac{b}{a}=\beta=k=1, \{d\}=\varepsilon=\frac{1}{2}$ și (11') revine la cunoscuta identitate:

$$[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right].$$

Observație: Și egalitatea

$$[ax+bx+c]=[ax+c_1]+[bx+c_2]$$

care pare mai generală, revine la (11') punând $ax+c_1=y$.

P_{12}. Fie a,b,c,d patru numere reale pozitive. Dacă

$$[a[x]+b]=[cx+d] \qquad (12)$$

pentru orice x real, atunci $a=c=\frac{1}{n}$ cu n întreg pozitiv, $[b]=[d], \{d\}=\frac{r}{n}$, $\{b\}=\frac{r+\varepsilon}{n}$ cu $r\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$ și $0\le\varepsilon<1$.

Demonstrație:

Pentru $x=0$ avem $[b]=[d]$. Din egalitatea dată avem:

$$|a[x]+b-cx-d|<1$$

și pentru $x>0$,

$$\left|a-c+\frac{b-d}{x}-\frac{a\{x\}}{x}\right|<\frac{1}{x}.$$

Pentru $x\to\infty$, rezultă $a=c$ și (12) devine:

$$[a[x]+b_1]=[ax+d_1] \qquad (1)$$

cu $b_1=\{b\}, d_1=\{d\}$. Pentru $x\in[0,1)$ rezultă $ax+d_1\in[0,1)$, iar pentru

$x \nearrow 1, x = 1 - \frac{1}{am}$ rezultă $a + d_1 - \frac{1}{m} < 1$ pentru $\forall\, m \Rightarrow a + d_1 \leq 1$.

Să arătăm că există $k \geq 1$ întreg astfel încât:

$$ka + d_1 = 1 \qquad (2).$$

Într-adevăr, dacă $a + d_1 < 1$, atunci $a + b_1 < 1$. Pentru $x \nearrow 2$ avem $2a + d_1 \leq 1$. Dacă $2a + d_1 < 1$, atunci $2a + b_1 < 1$ și pentru $x \nearrow 3$ rezultă $3a + d_1 \leq 1$. Dacă $3a + d_1 < 1$, atunci $3a + b_1 < 1$ și pentru $x \nearrow 4$ rezultă $4a + d_1 \leq 1$ și procedeul se repetă, dar nu poate continua la infinit, căci ar fi contrazisă axioma lui Arhimede. Există deci $k \geq 1$ astfel încât să avem (2). De aici și punând în (1) $x = k$ rezultă $1 \leq ka + b_1 < 2$.

Pentru $x \nearrow k + 1$ rezultă $(k + 1)a + d_1 \leq 2$. Analog cazului precedent, există $n \geq 1$, întreg așa că:

$$(k + n)a + d_1 = 2 \qquad (3).$$

Din (2) și (3) rezultă $na = 1, a = \frac{1}{n}, d_1 = 1 - \frac{k}{n}$ evident cu $k \leq n$.

Notând $n - k = r$, avem r întreg și $0 \leq r \leq n - 1$. Apoi $d_1 = \frac{r}{n}$ și din $1 \leq ka + b_1$ rezultă $b_1 \geq \frac{r}{n}$.

Egalitatea (1) devine:

$$\left[\frac{[x]}{n} + b_1\right] = \left[\frac{x + r}{n}\right].$$

Luând $x = n - r - 1$, deducem $b_1 < \frac{r + 1}{n}$.

Reciproca se demonstrează analog cunoscutei proprietăți

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right].$$

Ion Cucurezeanu

§ 2. Funcția de rotunjire

Câteva proprietăți ale funcției numerice „întregul cel mai apropiat" sau „funcția de rotunjire".

În cele ce urmează notăm cu D (definiție) și cu P (proprietate).

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, notăm cu $(x) =$ întregul cel mai apropiat de x.

Exemple: $a_1 = 7{,}8, a_2 = 4{,}2, a_3 = -5{,}3, a_4 = -\frac{3}{5}, a_5 = \frac{3}{7}$, atunci $(a_1) = 8, (a_2) = 4, (a_3) = -5, (a_4) = -1, (a_5) = 0$. Avem următoarele definiții echivalente:

D_1. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, definim $(x) - \frac{1}{2} \leq x < (x) + \frac{1}{2} \qquad (1).$

D_2. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, definim $x - \frac{1}{2} \leq (x) < x + \frac{1}{2}$ (2).

D_3. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, definim $(x) = \begin{cases} [x], & \text{dacă } 0 \leq \{x\} < \frac{1}{2} \\ [x+1], & \text{dacă } \frac{1}{2} \leq \{x\} < 1 \end{cases}$.

P_1. Numărul întreg cel mai apropiat de un număr real dat este unic determinat.

Demonstrație: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\alpha - \frac{1}{2} \leq x < \alpha + \frac{1}{2}$ și $\beta - \frac{1}{2} \leq x < \beta + \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\beta - \frac{1}{2} \leq -x < -\beta + \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha - \beta - 1 < 0 < \alpha - \beta + 1 \Rightarrow -1 < \beta - \alpha < 1 \Rightarrow \alpha = \beta$.

P_2. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea:

$$(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right].$$

Demonstrație:

Avem $(x) \leq x + \frac{1}{2} < (x) + 1 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{2}\right] = (x)$.

P_3. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea:

$$(x) = [2x] - [x].$$

Demonstrație:

Din identitatea lui Hermite avem:

$$(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right] \equiv [2x] - [x].$$

P_4. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $m \in \mathbb{Z}$, avem: $(x + m) = (x) + (m)$.

Demonstrație:

Avem $(x + m) = [2(x + m)] - [x + m] = [2x] + [2m] - [x] - -[m] = (x) + m$.

P_5. Să se arate că $(x + m) - 1 \leq (x) + (y) \leq (x + y) + 1, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstrație:

Vom ține seama de dubla inegalitate din Capitolul I, adică:

$$[x + y] \leq \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[y + \frac{1}{2}\right] \leq [x + y] + 1.$$

Avem $(x) + (y) = \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[y + \frac{1}{2}\right] \leq [x + y] + 1 \leq \left[x + y + \frac{1}{2}\right] + 1 =$
$= (x + y) + 1$ și $[x] - [y] - 1 \leq [x - y]$ rezultă

$$[x + y] = \left[x + y + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] \geq \left[x + y + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\right] - 1 = (x + y) - 1.$$

P_6. Oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$ are loc dubla inegalitate:

$$(x - y) \leq (x) - [y] \leq (x - y) + 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație:

Vom utiliza inegalitatea

$[a-b] \leq [a]-[b] \leq [a-b]+1$ sau $[a]-[b]-1 \leq [a-b] \leq [a]-[b]$.

Avem $(x-y) = \left[x-y+\frac{1}{2}\right] = \left[x+\frac{1}{2}-y\right] \leq \left[x+\frac{1}{2}\right]-[y] = (x)-[y] =$

$= \left[x+\frac{1}{2}\right]-[y] \leq \left[x+\frac{1}{2}-y\right]+1 = (x-y)+1.$

$\boldsymbol{P_7}$. Să se arate că:

$$(x)+(-x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x+\frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{dacă } x+\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ținem seama de relația: $[a]+[-a] = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a \in \mathbb{Z} \\ -1, & \text{dacă } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

Avem $(x)+(-x) = \left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[-x+\frac{1}{2}\right] = \left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[-x-\frac{1}{2}+1\right] =$

$$= \left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[-x-\frac{1}{2}\right]+1 = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x+\frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{dacă } x+\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Vom defini partea fracționară a unui număr real x în raport cu (x) notată cu $]x[\to \mathbb{R} \to \left[0,\frac{1}{2}\right]$.

$\boldsymbol{D_4}$. Fie $x \in \mathbb{R}$, atunci definim $]x[: \mathbb{R} \to \left[0,\frac{1}{2}\right],]x[= |x-(x)|, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

$\boldsymbol{P_8}$. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq\ ]x[= |x-(x)| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x-(x) \leq \frac{1}{2}, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

$\boldsymbol{P_9}$. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, are loc relația:

$$]x[= \begin{cases} x-(x), & \text{dacă } (x) \leq x < (x)+\frac{1}{2} \\ (x)-x, & \text{dacă } (x)-\frac{1}{2} \leq x < (x) \end{cases} \qquad (*).$$

Rezultă din $\boldsymbol{P_8}$.

$\boldsymbol{P_{10}}$. Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, are loc relația:

$$]x[= \begin{cases} 1-(x), & \text{dacă } (x)-\frac{1}{2} \leq x < (x) \\ (x), & \text{dacă } (x) \leq x < (x)+\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație:

Utilizând P_9 avem

$(x) - \frac{1}{2} \leq x < (x) \Rightarrow [x] = (x) - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow]x[= (x) - 1 = [x] + 1 - x = 1 - \{x\},$

iar dacă $(x) \leq x < (x) + \frac{1}{2} \Rightarrow [x] = (x) \Rightarrow]x[= x - (x) = x - [x] = \{x\}$

rezultă relația dată.

P_{11}. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea:

$$]x[= \min(\{x\}, 1 - \{x\}).$$

Demonstrație:

Rezultă din definiția $]x]$ și din P_{10}.

Dacă $(x) - \frac{1}{2} \leq x < (x), \quad (*),$

atunci $[x] = (x) - 1$ și $]x[= (x) - x = [x] - 1 - x = 1 - \{x\}$

deci $(*)$ devine: $[x] + 1 - \frac{1}{2} \leq x < [x] + 1$, adică

$\frac{1}{2} \leq x - [x] < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \{x\} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \{x\} \leq \frac{1}{2}$

deci $\min(\{x\}, 1 - \{x\}) = 1 - \{x\} =]x[$.

Dacă $(x) \leq x < (x) + \frac{1}{2}$, atunci din P_{10} rezultă $]x[= \{x\}$ și $[x] = \{x\}$.

Prin urmare, rezultă $[x] \leq x < [x] + \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq x - [x] < \frac{1}{2}$, adică

$0 \leq \{x\} < \frac{1}{2}$ și $\frac{1}{2} < 1 - \{x\} \leq 1$ de unde obținem că:

$\min(\{x\}, 1 - \{x\}) = \{x\} =]x[$ și P_{11} este adevărată.

D_5. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ definim

$$s(x): \mathbb{R} \to \{\pm 1\} \text{ prin } s(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 0 \leq \{x\} < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{dacă } \frac{1}{2} \leq \{x\} < 1 \end{cases}.$$

P_{12}. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea:

$$x = (x) + s(s)]x[.$$

Demonstrație:

Considerăm situațiile (vezi P_{11}):

α) Dacă $(x) - \frac{1}{2} \leq x < (x) \Rightarrow [x] = (x) - 1$ și

$]x[= 1 - \{x\}$ cu $\frac{1}{2} \leq \{x\} < 1.$

Avem $x = [x] + \{x\} = (x) - 1 + \{x\} = (x) - (1 - \{x\}) = (x) + s(x)]x[.$

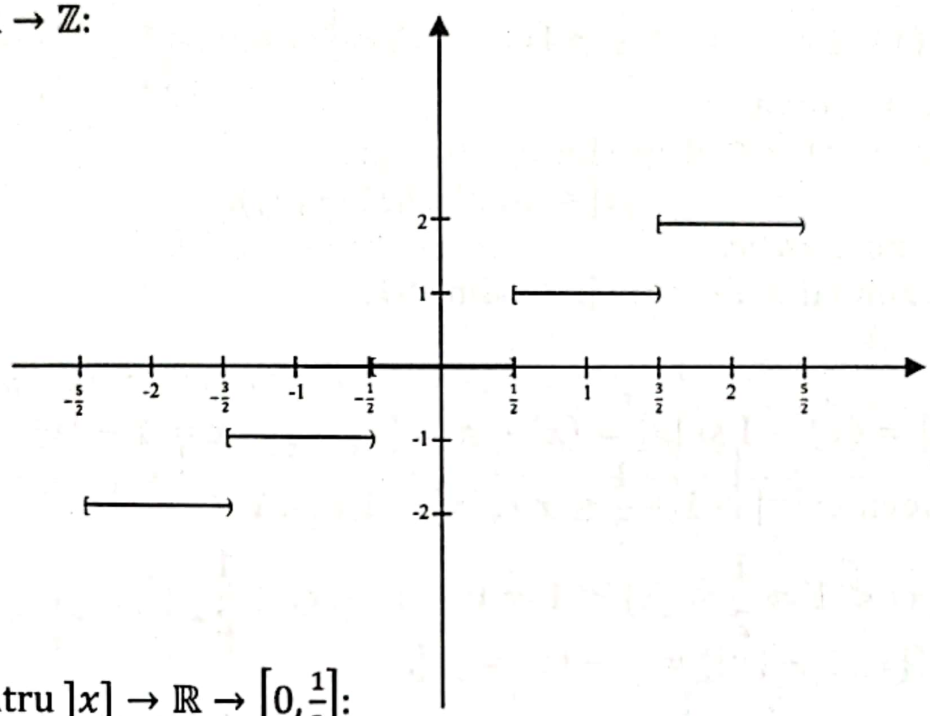
Scanned with OKEN Scanner

β) Dacă $(x) \leq x < (x) + \frac{1}{2}$, atunci $[x] = \{x\}$ și $0 \leq \{x\} < \frac{1}{2}$
de unde rezultă: $x = [x] + \{x\} = (x) + s(x)]x[= (x) + \{x\}$.

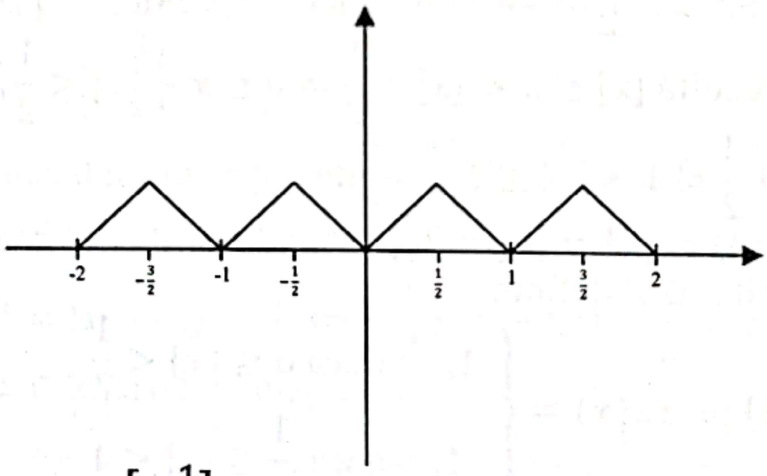
Pop Ovidiu

În cele ce urmează vom reprezenta grafic funcțiile (x) și $]x[$.

Avem $(x): \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$:



Graficul pentru $]x] \to \mathbb{R} \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$:



P_{13}. Funcția $]x] \to \mathbb{R} \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$ este periodică cu $T = 1$.

Demonstrație:

Vom utiliza proprietatea:

$$(x + m) = (x) + (m), \forall\, x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}.$$

Avem $]x + 1[= |x + 1 - (x + 1)| = |x + 1 - (x) - 1| = |x - (x)| =]x[$.

P_{14}. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ are loc identitatea (de tip Hermite):

$$(x) + \left(x + \frac{1}{n}\right) + \left(x + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(x + \frac{n-1}{n}\right) = \left(nx + \frac{n-1}{2}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație:

Se face substituția $n \to x + \frac{1}{2}$ în identitatea lui Hermite și se obține:

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{1}{2}+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{1}{2}+\frac{n-1}{n}\right]=$$
$$=\left[n\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] \Leftrightarrow \left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}+\frac{1}{2}\right]=$$
$$=\left[nx+\frac{n-1}{n}+\frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow (x)+\left(x+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\left(nx+\frac{n-1}{2}\right).$$

Ion Cucurezeanu, G.M. nr. 5/1983

$\boldsymbol{P_{15}}$. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea:

$$[x]+[2\{x\}]=(x).$$

Demonstrație:

Din $x=[x]+\{x\}=k+t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ și din $(x)=\left[x+\frac{1}{2}\right]=$

$=\left[k+t+\frac{1}{2}\right]$, egalitatea devine: $k+[2t]=\left[k+t+\frac{1}{2}\right]$ care este adevărată. Se discută în funcție de $t \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ sau $\left[\frac{1}{2},1\right)$.

Ovidiu Pop

$\boldsymbol{P_{16}}$. Să se arate că oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea:

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)+(a)=\left(2a-\frac{1}{2}\right).$$

$\boldsymbol{P_{17}}$. Să se arate că oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea:

$$\left(a-\frac{1}{3}\right)+\{a\}+\left\{2a-\frac{1}{3}\right\}=(3a).$$

Aplicația 1:

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ și $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^k \leq n < 2^{k+1}$, atunci exponentul lui 2 în dezvoltarea lui $n!$ este dat de expresia:

$$\exp_{n!}(2)=\left(\frac{n-1}{2}\right)+\left(\frac{n-2}{2^2}\right)+\cdots+\left(\frac{n-2^{n-1}}{2^n}\right).$$

Soluție:

Exponentul lui 2 în $n!$ este dat de

$$\exp_{n!}(2)=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\left[\frac{n}{2^3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{2^n}\right]$$

care este egală cu expresia:

$$\left[\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{n-2}{2^2}+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-2^{n-1}}{2^n}+\frac{1}{2}\right]=$$
$$=\left(\frac{n-1}{2}\right)+\left(\frac{n-2}{2^2}\right)+\cdots+\left(\frac{n-2^{n-1}}{2^n}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicația 2:

Pentru orice $x > 0$, are loc egalitatea:

$$(x) + \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2^2}\right) + \left(\frac{x}{2^3}\right) + \cdots + \left(2x - \frac{1}{2}\right).$$

Soluție:

În identitatea analoagă identității lui Hermite (vezi $\boldsymbol{P_{15}}$):

$$\left(2a - \frac{1}{2}\right) - \left(a - \frac{1}{2}\right) = (a)$$

se înlocuiește a pe rând cu $x, \frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \ldots, \frac{x}{2^n}$ și se adună egalitățile, rezultă:

$$\left(2x - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{x}{2^n} - \frac{1}{2}\right) = (x) + \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2^2}\right) + \cdots + \left(\frac{x}{2^n}\right),$$

dar pentru n suficient de mare avem:

$$\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0 \text{ și cum } x > 0 \text{ rezultă și } \left(\frac{x}{2^n} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Prin urmare, are loc egalitatea.

Aplicația 3:

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ și p un număr prim care nu divide pe $2n+1$, atunci exponentul numărului prim p din

$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)$ este

$$\left(\frac{n}{p}\right) + \left(\frac{n}{p^2}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{p^n}\right) + \cdots = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{n}{p^k}\right).$$

Soluție:

Demonstrăm mai întâi egalitatea: $\left[\frac{2n+1}{p^m}\right] = \left[\frac{2n}{p^m}\right]$ (1). Dacă $2n+1 = qp^t + \alpha$ unde $q \in \mathbb{N}$ și $\alpha \in \{1,2,\ldots,p^t-1\} \Rightarrow 2n = qp^t + \beta$, unde $\beta = \alpha - 1 \in \{0,1,2,\ldots,p^t-2\}$ deci $\frac{2n+1}{p^t} = q + \frac{\alpha}{p^t}$ și $\frac{2n}{p^t} = q + \frac{\beta}{p^t}$, dar cum $0 < \frac{\alpha}{p^t} \leq \frac{p^t-1}{p^t} = 1 - \frac{1}{p^t} < 1$ și $0 < \frac{\beta}{p^t} \leq \frac{p^t-2}{p^t} = 1 - \frac{2}{p^t} < 1$ rezultă că $\left[\frac{\alpha}{p^t}\right] = \left[\frac{\beta}{p^t}\right] = 0$ și atunci $\left[\frac{2n+1}{p^t}\right] = \left[q - \frac{\alpha}{p^t}\right] = q + \left[\frac{\alpha}{p^t}\right]$ și $\left[\frac{2n}{p^t}\right] + \left[q + \frac{\beta}{p^t}\right] = q + \left[\frac{\beta}{p^t}\right] = q$.

Așadar, egalitatea (1) este adevărată.

Să arătăm că exponentul numărului prim p în $(2n+1)!!$ este

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^*} \left(\left[\frac{2n+1}{p^m}\right] - \left[\frac{n}{p^m}\right]\right) \quad (2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem $(2n+1)!! = \dfrac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$. Exponenţii α şi β ai numărului p în $(2n+1)!$ şi respectiv în $n!$ sunt:

$$\alpha = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{(2n+1)}{p^m}\right] \text{ şi } \beta = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{n}{p^m}\right]$$

de unde rezultă că exponentul lui p în $(2n+1)!$ este dat de (2) (evident sumele α şi β sunt finite). Ţinând seama de (1) rezultă că (2) devine:

$$\sum_{m\in\mathbb{N}^*} \left(\left[\frac{2n}{p^m}\right] - \left[\frac{n}{p^m}\right]\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{n}{p^m}\right).$$

S-a ţinut seama că $[2x] - [x] = (x)$.

Aplicaţia 4:

O condiţie necesară şi suficientă ca un număr natural n să fie prim este ca cel mai apropiat întreg de $\dfrac{(n-1)!}{n}$ să fie impar.

Soluţie:

Pentru $n \geq 4$ se verifică direct. Fie $n \geq 5$. Dacă n este prim, atunci din teorema lui Wilson $(n-1)! + 1$ se divide prin n deci $\dfrac{(n-1)!+1}{n}$ este întreg şi impar.

Avem: $\dfrac{(n-1)!+1}{n} < \dfrac{(n-1)!}{n} + \dfrac{1}{2} < \dfrac{(n-1)!}{n} + \dfrac{1}{n} + 1 \Rightarrow$

$$\left[\frac{(n-1)!}{n} + \frac{1}{2}\right] = \frac{(n-1)!+1}{n} \Leftrightarrow \left(\frac{(n-1)!}{n}\right) = \frac{(n-1)!+1}{n}.$$

Dacă n nu este prim şi $n \geq 5$, atunci n divide pe $(n-1)! \Rightarrow (n-1)! = nd$ cu d natural şi $\left(\dfrac{(n-1)!}{n}\right) = d$.

Dar d este par deoarece exponentul lui 2 în descompunerea canonică a lui $(n-1)!$ este mai mare decât exponentul lui 2 în descompunerea canonică a lui n.

Ion Cucurezeanu

Scanned with OKEN Scanner

Probleme rezolvate

Ex. 1*. $5[x]+3(x)=\dfrac{37-4x}{4}$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x, iar (x) reprezintă cel mai apropiat întreg al lui x.

Soluție:

Rezultă că $\dfrac{37}{4}-x\in\mathbb{Z}$. Fie $\dfrac{37}{4}-x=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\dfrac{37}{4}-k$. Ecuația devine:

$$5[x]+3([2x]-[x])=k\Rightarrow 3[2x]+2[x]=k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left[\frac{37}{2}-2k\right]+2\left[\frac{37}{4}-k\right]=k\Rightarrow k=9$$

$$3\left[18+\frac{1}{2}-2k\right]+2\left[9+\frac{1}{4}-k\right]=k$$

$$54-6k+18-2k=k\Rightarrow k=8\Rightarrow x=\frac{37}{4}-8=\frac{5}{4}.$$

Elena Oprița
G.M. (S) nr. 11/2016

Ex. 2.** Să se rezolve ecuația:

$$\{x\}=\frac{x+[x]+\{x\}}{10}$$

unde (x) este cel mai apropiat întreg de numărul x.

Soluție:

Rezultă $9\{x\}=2[x]+(x)\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\dfrac{k}{9}, k=\overline{0,8}$.

Analizând toate situațiile rezultă: $x\in\left\{0,\dfrac{4}{3},\dfrac{25}{9}\right\}$.

Ex. 3.** $6[x]+4(x)=\dfrac{78-7x}{x}$

unde (x) este cel mai apropiat număr întreg de x.

Costin Zălog, G.M. nr. 1/1999

Soluție:

Avem $6[x]+4([2x]-[x])=\dfrac{78}{x}-7\Rightarrow 4[2x]+2[x]+7=\dfrac{78}{x}\in\mathbb{Z}$.

Fie $\dfrac{78}{x}=k\Rightarrow x=\dfrac{78}{k}$ atunci ecuația devine: $4\left[\dfrac{156}{k}\right]+2\left[\dfrac{78}{k}\right]+7=k-7$.

Cele două funcții din stânga și dreapta sunt de monomi diferiți. Se remarcă faptul că $k=31$ verifică deci $x=\dfrac{78}{31}$. Dacă considerăm funcția

$$f(k) = 4\left[\frac{156}{k}\right] + 2\left[\frac{78}{k}\right] + 7 - k$$

se remarcă $f(-25) < 0$ și $f(-26) > 0$, dar nu există $k \in (-26, -25)$ astfel încât $f(k) = 0$.

Ex. 4***. Fie numerele: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încât $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$ și $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Dacă $\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = m$, să se arate că $\sum_{i=1}^{m} x_i \geq 1$ (unde $[x]$ înseamnă cel mai mic întreg mai mare sau egal cu x).

Gheorghe Eckstein, Baraj, 1992

Soluție:

Evident $1 \leq m < n$, iar pentru $k \leq m$, șirul fiind descrescător avem:

$$(x_k - x_m)(1 - x_k) \geq 0 \Leftrightarrow x_k^2 \leq x_k - x_m + x_k x_m.$$

Prin adunare obținem:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k^2 \leq \sum_{k=1}^{m} x_k - m x_m + x_m \sum_{i=1}^{n} x_k \text{, dar}$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} x_k^2 = 1 - \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \geq 1 - \sum_{k=1}^{m} x_k + m x_m - x_m \sum_{k=1}^{m} x_k \quad (1).$$

Utilizând în (1) inegalitatea evidentă

$$x_m \sum_{k=m+1}^{n} x_k \geq \sum_{k=m+1}^{n} x_k^2 \text{ obținem:}$$

$$1 - \sum_{k=1}^{m} x_k + m x_m - x_m \sum_{k=1}^{n} x_k \leq 0 \quad (2),$$

dar cum $[x] \geq x \Rightarrow x_m \left(\left[\sum_{k=1}^{n} x_k \right] - \sum_{k=1}^{n} x_k \right) \geq 0$ și din (2) rezultă

$$\sum_{k=1}^{m} x_k \geq 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Probleme propuse

1. Cu ce putere a lui 2 se divide cel mai apropiat întreg de numărul $(1+\sqrt{2})^n$?

2. Care numere naturale se divid prin cel mai apropiat întreg de $\sqrt{n}$?

3. Fie $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = a_n + (\sqrt{a_n})$ sau $a_{n+1} = a_n + \left[\sqrt{a_n} + \frac{1}{2}\right]$.
Să se determine termenul general (a_n).

4. Fie $h(x) = x - (x)$, iar $S_n(n) = \sum_{k=1}^{n} h(2^k x)$. Să se arate că $|S_n(n)| \leq 1$.

5. Să se arate că:

$$(\sqrt{1}) + (\sqrt{2}) + (\sqrt{3}) + \cdots + \left(\sqrt{n^2-1}\right) = \frac{2}{3}n(n^2-1) \text{ sau}$$

$$\left[\sqrt{1}+\frac{1}{2}\right] + \left[\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right] + \cdots + \left[\sqrt{h^2-1}+\frac{1}{2}\right] = \frac{2}{3}n(n^2-1).$$

6*.** Să se arate că:

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{k} x\left(\frac{\lambda}{x}\right) - (x+2)\left(\frac{\lambda}{x+2}\right)\right| \leq k, \forall\, k \in \mathbb{N}^*.$$

§ 3. Funcțiile $\tau(n), \sigma(n), \varphi(n)$

1. Notăm cu $\tau(n)$ numărul divizorilor săi naturali, adică $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$.

Evident pentru $n = 1 \Rightarrow \tau(1) = 1$ și avem $n \geq 2 \Rightarrow \tau(n) \geq 2$.
Orice număr natural n se poate scrie $n = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$, unde p_i număr prim și $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$, unde α_i este exponentul lui p_i în descompunerea canonică a lui n $\alpha_i = \varrho_{p_i}(n)$ sau ord $_{p_i}(n)$. Dacă $p \nmid n, \varrho_p(n) = 0$.

Propoziția 1:
Dacă $n = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$ atunci $\tau(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$.

Propoziția 2:
Dacă $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, atunci:

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right) \text{ sau}$$

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right] = \left[\frac{n-1}{1}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n-1}{n-1}\right] + \tau(n).$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație:

Avem:

$$\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]=\begin{cases}1, & \text{pentru } k|n\\ 0, & \text{pentru } k\nmid n\end{cases}$$

deci suma $S=\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)$ este suma $\tau(n)=\sum_{d|n}1=S.$

Observația 1:

$n>1$ este prim, dacă și numai dacă $\tau(n)=2.$

Observația 2:

Numărul n este prim, dacă și numai dacă

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)=2.$$

Observația 3:

Funcția $\tau\colon \mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ este surjectivă, deoarece $\tau(1)=1,\tau(2)=2,\tau(2^2)=3$ și în general $\tau(2^m)=m+1,\forall\, m\in\mathbb{N}^*$ și evident neinjectivă.

Propoziția 3:

Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, avem $\tau(n)\leq 2\sqrt{n}.$

Demonstrație:

Fie $d_1<d_2<\cdots<d_k$ divizorii lui n care nu depășesc pe $\sqrt{n}$ (ceilalți divizori ai lui n sunt: $\frac{n}{d_1},\frac{n}{d_2},\ldots,\frac{n}{d_k}$ deci rezultă $\tau(n)\leq 2k<2\sqrt{n}$).

Notăm $T(x)=\sum_{n\leq x}\tau(n).$

Propoziția 4:

Să se arate că $T(x)=\sum_{n\leq x}\tau(n)=\sum_{n\leq[x]}\left[\frac{x}{n}\right].$

Demonstrație:

Divizorii numerelor $\leq x$ sunt 1,2,3,...,$[x]$. Numărăm de câte ori apare divizorul n. Multiplii săi sunt $n, 2n, 3n, \ldots, n\left[\frac{x}{n}\right]$ deci n este numărat de $\left[\frac{x}{n}\right]$ ori. Prin urmare, $T(x)=\sum_{n\leq[x]}\left[\frac{x}{n}\right].$

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 5:

Să se arate că:

$$T(x) = 2\sum_{n\le[\sqrt{x}]}\left[\frac{x}{n}\right] - [\sqrt{x}]^2.$$

Demonstrație:

Se vor număra separat aparițiile în $T(x)$ ale divizorilor $\le \sqrt{x}$ și ale acelora $> \sqrt{x}$, adică $T_1(x)$ respectiv $T_2(x)$. Avem $T(x) = T_1(x) + T_2(x)$.

Din propoziția 4 rezultă $T_1(x) = \sum_{n\le\sqrt{x}}\left[\frac{x}{n}\right]$.

Numerele $m > \sqrt{x}$ sunt divizori pentru numerele $m\cdot n$ și cum $m \cdot n \le x$ și $m > \sqrt{x} \Rightarrow n \le [\sqrt{x}]$.

De asemenea, avem $m \le \frac{x}{n} \Rightarrow m \le \left[\frac{x}{n}\right]$ și valorile pe care le poate lua m sunt: $[\sqrt{x}]+1, [\sqrt{x}]+2, \dots, \left[\frac{x}{n}\right]$, adică $\left[\frac{x}{n}\right] - [\sqrt{x}]$ valori.

Rezultă $T_2(x) = \sum_{n\le[\sqrt{x}]}\left[\frac{x}{n}\right] - [\sqrt{x}]$ deci $T(x) = T_1(x) + T_2(x) =$

$$= 2\sum_{n\le[\sqrt{x}]}\left[\frac{x}{n}\right] - [\sqrt{x}]^2.$$

Propoziția 6:

Să se arate că: $\tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]$.

Demonstrație:

În propoziția (2) notăm:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right] = a_n \Rightarrow a_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{n-1}{k}\right] \Rightarrow \tau(n) = a_n - a_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\tau(k) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n.$$

2. *Definiție:*

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $\sigma(n)$ suma divizorilor săi naturali, adică:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 7:

Fie $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, atunci $\sigma(n)$

$$= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

Demonstrație:

Divizorii lui $p_i^{\alpha_i}$ sunt $1, p_i, p_i^2, \ldots, p_i^{\alpha_i}$ deci $\sigma(p_i^{\alpha_i}) = 1 + p_i + p_i^2 + \cdots +$

$+p_i^{\alpha_i} = \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$.

Prin urmare, suma tuturor divizorilor naturali ai lui n este:

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} = \sigma(n).$$

Propoziția 8:

Să se arate că pentru $n \geq 2$ avem:

$$\sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} k\left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right).$$

Demonstrație:

Se știe că:

$$\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] = \begin{cases} 1, & \text{pentru } k|n \\ 0, & \text{pentru } k \nmid n \end{cases}$$

și prin urmare

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right) = \sum_{d|n} k = \sigma(n).$$

Observația 1:

$$\sigma(n) \geq n + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

Observația 2:

$\sigma(n) = n + 1$ dacă și numai dacă n este prim.

Observația 3:

$$\sigma(n) \geq n + [\sqrt{n}].$$

Notăm cu $S(x) = \sum_{n \leq x} \sigma(n)$.

Propoziția 9:

Să se arate că $S(x) = \sum_{n \leq [x]} n\left[\frac{x}{n}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație:

Divizorii numerelor $\leq x$ sunt $1,2,3,\ldots,[x]$. Numărul $n \leq [x]$ apare de $\left[\frac{x}{n}\right]$ ori ca divizor al numerelor $\leq x$ și prin urmare:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{[x]} n \left[\frac{x}{n}\right].$$

Propoziția 10:

Să se arate că:

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left(\left[\frac{x}{n}\right]^2 + (2n+1)\left[\frac{x}{n}\right]\right) - \frac{1}{2}\left([\sqrt{x}]^3 + [\sqrt{x}]^2\right), \forall\, x > 0.$$

Demonstrație:

Se notează cu S_1 și S_2 sumele care se referă la divizorii $n \leq [\sqrt{x}]$ și respectiv $m \geq [\sqrt{x}] + 1$ și conform propoziției 9 avem:

$$S_1(x) = \sum_{n \leq \sqrt{x}} n \left[\frac{x}{n}\right]$$

și numerele $m \geq [\sqrt{x}] + 1$ sunt divizorii pentru numerele $mn \leq x \Rightarrow$

$\Rightarrow n \leq [\sqrt{x}]$ și $m \leq \left[\frac{x}{n}\right]$. Valorile pe care le ia m pentru n fixat sunt:

$[\sqrt{x}] + 1, [\sqrt{x}] + 2, \ldots, \left[\frac{x}{n}\right]$, iar suma lor este $\frac{1}{2}\left([x] + 1 + \left[\frac{x}{n}\right]\right)\left(\left[\frac{x}{n}\right] - [\sqrt{x}]\right)$

și deci $S_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum \left(\left[\frac{x}{n}\right]^2 + \left[\frac{x}{n}\right] - \left([\sqrt{x}]^2 + [\sqrt{x}]\right)\right)$ și cum

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum \left(\left[\frac{x}{n}\right]^2 + (2n+1)\left[\frac{x}{n}\right]\right) - \frac{1}{2}\left([\sqrt{x}]^3 + [\sqrt{x}]^2\right).$$

Propoziția 11:

Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

$$1\left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + n\left[\frac{n}{n}\right] = \sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n).$$

Demonstrație:

În propoziția 8 notăm $b_n = \sum_{k=1}^{n} k\left[\frac{n}{k}\right]$ și $b_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k\left[\frac{n-1}{k}\right]$ și egalitatea

devine $\sigma(n) = b_n - b_{n-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1}) = b_n = \sum_{k=1}^{n} k\left[\frac{n}{k}\right]$

(unde $b_0 = 0$).

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 12:

Demonstrați că dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ este verificată egalitatea:

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right] = 2 + \left[\frac{n-1}{1}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n-1}{n-1}\right],$$

atunci n este număr prim.

Soluție:

Se știe că (vezi propoziția 2) are loc egalitatea:

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right] = \left[\frac{n-1}{1}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n-1}{n-1}\right] + \tau(n),$$

unde $\tau(n)$ reprezintă numărul divizorilor lui n. Rezultă $\tau(n) = 2 \Leftrightarrow n$ prim, atunci rezultă egalitatea de mai sus.

Leningrad, 1964

Propoziția 13:

Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ funcția:

$$f(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right] + [\sqrt{n}]$$

are mereu valori numere pare.

Soluție:

Procedăm prin inducție. Avem $f(1) = 2$. Presupunem că $f(k)$ este par, atunci:

$$f(k+1) = \left[\frac{k+1}{1}\right] + \left[\frac{k+1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{k+1}{k+1}\right] + [\sqrt{k+1}] =$$

$$= \left[\frac{k}{1}\right] + \left[\frac{k}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{k}{k}\right] + \tau(k+1) + [\sqrt{k+1}] \quad (*)$$

unde $\tau(k+1)$ este numărul divizorilor lui $k+1$.

Se știe că $\tau(n)$ este impar $\Leftrightarrow n$ este pătrat perfect.

Considerăm cazurile:

a) $k+1$ pătrat perfect, atunci $\tau(k+1)$ este impar și $[\sqrt{k+1}] = [\sqrt{k}] + 1$ și atunci $f(k+1)$ este număr par;

b) $k+1$ nu este pătrat perfect, atunci $\tau(k+1)$ este număr par și $[\sqrt{k+1}] = [\sqrt{k}]$. Prin urmare, și în acest caz $f(k+1)$ este număr par.

India, 2014

Propoziția 14:

Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

a) $\tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]$,

unde $\tau(k)$ reprezintă numărul divizorilor numărului natural k;

b) $\sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + n\left[\frac{n}{n}\right]$,

Scanned with OKEN Scanner

unde $\sigma(k)$ reprezintă suma divizorilor numărului natural k.

Soluția 1:

a) Totalitatea numerelor $p \in \{1,2,3,\dots,n\}$ care se divid la numărul k este egală cu $\left[\frac{n}{k}\right]$ și aceste numere sunt $k, 2k, 3k, \dots, \left[\frac{n}{k}\right]k$. Din cele de mai sus rezultă că suma: $\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]$ este egală cu numărul numerelor $p \in \{1,2,\dots,n\}$ divizibil cu 1, plus numărul numerelor $p \in \{1,2,\dots,n\}$ divizibile cu 2, plus numărul numerelor $p \in \{1,2,\dots,n\}$ divizibile cu 3, ..., plus numărul numerelor $p \in \{1,2,\dots,n\}$ divizibile cu n. Dar același lucru îl reprezintă și suma $\tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n)$.

Soluția 2:

Procedăm prin inducție, pentru $n = 1$ identitatea devine 1=1. Presupunând identitatea adevărată pentru n, o demonstrăm pentru $n+1$. Utilizând ipoteza inducției și identitatea precedentă, avem:

$$\tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n) + \tau(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] + \tau(n+1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\left[\frac{n+1}{k}\right] - \left[\frac{n}{k}\right]\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\frac{n+1}{k}\right] - \left[\frac{n}{n+1}\right] = 0 = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\frac{n+1}{k}\right].$$

b) Suma divizorilor egali cu k ai tuturor numerelor $p \in \{1,2,3,\dots,n\}$ este egală cu $k\left[\frac{n}{k}\right]$. Suma $\left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + n\left[\frac{n}{n}\right]$ este egală cu suma divizorilor egali cu 1 ai tuturor numerelor $p \in \{1,2,\dots,n\}$, plus suma divizorilor egali cu 2 ai tuturor numerelor $p \in \{1,2,3,\dots,n\}$..., plus suma divizorilor egali cu n ai tuturor numerelor $p \in \{1,2,\dots,n\}$. Dar același lucru îl reprezintă și suma $\sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n)$.

Propoziția 15:

Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right).$$

Soluția 1:

Conform proprietății cunoscute:

$$\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] = \begin{cases} 1, & \text{pentru } k \mid n \\ 0, & \text{pentru } k \nmid n \end{cases}$$

Prin urmare, se deduce că suma $\sum_{k=1}^{n} \left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right)$ este egală cu numărul de numere aflate printre numerele $1,2,3,\dots,n$ care divid pe n, adică $\tau(n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția 2:

Dacă $k|n$, atunci $n = kq$ și $\left[\frac{n}{k}\right] = q$, iar $n-1 = kq-1 = k(q-1)+k-1$

$\Rightarrow \left[\frac{n-1}{k}\right] = q-1$. Deci,

$$\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] = q-(q-1) = 1 \Rightarrow \sum_{m|n}\left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right) = \gamma(n).$$

Dacă $k \nmid n$, atunci $n = kq+r, 0<r<n \Rightarrow \left[\frac{n}{k}\right] = q$, iar $n-1 = kq+r-1$,

$0 \le r-1 < k \Rightarrow \left[\frac{n-1}{k}\right] = q \Rightarrow \left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] = 0.$

Avem, prin urmare $\sum_{k\ge 1}\left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right) = \tau(n).$

Propoziția 16:

Fie funcția $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}_+^*$

$$f(n) = \frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]\right).$$

Demonstrați că fiecare dintre inegalitățile:

a) $f(n+1) < f(n)$;

b) $f(n+1) > f(n)$ sunt verificate pentru o infinitate de valori ale lui n.

Soluție:

Vom nota cu semnul $\vee$ oricare dintre semnele „$<$" sau „$>$". Atunci $f(n+1) \vee f(n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1}\left(\left[\frac{n+1}{1}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n+1}{n+1}\right]\right) \vee \frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]\right) \Leftrightarrow$$

$$n\left(\left[\frac{n+1}{1}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n+1}{n+1}\right]\right) \vee (n+1)\left(\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]\right) \quad (1)$$

dar în baza identității

$$\left[\frac{n+1}{1}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n+1}{n+1}\right] = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right] + \tau(n+1) \quad (2)$$

unde $\tau(n+1)$ este numărul divizorilor $n+1$ din (1). Cu (2) rezultă:

$$n\left(\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right] + n\tau(n+1)\right) \vee (n+1)\left(\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\tau(n+1) \vee \left(\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]\right) \quad (3).$$

a) Fie $(n+1)$ un număr prim impar, atunci $\tau(n+1) = 2$ și evident n par. Atunci (3) capătă aspectul:

Scanned with OKEN Scanner

$$2n < \frac{n}{2} + \left[\frac{n}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right] \quad (4) \Rightarrow \frac{n}{2} < \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{n}{2} < n - 2 \leq \underbrace{\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]}_{n-2 \text{ termeni}} \Rightarrow n > 4$$

și $n+1$ prim deci (3) este adevărată în forma (4), de fapt a) este adevărată.

b) Fie $n+1 = 2^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, atunci $\tau(n+1) = k+1$ și atunci inegalitatea (3) capătă aspectul:

$$(2^k - 1)(k+1) > \left[\frac{2^k - 1}{1}\right] + \left[\frac{2^k - 1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{2^k - 1}{2^k - 1}\right]$$

de unde se deduce după simplificare că:

$$k + 1 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1} = S'$$

care este adevărată, deoarece membrul drept este mai mic decât k

$$\left(S = S' < 1 + 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{4} + \cdots + 2^{k-1}\frac{1}{2^{k-1}} = k\right).$$

Prin urmare, și inegalitatea b) este adevărată.

I.M.O., 2006

Propoziția 17:

O condiție necesară și suficientă ca un număr natural n să fie prim este:

$$\sum_{m \geq 1} \left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right) = 2.$$

Soluție:

Distingem două cazuri $m|n$ și $m \nmid n$. Dacă $m|n$, atunci $n = mq$, $n - 1 = mq - 1 = m(q-1) + m - 1$ deci

$$\left[\frac{m}{n}\right] - \left[\frac{n-1}{m}\right] = q - (q-1) = 1.$$

Dacă $m \nmid n$, atunci $n = mq + r$ cu $0 < r < m$, $n - 1 = mq + r - 1$, $0 \leq r - 1 < m$ deci

$$\left[\frac{m}{n}\right] - \left[\frac{n-1}{m}\right] = q - q = 0.$$

Așa că termenii sumei din enunț au valoarea 1 când $m|n$ și 0 în caz contrar deci:

$$\sum_{m \geq 1} \left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right) = \tau(n)$$

unde $\tau(n)$ este numărul divizorilor lui n, iar $\tau(n) = 2$ este tocmai condiția necesară și suficientă ca n să fie prim.

Scanned with OKEN Scanner

Probleme diverse

P_{18}. Fie şirul $x_r \equiv \left[\frac{n}{2^r}\right]_{r\in\mathbb{N}^*}$ unde $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Notăm cu τ numărul termenilor impari din şirul dat şi cu σ suma acestor termeni.

Să se arate că $2\sigma - \tau = \left[\frac{n}{2}\right]^2 - 3\sum\left[\frac{n}{2^r}\right]^2$.

Soluţie:

Evident $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ este dat, atunci există $t \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n \in [2^t, 2^{t+1})$ deci $\left[\frac{n}{2^r}\right] = 0$ pentru $r \geq t+1$ şirul dat este finit, adică $x_t = 1$.

r	$1,2,3,\dots,t$	$t+1$	$t+2$
x_r	$\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2^2}\right], \left[\frac{n}{2^3}\right], \dots, \left[\frac{n}{2^t}\right] = 1$	0	0

În succesiunea descrescătoare:

$$\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2^2}\right], \dots, \left[\frac{n}{2^{t-1}}\right], \left[\frac{n}{2^t}\right] \equiv 1$$

se notează cu τ numărul numerelor impare din şirul de mai sus şi cu σ suma acestor numere impare. Deoarece $n \in [2^t, 2^{t+1})$, pentru $n = 2^t \Rightarrow$ $\Rightarrow \left[\frac{n}{2}\right] = 2^{t-1}$.

Pentru $\left[\frac{n}{2^2}\right] = [2^{t-2}] = 2^{t-2}, \dots, \left[\frac{n}{2^t}\right] = [1] = 1$ deci rezultă $\tau = 1$ şi $\sigma = 1 \Rightarrow 2\sigma - \tau = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Să arătăm că suma din dreapta egalităţii este tot 1. Avem

$$S = \left[\frac{n}{2}\right]^2 - 3\sum_{r=2}^{t}\left[\frac{n}{2^r}\right] = 2^{2t-2} - 3(2^{t-4} + 2^{t-6} + \dots + 2^2 + 1) =$$

$$= 2^{2t-2} - (2^2 - 1)[(2^2)^{t-2} + (2^2)^{t-3} + (2^2)^1 + 1] =$$

$$= 2^{2t-2} - 2^{2t-2} + 1 = 1.$$

Dacă $n \in (2^t, 2^{t+1}) \Rightarrow 0 < n - 2^t < 2^t$ rezultă că există $s < t$ astfel încât $n - 2^t \in [2^s, 2^{s+1}) \Rightarrow n = 2^t + 2^s + 1$ care ne sugerează scrierea în baza 2 a lui n.

Conform teoremei fundamentale a sistemelor de numere rezultă că:

$n = 2^t + a_{t-1}2^{t-1} + a_{t-2}2^{t-2} + \dots + a_1 2 + a_0$ cu $a_t \in \{0,1\}, i = \overline{0, t-1}$.

Se obţine:

$$\tau_1 = \left[\frac{n}{2}\right] = 2^{t-1} + a_{t-1}2^{t-2} + \dots + a_2 2 + a_1 \equiv a_1 \pmod 2$$

$$\tau_2 = \left[\frac{n}{2^2}\right] = 2^{t-2} + a_{t-1}2^{t-3} + \dots + a_2 \equiv a_2 \pmod 2$$

Scanned with OKEN Scanner

.....

$$\tau_t = \left[\frac{n}{2^t}\right] = 1 \equiv 1 \pmod 2.$$

Cum $a_i \in \{0,1\}, i = \overline{0,t} \Rightarrow \tau = a_1 + a_2 + \cdots + a_t$ unde $a_t = 1$ și $\sigma = a_1\tau_1 +$

$$+a_2\tau_2 + \cdots + a_t\tau_t \text{ și } \left[\frac{n}{2}\right]^2 - 3\sum_{r=2}^{t}\left[\frac{n}{2^r}\right] = \tau_1^2 - 3(\tau_2^2 + \tau_3^2 + \cdots + \tau_t^2) =$$

$$= \tau_1^2 + \tau_2^2 + \cdots + \tau_t^2 - ((\tau_1 - a_1)^2 + (\tau_2 - a_2)^2 + \cdots + (\tau_{t-1} - a_{t-1})^2) =$$

$$= \tau_t^2 + 2a_1\tau_1 + 2a_2\tau_2 + \cdots + 2a_{t-1}\tau_{t-1} \ldots a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_{t-1}^2 =$$

$$= \sum a_k(2\tau_k - 1) = 2\sigma - \tau.$$

Corneliu Avram

P_{19}. Fie $a \in \mathbb{R}_+$ și $n > 1$ natural. Dacă x parcurge numerele naturale care se divid prin puterea a $n - a$ a unui întreg > 1, atunci

$$\sum_x \left[\sqrt[n]{\frac{a}{x}}\right] = [a].$$

Soluție:

Numărul numerelor întregi pozitive ce nu îl depășesc pe a este $[a]$. Fiecare dintre ele se scrie unic sub forma xk^n, unde k este un anumit număr întreg, iar x un întreg care nu se divide cu puterea a $n - a$ a unui întreg > 1. Totodată, cum din $xk^n \le a$, avem $k \le \sqrt[n]{\frac{a}{x}}$ deci $k \le \left[\sqrt[n]{\frac{a}{x}}\right]$, rezultă că unui x dat îi corespund $\left[\sqrt[n]{\frac{a}{x}}\right]$ numere de această formă.

P_{20}. Fie a, b, n numere naturale nenule cu $(a, n) = 1$.

Să se arate că:

a) $\left\{\frac{b}{n}\right\} + \left\{\frac{b+a}{n}\right\} + \left\{\frac{b+2a}{n}\right\} + \cdots + \left\{\frac{b+(n-1)a}{n}\right\} = \frac{n-1}{2}$;

b) $\sum_{k=s+1}^{s+n}\left\{\frac{ak+b}{n}\right\} = \frac{n-1}{2}$;

c) $\sum_{k=s+1}^{s+n}\left\{\frac{ak}{b}\right\} = \frac{\varphi(n)}{2}$, $\varphi(n)$ numărul numerelor prime cu n din mulțimea $\{1,2,\ldots,n\}$.

Soluție:

a) Avem $\left\{\frac{ak+b}{n}\right\}$ distincte două câte două. Presupunem că există $k_1 > k_2$ astfel încât

$$\left\{\frac{ak_1+b}{n}\right\}=\left\{\frac{ak_2+b}{n}\right\}\Rightarrow\frac{ak_1+b}{n}-\frac{ak_2+b}{n}=\frac{a(k_1-k_2)}{n}$$

este număr întreg, dar cum cu $(a,n)=1$ și $k_1-k_2<n-1$ rezultă o contradicție. Prin urmare, $\left\{\frac{ak+b}{n}\right\}$ ia n valori distincte, cu același numitor adică $\frac{0}{n},\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}$ deci

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{ak+b}{n}\right\}=\frac{0}{n}+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{2}.$$

b) Pentru fiecare $k\in\{s+1,s+2,\ldots,s+n\}$ folosind teorema împărțirii, avem:

$$ak+b=nq_k+r_k \text{ cu } 0\le r_k\le n-1.$$

Arătăm $r_{s+1},r_{s+2},\ldots,r_{s+n}$ sunt distincte. Într-adevăr presupunând că pentru $j\neq h$ avem $r_j=r_n\Rightarrow a(k-j)=n(q_k-q_j)\Rightarrow n|a(k-j)$, fals, deoarece $(n,a)=1$ și $n\nmid k-j$.

Avem $\sum_{k=s+1}^{n+s}\left\{\frac{ak+b}{n}\right\}=\sum_{k=s+1}^{p+n}\left\{q_k+\frac{r_k}{n}\right\}=\sum_{k=s+1}^{s+n}\left\{\frac{r_k}{n}\right\}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}=\frac{n-1}{2}.$

S-a utilizat faptul că $\{r_{s+1},r_{s+2},\ldots,r_{s+n}\}=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

c) Printre n numere întregi consecutive se află $\varphi(n)$ numere prime cu n. Fie $a_1,a_2,\ldots,a_{\varphi(n)}$ numere prime cu n aflate printre numerele $s+1,s+2,\ldots,s+n$. Utilizând teorema împărțirii pentru fiecare $a_j\in\{1,2,\ldots,\varphi(n)\}$, $a_j=nq_j+r_j$, $0\le r_j<n$ și cum $(a,n)=1\Rightarrow(n,r_j)=1$. Evident numerele r_j sunt distincte două câte două, pentru că dacă pentru $k\neq h$ rezultă $r_k=r_h\Rightarrow n(q_k-q_j)=a(a_k-a_h)\Rightarrow h|a(a_k-a_h)$ și cum $(n,a)=1\Rightarrow n|a_k-a_h$, imposibil (pentru că $0<(a_k-a_h)<n$). Prin urmare, $r_1,r_2,\ldots,r_{\varphi(n)}$ sunt cele $\varphi(n)$ numere prime cu n aflate printre numerele $1,2,3,\ldots,n$.

Avem $\sum_{k=s+1}^{s+n}\left\{\frac{ak}{b}\right\}=\sum_{j=1}^{\varphi(n)}\left\{\frac{aa_j}{n}\right\}=\sum_{j=1}^{\varphi(n)}\frac{r_j}{n}=\sum_{k=1,(k,n)=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{\varphi(n)}{2}.$

Ultima egalitate se motivează astfel: cum $(n,k)=1\Leftrightarrow(n-k,n)=1$ și deci avem

$$\sum_{k=1,(k,n)}^{n}\frac{k}{n}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1,(k,n)=1}^{n}\frac{k}{n}+\sum_{k=1,(k,n)=1}^{n}\frac{n-k}{n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1,(k,n)=1}^{n}1=\frac{\varphi(n)}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

P_{21}. Fie m și n numere naturale nenule astfel încât $(m,n)=1$. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{m}\varphi\left(\left[\frac{nk}{m}\right]\right)\cdot\left[\frac{m}{k}\right]=\sum_{k=1}^{m}\varphi\left(\left[\frac{mk}{n}\right]\right)\cdot\left[\frac{n}{k}\right],$$

unde φ este indicatorul lui Euler.

Soluție:

Considerăm punctele $O(0,0)$, $A(m,0), B(m,n)$ și $C(0,n)$ în plan și mulțimea M a punctelor laticiale situate în interiorul triunghiului OAB sau pe laturile sale, excluzând originea. Numim $P\in M$ vizibil din origine dacă nu există niciun punct laticial pe segmentul (OP).

Dacă $P(k,y)$ este vizibil, cum $\frac{y}{k}\leq\frac{n}{m}$ și $(k,y)=1$, este clar că y poate lua $\varphi\left(\left[\frac{nk}{m}\right]\right)$ valori. Pe de altă parte $|M\cap(OP)|=\left[\frac{m}{k}\right]$.

Sumând după toate punctele vizibile obținem:

$$|M|=\frac{(m+1)(n+1)}{2}=\sum_{k=1}^{m}\varphi\left(\left[\frac{nk}{m}\right]\right)\cdot\left[\frac{m}{k}\right].$$

Analog, expresia din membrul drept este $\frac{(m+1)(n+1)}{2}$, de unde și concluzia problemei.

Marius Covachi

$\oint$ 4. Spectrul unui număr

Definiție:

Șirul lui S. Beatty sau șirul care definește spectrul unui număr real α

$a_n=[n\alpha], \alpha\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$ sau $S(\alpha)=\{[\alpha],[2\alpha],[3\alpha],\dots\}$.

Exemple:

$S(1)=\{1,2,3,\dots,n\}=N$

$S(2)=\{2,4,6,8,10,\dots\}$

$S\left(\frac{1}{3}\right)=\{0,0,1,1,1,2,2,2,,3^n\dots\}$

$S(\sqrt{2})=\{1,2,4,5,7,8,9,11,12,14,15,16,18,19,\dots\}$

Proprietatea 1:

Să se arate că $\alpha=\beta\Leftrightarrow S(\alpha)=S(\beta)$.

Soluție:

Implicația „$\Rightarrow$" este evidentă.

Reciproc, dacă $S(\alpha)=S(\beta)$, atunci $[n\alpha]=[n\beta], \forall\, n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow |n\alpha - n\beta| < 1 \Rightarrow |n(\alpha-\beta)| < 1 \Rightarrow |\alpha-\beta| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \alpha = \beta.$

Proprietatea 2:

Numărul natural nenul m aparţine spectrului numărului α, dacă şi numai dacă $0 \le \alpha - \alpha\left\{\frac{m}{\alpha}\right\} < 1$. Dacă $m \in S(\alpha)$, atunci $m = \left[\alpha + \alpha\left[\frac{m}{\alpha}\right]\right]$.

Soluţie:

$$m = \alpha \cdot \frac{m}{\alpha} = \alpha\left(\left[\frac{m}{\alpha}\right] + \left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right) = \alpha + \alpha\left[\frac{m}{\alpha}\right] - \left(\alpha - \alpha\left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right) = \quad (*)$$

$$= \left[\alpha + \alpha\left[\frac{m}{\alpha}\right]\right] + \left\{\alpha + \alpha\left[\frac{m}{\alpha}\right]\right\} - \left(\alpha - \alpha\left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right) = \left[\alpha + \alpha\left[\frac{m}{\alpha}\right]\right], \text{deoarece}$$

$$\left\{\alpha + \alpha\left[\frac{m}{\alpha}\right]\right\} = \left\{\alpha + \alpha\frac{m}{\alpha} - \alpha\left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right\} = \left\{m + \alpha - \alpha\left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right\} = \left\{\alpha - \alpha\left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right\}.$$

Din $(*)$ $m = \alpha + \alpha\left[\frac{m}{\alpha}\right] - \left(\alpha - \alpha\left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right) \Rightarrow \alpha - \alpha\left\{\frac{m}{\alpha}\right\} = \left(\alpha + \alpha\left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right) - m \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\alpha - \alpha\left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right] = \left[\alpha + \alpha\left\{\frac{m}{\alpha}\right\}\right] - m = m - m = 0 \Rightarrow 0 \le \alpha - \alpha\left\{\frac{m}{\alpha}\right\} < 1.$$

Proprietatea 3:

Dacă $\alpha \ge 1$, atunci spectrul $S(\alpha)$ este un şir strict crescător, adică $a_n < a_{n+1}$.

Soluţie:

$$[n\alpha] < [n\alpha] + [\alpha] \le [(n+1)\alpha]$$

(s-a utilizat proprietatea $[a] + [b] \le [a+b]$).

Teorema Beatty

Fie α şi β numere iraţionale pozitive. Spectrele $S(\alpha)$ şi $S(\beta)$ fac o partiţie a numerelor naturale nenule, dacă şi numai dacă $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Demonstraţie:

Necesitatea: Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \alpha, \beta > 0$ cu $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Arătăm că $S(\alpha) \cap S(\beta) = \emptyset$ şi $S(\alpha) \cup S(\beta) = \mathbb{N}^*$.

Fie $S(\alpha) = (a_n)_{n\ge1}$ şi $S(\beta) = (b_n)_{n\ge1}$. Arătăm că $(a_n) \cap (b_n) = \emptyset$.

Procedăm prin reducere la absurd.

Să presupunem că există k, p, q astfel încât $[p\alpha] = [q\beta] = k$,

$k \le p\alpha < k+1$ şi $k \le q\beta < k+1$. Dar cum α şi β sunt iraţionale, rezultă că $k < p\alpha < k+1$ şi $k < q\beta < k+1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{k}{\alpha} < p < \frac{k+1}{\alpha} \text{ şi } \frac{k}{\beta} < p < \frac{k+1}{\beta} \Rightarrow$$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow k\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)<p+q<(k+1)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow k<p+q<k+1$, absurd. Prin urmare, $S(\alpha)\cap S(\beta)=\emptyset$.

Se deduce ușor (vezi în exercițiul precedent) că $a_1=1$ sau $b_1=1$. Fie n cel mai mic număr natural care nu se află în $(a_n)_{n\geq 1}$ sau $(b_n)_{n\geq 1}$, atunci există $k,m\in\mathbb{N}^*$ care să satisfacă condițiile:

$$\begin{cases}[k\alpha]=n-1\\ [m\beta]<n-1\end{cases}\text{ sau }\begin{matrix}[k\alpha]<n-1\\ [m\beta]=n-1\end{matrix}\qquad(1)$$

și $[(k+1)\alpha]\geq n+1,[(m+1)\beta]\geq n+1\qquad(2)$.

Din (1) rezultă că $n-1$ este unul dintre termenii șirului și că toate numerele naturale mai mici ca $n-1$ se află printre termenii șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ sau $(b_n)_{n\geq 1}$.

Precizăm că toate numerele naturale de la 1 la $n-1$ sunt dispersate astfel, k termeni ai șirului (a_n) și m termeni ai șirului (b_n), adică $n-1=$
$=k+m$ ceea ce rezultă din (1). (Din (2) rezultă că

$$(k+1)\alpha\geq[(k+1)\alpha]\geq n+1\text{ și}$$
$$(m+1)\beta\geq[(m+1)\beta]\geq n+1\quad(2'),$$

dar cum α și β iraționale, inegalitățile (2') sunt stricte, adică

$$(k+1)\alpha>n+1,(m+1)\beta>n+1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\alpha>\frac{n+1}{k+1},\beta>\frac{n+1}{m+1}\text{ și }1<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<\frac{k+1}{n+1}+\frac{m+1}{n+1}=\frac{n-1+2}{n+1}=1,$$

absurd.

Presupunerea făcută este falsă deci $S(\alpha)\cup S(\beta)=\mathbb{N}^*$.

Suficiența:

Dacă $S(\alpha)\cup S(\beta)=\mathbb{N}^*$ unde α,β sunt numere pozitive, atunci numerele α și β sunt iraționale și $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.

Fie numărul natural n care conține k elemente din $S(\alpha)$ și m elemente din $S(\beta)$, adică $n=k+m$.

$$\text{Avem }\begin{cases}[k\alpha]<n+1\leq[(k+1)\alpha]\leq(k+1)\alpha\\ [m\beta]<n+1\leq[(m+1)\beta]\leq(m+1)\beta\\ n=k+m\end{cases}\qquad(4)$$

$$\text{de unde rezultă: }\begin{cases}k\alpha<n+1\leq(k+1)\alpha\\ m\beta<n+1\leq(m+1)\beta\\ n=k+m\end{cases}\qquad(5).$$

Deoarece $S(\alpha)$ și $S(\beta)$ nu au elemente comune, numărul $n+1$ face parte numai dintr-un spectru deci în (5) inegalitățile sunt stricte, adică:

$$\begin{cases}k\alpha<n+1<(k+1)\alpha\\ m\beta<n-1<(m+1)\beta\\ n=k+m\end{cases}\qquad(5')\Rightarrow$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Rightarrow \begin{matrix} k < \dfrac{n+1}{\alpha} \\ m < \dfrac{n+1}{\beta} \end{matrix} \text{ și } \begin{matrix} k+1 > \dfrac{n+1}{\alpha} \\ m+1 > \dfrac{n+1}{\beta} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{n+2}{n+1} \quad (6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 1 < \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 1\right| < \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \quad (7)$$

și cum $\alpha, \beta > 0 \Rightarrow \alpha > 1, \beta > 1$. Din (7) rezultă că α și β sunt ambele raționale sau ambele iraționale.

Fie $\alpha = \frac{p}{q}, p > q \Rightarrow \beta = \frac{p}{p-q} \Rightarrow q\alpha = p$ și $(p-q)\beta = p \Rightarrow$

$\Rightarrow [q\alpha] = [(p-q)\beta]$, absurd. Deci, α și β sunt iraționale.

A_1. Dacă $S(\alpha)$ și $S(\beta)$ determină o partiționare a numerelor naturale, atunci șirurile: $[\alpha[\alpha n]], [\alpha[\beta n]]$; $[\beta[\alpha n]], [\beta[\beta n]]$ determină o partiționare a numerelor naturale nenule.

Soluție:

$S(\alpha) = (a_n)$ și $S(\beta) = (b_n)$, atunci $[\alpha[\alpha n]] = [\alpha a_n] = (a_{a_n})$ și $[\alpha[\beta n]] = [\alpha b_n] = (a_{b_n})$, dar $(a_{a_n}) \cap (a_{b_n}) = \emptyset$ și $(a_{a_n}) \cup (a_{b_n}) = (a_n)$ deoarece $(a_n) \cap (b_n) = \emptyset$ și $(a_n) \cup (b_n) = \mathbb{N}^*$.

Analog $[\beta[\alpha n]] = [\beta a_n] = (b_{a_n})$, $[\beta[\beta n]] = [\beta b_n] = (b_{b_n})$ și analog $(b_{a_n}) \cap (b_{b_n}) = \emptyset$ și $(b_{a_n}) \cup (b_{b_n}) = (b_n)$.

Prin urmare, cele patru șiruri determină o partiționare a numerelor naturale.

Putnam, 1995

A_2. Să se calculeze suma

$$S = \sum_{n=1}^{71} [n\sqrt{2}] + \sum_{n=1}^{29} [n(2+\sqrt{2})].$$

Soluție:

Cum $[71\sqrt{2}] = 100$ și $[58 + 29\sqrt{2}] = 99$, atunci suma $\sum_{n=1}^{71} [n\sqrt{2}]$ este suma a 71 de elemente din spectrul $S\sqrt{2}$. Conform teoremei lui Beatty avem: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} = 1$ deci $S(\sqrt{2})$ și $S(2+\sqrt{2})$ realizează o partiție a seriei de numere naturale de la 1 la 100 $\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{71}[n\sqrt{2}]+\sum_{n=1}^{29}[n(2+\sqrt{2})]=1+2+\cdots+100=5050.$$

A_3. Să se calculeze $\sum_{n=16}^{87}[-2n\sqrt{2}]$.

Soluție:

Cum $[-2n\sqrt{2}]+[2n\sqrt{2}]=-1$ și cum $\frac{1}{4+2\sqrt{2}}+\frac{1}{4-2\sqrt{2}}=1$,

atunci conform teoremei lui Beatty $S(4+2\sqrt{2})$ și $S(4-2\sqrt{2})$ realizează o partiție a numerelor naturale $\mathbb{N}^*$.

Avem $$\sum_{n=16}^{87}[-2n\sqrt{2}]=\sum_{n=1}^{15}[2n\sqrt{2}]+\sum_{n=1}^{87}[-2n\sqrt{2}]+15=$$

$$\left(\text{și cum } [15(4+2\sqrt{2})]=102\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{15}[n(4+2\sqrt{2})]+\sum_{n=1}^{87}[n(4-2\sqrt{2})]+15-\sum_{n=1}^{15}4n-\sum_{n=1}^{87}4n=$$

$$=(1+2+\cdots+102)+15-4(8\cdot 15+44\cdot 87)=-10524.$$

A_4. Să se demonstreze că spectrul $S[\sqrt{2}]$ conține o infinitate de puteri ale lui 2.

Soluție:

Trebuie să arătăm că există o infinitate de valori naturale ale lui m pentru care

$$[m\sqrt{2}]=2^k \Leftrightarrow 2^k<m\sqrt{2}<2^k+1 \quad (1).$$

Putem să sporim inegalitățile (1) și anume $2^k<m\sqrt{2}<2^k+\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2)

și atunci (2) implică (1). Din (2) rezultă:

$$2^k-\sqrt{2}<m\sqrt{2}-\sqrt{2}<2^k-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{k-1}\sqrt{2}-1<m-1<2^{k-1}\sqrt{2}-\frac{1}{2} \quad (3).$$

Dacă $m-1=[2^{k-1}\sqrt{2}]$, atunci inegalitatea din stânga este evidentă:

$$2^{k-1}\sqrt{2}-1<[2^{k-1}\sqrt{2}].$$

Dar pentru cea din dreapta, utilizăm un exercițiu de la capitolul *Inegalități* care afirmă că $2^n\sqrt{2}-\frac{1}{2}>[2^n\sqrt{2}]$ are o infinitate de soluții de numere naturale, deci și membrul drept este adevărat pentru o infinitate de numere naturale pare m și k.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, pentru o infinitate de numere naturale k, se poate afirma dacă $m = \left[2^{k-1}\sqrt{2}\right] + 1$ este adevărată (1).

$\boldsymbol{A_5}$. Demonstraţi că nu există trei numere reale α, β, γ ale căror spectre $S(\alpha), S(\beta), S(\gamma)$ să realizeze o partiţie a numerelor naturale.

Putnam, 1995

$\boldsymbol{A_6}$. Spectrul secţiunii de aur, $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Avem relaţiile $\varphi^2 = \varphi + 1$ (1), $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$ (2), $\dfrac{1}{\varphi} + \dfrac{1}{\varphi^2} = 1$ (3)

din care rezultă că $\{\varphi\} = \left\{\dfrac{1}{\varphi}\right\}$ (4).

Considerăm spectrele $S(\varphi), S(\varphi^2) = S(\varphi + 1)$.

Atunci $S(\varphi) = [n\varphi] = \{1,3,4,6,8,9,11,12,14,16,17, \ldots\}$ şi

$S(\varphi^2) = [n\varphi^2] = \{2,5,7,10,13,15,18,20,23, \ldots\}$.

Cum $\dfrac{1}{\varphi} + \dfrac{1}{\varphi^2} = 1$, atunci conform teoremei Beatty:

$$S(\varphi) = (a_n), S(\varphi^2) = (b_n)$$

realizează o partiţie a mulţimii numerelor naturale.

$\boldsymbol{A_7}$. a) Să se arate că $b_n = a_n + n$.

Soluţie:

Într-adevăr, deci $\varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow n\varphi^2 = n\varphi + n \Rightarrow [n\varphi^2] =$

$= [n\varphi + n] = [n\varphi] + n \Rightarrow b_n = a_n + n$.

b) Să se arate că $\{n\varphi^2\} = \{n\varphi\}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie:

Dacă $b_n = a_n + n \Rightarrow [n\varphi^2] = [n\varphi] + n \Rightarrow$

$\Rightarrow n\varphi^2 - \{n\varphi^2\} = n\varphi - \{n\varphi\} + n \Rightarrow$

$\Rightarrow n(\varphi^2 - \varphi - 1) - \{n\varphi^2\} = -\{n\varphi\} \Rightarrow \{n\varphi^2\} = \{n\varphi\}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$\boldsymbol{A_8}$. Să se arate că $[a_n\varphi] = b_n - 1$ sau $a_{a_n} = b_n - 1$.

Soluţie:

Relaţia $[a_n\varphi] = b_n - 1 \Leftrightarrow [\varphi[\varphi n]] = [\varphi^2 n] - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [\varphi[\varphi n]] - [\varphi^2 n] + 1 = 0 \Leftrightarrow [\varphi[\varphi(n)]] - [\varphi^2 n] + 1 = 0$.

Notăm $E_n = \varphi[\varphi n] - [\varphi^2 n] + 1$ şi arătăm $[E_n] = 0$.

Avem $E_n = \varphi(\varphi n - \{\varphi n\}) - [\varphi^2 n] + 1 = \varphi^2 n - [\varphi^2 n] - \varphi\{\varphi n\} + 1 =$

$= \{\varphi^2 n\} - \varphi\{\varphi(n)\} + 1 = \{\varphi n\} - \varphi\{\varphi n\} + 1 = (1 - \varphi)\{\varphi(n)\} + 1$

(s-a aplicat $\boldsymbol{A_2}$), dar cum $-1 < 1 - \varphi < 0$ şi $0 < \{\varphi n\} < 1 \Rightarrow [E_n] = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

A_9. Să se arate că $a_{b_n} = a_n + b_n$.

Soluție:

Relația dată se mai scrie:

$$[\varphi[\varphi^2 n]] = [\varphi n] + [\varphi^2 n].$$

Notăm cu $E_n = \varphi[\varphi^2 n] - [\varphi n] - [\varphi^2 n]$ și vom arăta că $[E_n] = 0$.

Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} E_n &= \varphi(\varphi^2 n - \{\varphi^2 n\}) - \varphi(n) + \{\varphi n\} - \varphi^2 n + \{\varphi^2 n\} = \\ &= \varphi^3 n - \varphi\{\varphi^2 n\} - \varphi n + \{\varphi n\} - \varphi^2 n + \{\varphi^2 n\} = \\ &= \varphi n(\varphi^2 - \varphi - 1) - \varphi\{\varphi n\} + 2\{\varphi n\} = (2 - \varphi)\{\varphi n\} \end{aligned}$$

(s-a utilizat A_7 b): $\{\varphi^2 n\} = \{\varphi n\}$ și $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$).

Dar cum $0 < (2 - \varphi)\{\varphi n\} < 1 \Rightarrow [E_n] = 0$.

A_{10}. Să se arate că $b_{b_n} = 3a_n + 2n$.

Soluție:

Din $a_k = b_k - k$ și $a_{b_n} = a_n + b_n$ rezultă $a_{b_n} = b_{b_n} - b_n \Rightarrow b_{b_n} - b_n = a_n + b_n \Rightarrow b_{b_n} = a_n + 2b_n = 3a_n + 2n$ (s-a utilizat A_7).

A_{11}. Să se arate că $b_{b_n} = 3b_n - n$.

Soluție:

Utilizăm A_1 $b_n = a_n + n$ și A_4 $a_{b_n} = a_n + b_n$.

Din A_1 rezultă $b_{b_n} = a_{b_n} + b_n \Rightarrow b_{b_n} - b_n = a_{b_n} = a_n + b_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow b_{b_n} = a_n + 2b_n = b_n - n + 2b_n = 3b_n - n.$$

A_{12}. Să se arate că șirurile

$$[\varphi[\varphi n]], [\varphi[\varphi^2 n]] \text{ și } [\varphi^2 n]$$

realizează o partiție a numerelor naturale.

Soluție:

Dacă $[\varphi n] = a_n$ și $[\varphi^2 n] = b_n$, atunci $[\varphi[\varphi n]] = [\varphi a_n] = a_{a_n}$ și $[\varphi[\varphi^2 n]] = [\varphi b_n] = a_{b_n}$ și $[\varphi^2 n] = b_n$.

Analog ca la proprietatea P_4 avem $a_{a_n} \cap a_{b_n} = \emptyset$ și $a_{a_n} \cup a_{b_n} = a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{a_n} \cup a_{b_n} \cup b_n = a_n \cup b_n \equiv \mathbb{N}^*$.

§ 5. Funcția lui Legendre

Definiție 1:

Dacă n este un număr natural nenul și p un număr prim, atunci exponentul lui p din descompunerea în factori primi a lui $n!$ se notează $e_p(n)$ și se numește funcția Legendre atașată perechii (n, p) (se mai notează cu $\exp_{n!}(p)$.

Observația 1:

Dacă $n = 1$ și p număr prim, atunci $e_p(1) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Observația 2:

Dacă $n = p$ prim, atunci $e_p(p) = 1$.

Observația 3:

Dacă $n < p$ atunci $e_p(n) = 0$, iar dacă $n = p$, atunci $e_p(p) = 1$.

Propoziția 1:

Avem următoarea relație:

$$e_p(n) = \sum_{k\geq 1} \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Demonstrație:

Evident suma are un număr finit de termeni. Pentru $n \geq p$, pentru determinarea lui $e_p(n)$ din produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$ se vor lua în considerație numai multiplii de p, adică $1 \cdot p, 2 \cdot p, 3 \cdot p, \ldots, \left[\frac{n}{p}\right] p$.

Dacă notăm cu $n_1 = \left[\frac{n}{p}\right]$, atunci din produsul termenilor de mai sus rezultă $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \left[\frac{n}{p}\right] p^{n_1}$ rezultă că pentru $n_1! = \left[\frac{n}{p}\right]!$ numărul p intră de $\left[\frac{n_1}{p}\right]$ ori cu factor, adică $\left[\frac{n_1}{p}\right] = \left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right] = \left[\frac{n}{p^2}\right]$.

Avem $e_p(n) = \left[\frac{n}{p}\right] + e_p\left(\left[\frac{n}{p}\right]\right)$,

$$e_p\left(\left[\frac{n}{p}\right]\right) = \left[\frac{n}{p^2}\right] + e_p\left(\left[\frac{n}{p}\right]\right)$$

.....

$$e_p\left(\left[\frac{n}{p^{m-1}}\right]\right) = \left[\frac{n}{p^m}\right] + e_p\left(\left[\frac{n}{p^m}\right]\right)$$

unde $\left(\left[\frac{n}{p^m}\right]\right) = 0$ deci $e_p(n) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{m-1}$

$$e_p(n) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^m}\right] \text{ unde } p^m \leq n < p^{m+1}, m = \left[\frac{\ln n}{\ln p}\right].$$

Propoziția 2:

Dacă p este număr prim și $m \in \mathbb{N}^*$, atunci $\exp_{n!}(p^m) = \left[\frac{\exp_{n!}(p)}{m}\right]$.

Propoziția 3:

Dacă $a \in \mathbb{N}^*$ are descompunere în factori primi sub forma:

$$a = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k},$$

atunci $\exp_{n!}(a) = \min\left(\exp_{n!}(p_1^{m_1}), \exp_{n!}(p_2^{m_2}), \ldots, \exp_{n!}(p_k^{m_k})\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple:

a) Să se determine $\exp_{50!}(3^7)$.

Avem: $\exp_{50!}(3^7) = \left[\frac{\exp_{50!} 3}{7}\right] = \left[\frac{22}{7}\right] = 3.$

b) Să se determine $\exp_{253!}(108)$. Avem:

$\exp_{253!}(108) = \min(\exp_{253!}(2^2), \exp_{253!}(3^3)) =$

$= \min\left(\left[\frac{256}{2}\right], \left[\left[\frac{125}{3}\right]\right]\right) = 41.$

A_1. Dacă p este prim și $p^q | C_n^m$, atunci $p^q \leq n$.

Soluție:

Vom utiliza inegalitatea $[x+y]-[x]-[y] \leq 1$ $(*)$ deci $C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$ rezultă că exponentul lui p în descompunerea lui C_n^m este:

$$r = e_p(n) - e_p(m) - e_p(n-m) = \sum_{i=1} \left[\frac{n}{p_i}\right] - \left[\frac{m}{p^i}\right] - \left[\frac{n-m}{p^i}\right].$$

Cum această sumă are cel mult k termeni nenuli, unde $p^k \leq n < p^{k+1}$ și dacă în inegalitatea de mai sus punem $x = \frac{m}{p^i}$ și $y = \frac{n-m}{p^i}$, rezultă că fiecare paranteză este cel mult egală cu 1 rezultă $r \leq k$.

Din $p^q | C_n^m \Rightarrow q \leq r \leq k \Rightarrow p^q \leq p^k \leq n$ ...

A_2. Dacă p este prim și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\frac{n}{p} - 1 < e_p(n) < \frac{n}{p-1}.$$

Soluție:

Din expresia lui $e_p(n) \Rightarrow e_p(n) \geq \left[\frac{n}{p}\right] > \frac{n}{p} - 1$ deci rezultă prima inegalitate.

Din $e_p(n) = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{n}{p^i}\right]$ unde $m = \left[\frac{\ln n}{\ln p}\right] \Rightarrow e_p(n) < \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p^i} < n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^i} =$

$= n \frac{1}{p\left(1 - \frac{1}{p}\right)} = \frac{n}{p-1}$

(unde s-a utilizat suma seriei geometrice infinite).

A_3. Exponentul numărului prim p în descompunerea canonică a produsului $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m+1)$ este:

$$\left[\frac{2m+1}{p}\right] - \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{2m+1}{p^2}\right] - \left[\frac{m}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{2m+1}{p^k}\right] - \left[\frac{m}{p^k}\right]$$

unde $p^k \leq 2m+1 < p^{k+1}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie:

Numărul $N = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m+1) = \dfrac{(2m+1)!}{m!\,2^m}$.

Exponenţii α şi β ai numărului prim p din descompunerea canonică a numerelor $(2m+1)!$ şi respectiv $m!$ sunt:

$$e_p(2m+1) = \left[\frac{2m+1}{p}\right] + \left[\frac{2m+1}{p^2}\right] + \cdots$$

$$e_p(m) = \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \cdots$$

de unde rezultă că exponentul lui p în descompunerea lui $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m+1)$ va fi:

$$\alpha - \beta = \left[\frac{2m+1}{p}\right] - \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{2m+1}{p^2}\right] - \left[\frac{m}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{2m+1}{p^k}\right] - \left[\frac{m}{p^k}\right].$$

Ion Cucurezeanu

A_4. Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

a) $n!$ să se termine cu 2014 zerouri?

b) $n!$ să se termine cu 2015 zerouri?

Soluţie:

a) Avem $e_5(8074) = 2014$, există $n = 8074$;

b) Avem $e_5(8075) = 2016$, nu există n.

A_5. Să se determine numitorul fracţiei după simplificări

$$F = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100}{6^{100}}.$$

Soluţie:

Avem $e_2(100) = 97$ şi $e_3(100) = 48$, deci $F = \dfrac{2^{97} \cdot 3^{48} \cdot A}{2^{100} \cdot 3^{100}} = \dfrac{n}{2^3 \cdot 3^{52}}$.

Numitorul este $2^3 \cdot 3^{52}$.

Concurs Ucraina, 1958

A_6. În câte zerouri se termină numărul 400! ?

Soluţie:

Căutăm exponentul lui 5 în descompunerea canonică a lui 400!.

Avem $e_5(400) = \left[\dfrac{400}{5}\right] + \left[\dfrac{400}{5^2}\right] + \left[\dfrac{400}{5^3}\right] = 80 + 16 + 3 = 99$

deci 400! se termină cu 99 de zerouri.

A_7. Factorialul căror numere se termină în 1000 de zerouri?

Soluţie:

Numărul zerourilor va fi dat de exponentul lui 5 în $n!$. Avem

$$\left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + \cdots = 1000,$$

unde în membrul stâng avem un număr finit de termeni. Dar cum

Scanned with OKEN Scanner

$$\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\cdots<\frac{n}{5}+\frac{n}{5^2}+\frac{n}{5^3}+\cdots+\cdots=\frac{n}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{n}{4}\Rightarrow 1000<\frac{n}{4}\Rightarrow$$

$\Rightarrow n>4000$, dar, cum $[x]>x-1$ rezultă:

$$1000>\frac{n}{5}+\frac{n}{5^2}+\frac{n}{5^3}+\frac{n}{5^4}+\frac{n}{5^5}-5>\frac{n}{5}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}\right)+6+1-5=$$

$$=\frac{31n}{125}+2\Rightarrow n<\frac{(1000-2)125}{31}=4014{,}2.$$

Numărul $n=4005$ verifică problema, dar $n=4004$ și 4010 nu verifică.

Așadar numerele căutate sunt 4005,4006,4007,4008,4009.

A_8. Să se determine cel mai mic număr natural pentru care *n!* se termină cu 100 de zerouri.

Soluție:

Avem $100=e_5(n)\leq\left[\frac{n}{4}\right]\leq\frac{n}{4}\Rightarrow n\geq 400$. Observăm că $e_5(400)=99$ și atunci rezultă cel mai mic număr divizibil cu 5 este 405 și pentru care $e_5(405)=100$.

A_9. Să se determine cel mai mare număr natural n, pentru care $((3!)!)!$ este divizibil cu 3^n.

Soluție:

Avem $((3!)!)!=(6!)!=720!$.

Conform formulei lui Legendre avem $e_3(720)=356$ rezultă $n=356$.

A_{10}. Găsiți cel mai mic număr natural n pentru care 2014! nu este divizibil cu 37^n.

Soluție:

Cum 37 este număr prim, rezultă $e_{37}(2014)=55$ și prin urmare 37^{56} nu divide pe 2014!. Așadar, $n=56$.

A_{11}. a) Să se arate că $\frac{n!}{2^n}$ nu este întreg;

b) Pentru ce valori ale lui m, $\frac{n!}{2^{n-m}}$ este număr natural, $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$?

Soluție:

Dacă $n\neq 2^k$.

a) Avem $e_2(n)=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\cdots<\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{8}\leq n\Rightarrow e_2(n)<n$.

Dacă $n=2^k$, atunci

$$e_2(n)=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{2^3}\right]+\cdots=\frac{n}{2}+\frac{n}{2^2}+\cdots+1\leq n-1.$$

Prin urmare 2^n nu divide pe $n!$.

b) Numărul $\frac{n!}{2^{n-m}}$ este întreg, dacă $e_2(n)\geq n-m\Rightarrow m\geq$

Scanned with OKEN Scanner

$$\geq n-\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{n}{8}\right]\ldots=\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]+\frac{n}{4}-\left[\frac{n}{4}\right]+\frac{n}{8}-\left[\frac{n}{8}\right]\ldots=$$
$$=\left\{\frac{n}{2}\right\}+\left\{\frac{n}{2^2}\right\}+\left\{\frac{n}{2^3}\right\}+\cdots$$

A_{12}. Fie produsul: $P_n=(n+1)(n+2)\ldots(n+n)$. Să se arate că $P_n \not\vdots 2^n$ și $P_n \vdots 2^{n+1}$.

Soluție:

Avem $P_n=(n+1)(n+2)\ldots(2n)=\dfrac{(2n)!}{n!}$
și conform formulei lui Legendre avem:

$$e_2(2n)=\left[\frac{2n}{2}\right]+\left[\frac{2n}{4}\right]+\cdots=n+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\cdots=n+e_2(n).$$

Așadar cel mai mare exponent a lui 2 este $e_2(2n)-e_2(n)=n$, deci

$$P_n \vdots 2^n \text{ și } P_n \vdots 2^{n+1}.$$

A_{13}. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_m$ numere naturale astfel încât $a_1+a_2+\cdots+a_m=n$. Să se arate că:

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)!}{a_1!\,a_2!\ldots a_m!} \text{ este întreg.}$$

Soluția 1:

Avem $\dfrac{n!}{a_1!\,a_2!\ldots a_m!}$.

Fie p număr prim care se află în descompunerea canonică a lui $n!$. Avem:

$$e_p(n)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^k}\right]=\left[\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{p}\right]+\left[\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{p^2}\right]+$$
$$+\cdots+\left[\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{p^k}\right]\geq\left[\frac{a_1}{p}\right]+\left[\frac{a_1}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{a_1}{p^k}\right]+\left[\frac{a_2}{p}\right]+\left[\frac{a_2}{p^2}\right]+$$
$$+\cdots+\left[\frac{a_2}{p^k}\right]+\cdots+\left[\frac{a_m}{p}\right]+\left[\frac{a_m}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{a_m}{p^k}\right]=e_p(n)\geq e_p(a_1)+e_p(a_2)+$$
$$+\cdots+e_p(a_m).$$

Soluția 2:

Notăm $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k \Rightarrow \dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)!}{a_1!\,a_2!\ldots a_m!}=\dfrac{S_m!}{a_1!\,a_2!\ldots a_m!}=$

$$=\frac{S_m!}{S_{m-1}!\,a_m!}\cdot\frac{S_{m-1}!}{S_{m-2}!\,a_{m-1}!}\cdot\ldots\cdot\frac{S_3!}{S_2!\,a_3!}\cdot\frac{S_2!}{S_1!\,a_2!}\in\mathbb{N},$$

deoarece $\dfrac{S_k!}{S_{k-1}!\,a_k!}$ este întreg, întrucât $\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}=C_{m+n}^m$.

A_{14}. Să se arate că

$$E_{(n,m)}=\frac{(2m)!\ (2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$$

este un număr întreg, $\forall\, m,n\in\mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție:

E_n este întreg dacă $e_p(2m) + e_p(2n) - e_p(n) - e_p(m) - e_p(m+n) \geq 0$, dar

$$e_p(2m) + e_p(2n) - e_p(n) - e_p(m) - e_p(m+n) =$$
$$= \left(\left[\frac{2m}{p}\right] + \left[\frac{2m}{p^2}\right] \ldots\right) + \left(\left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] \ldots\right) - \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] \ldots\right) -$$
$$- \left(\left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] \ldots\right) - \left(\left[\frac{m+n}{p}\right] + \left[\frac{m+n}{p^2}\right] \ldots\right) =$$
$$= \left(\left[\frac{2m}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{m}{p}\right] - \left[\frac{m+n}{p}\right]\right) +$$
$$+ \left(\left[\frac{2m}{p^2}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] - \left[\frac{n}{p^2}\right] - \left[\frac{m}{p^2}\right] - \left[\frac{m+n}{p^2}\right]\right) + \text{ș. a. m. d.}$$

care este pozitivă, deoarece se aplică inegalitatea

$$[2x] + [2y] - [x] - [y] - [x+y] \geq 0, \forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad (*).$$

De altfel, exponentul lui p în descompunerea canonică a numărătorului este

$$s_1 = \sum_k \left\{\left[\frac{2m}{p^k}\right] + \left[\frac{2n}{p^k}\right]\right\}$$

și exponentul lui p în descompunerea canonică a numitorului este

$$s_2 = \sum_k \left(\left[\frac{m}{p^k}\right] + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \left[\frac{m+n}{p^k}\right]\right)$$

și utilizând $(*)$ rezultă $s_1 \geq s_2$, prin urmare $E_{(m,n)} \in \mathbb{N}^*$.

O.I.M., 1972

A_{15}. Să se arate că

$$E_n = \frac{n!\,(6n)!}{(2n)!\,(3n)!}$$

este număr întreg, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

E_n este întreg, dacă $e_p(n) + e_p(6n) - 2e_p(2n) - e_p(3n) \geq 0$.

Prin urmare avem:

$$e_p(n) + e_p(6n) - 2e_p(2n) - e_p(3n) =$$
$$= \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] \ldots\right) + \left(\left[\frac{6n}{p}\right] + \left[\frac{6n}{p^2}\right] \ldots\right) - 2\left(\left[\frac{2n}{p}\right] + \left[2\frac{n}{p^2}\right] \ldots\right) -$$
$$- \left(\left[3\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{3n}{p^2}\right] \ldots\right) = \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{6n}{p}\right] - 2\left[\frac{2n}{p}\right] - \left[3\frac{n}{p}\right]\right) +$$
$$+ \left(\left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{6n}{p^2}\right] - 2\left[2\frac{n}{p^2}\right] - \left[\frac{3n}{p^2}\right]\right) + (\ldots)$$

care este pozitivă, deoarece $[x] + [6x] - 2[2x] - [3x] \geq 0, \forall\, x \geq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

A_{16}. Determinați numărul de zerouri cu care se termină numărul $a!\ b!\ c!$ unde $a+b+c=2006$ și $a,b,c \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

Deoarece $2006 < 5^5$, atunci folosind formula lui Legendre

$$e_5(a)+e_5(b)+e_5(c)=\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{a}{5^k}\right]+\left[\frac{b}{5^k}\right]+\left[\frac{c}{5^k}\right]\right)\geq$$

(utilizând relația $[a]+[b]+[c]\geq[a+b+c]-2$)

$$\geq\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{a+b+c}{5^k}\right]-2\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2006}{5^k}\right]-2\right)=492.$$

Există numerele a,b,c, de exemplu $a=b=624, c=758$.

Așadar $a!\ b!\ c!$ se termină în 492 zerouri în condiția $a+b+c=2006$.

A_{17}. În câte zerouri se termină numărul

$$A_n!=\left(\frac{5^n-1}{n}\right)!, n\in\mathbb{N}^*?$$

Soluție:

Numărul de zerouri este dat de $\exp_{A_n!}(5)$.

Avem $\exp_{A_n!}(5)=\left[\frac{5^n-1}{4\cdot 5}\right]+\left[\frac{5^n-1}{4\cdot 5^2}\right]+\cdots+\left[\frac{5^n-1}{4\cdot 5^k}\right]\ldots=$

$$=\left[\frac{5^n-5+5-1}{4\cdot 5}\right]+\left[\frac{5^n-5^2+5^2-1}{4\cdot 5^2}\right]+\cdots+\left[\frac{5^n-5^k+5^k-1}{4\cdot 5^k}\right]\ldots=$$

$$=\frac{5^{n-1}-1}{4}+\frac{5^{n-2}-1}{4}+\cdots+\frac{5^{n-n}-1}{4}=\frac{5^n-4n-1}{16}$$

$$\left(\text{deoarece } \frac{5^p-1}{4}\in\mathbb{N} \text{ și } \frac{5^p-1}{4\cdot 5^p}\in(0,1), \forall\, p\geq 1\right).$$

Așadar $(A_n)!$ se termină în $\frac{5^n-4n-1}{16}$ zerouri.

Mihai Crăciun

A_{18}. Să se determine exponentul α al numărului prim p în $(p^n)!$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

Soluție:

Avem $\alpha=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{p^n}{p^j}\right]=p^{n-1}+p^{n-2}+\cdots+p^2+p+1=\frac{p^n-1}{p-1}$.

§ 6. Alte aplicații

Fie $x>0$ și $d\in\mathbb{N}^*$. Notăm cu $\left[\frac{x}{d}\right]$ numărul numerelor naturale, mai mici sau egale cu x, care sunt divizibile la d.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\left[\frac{x}{d}\right] = k \Leftrightarrow k \leq \frac{x}{d} < k+1 \Leftrightarrow kd \leq x < (k+1)d.$

Prin urmare, mulțimea acestor numere este $M_d = \{d, 2d, \ldots, kd\}$.

Evident avem $\left[\frac{x}{d}\right] = \left[\frac{[x]}{d}\right]$ $(*), \forall\, x \geq 0$ și $d \in \mathbb{N}^*$.

Să arătăm că relația (*) este adevărată $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Fie, $x < 0$ și $k, n \in \mathbb{N}^*$ astfelîncât $n = kd$ și $n + x > 0$. Atunci, avem

$$\left[\frac{x}{d}\right] = \left[k + \frac{x}{d}\right] - k = \left[\frac{kd + x}{d}\right] - k = \left[\frac{n + x}{d}\right] - k =$$

$$= \left[\frac{[n + x]}{d}\right] - k = \left[\frac{n + [x]}{d}\right] - k = \left[k + \frac{[x]}{d}\right] - k = \left[\frac{[x]}{d}\right].$$

Așadar relația $(*)$ este adevărată, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ și $d \in \mathbb{N}^*$.

Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$, cu $(a, b) = 1$. Notăm cu $N(a \cup b)$ numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu x, divizibile la a sau b.

Evident $N(a \cup b) = \left[\frac{x}{a}\right] + \left[\frac{x}{b}\right] - \left[\frac{x}{ab}\right]$ (1), unde $\left[\frac{x}{ab}\right]$ reprezintă numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu x, divizibile la a și b.

Notăm cu $N(a \cup \bar{b})$ numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu x, care sunt divizibile la a și nu sunt divizibile la b.

Avem $N(a \cap \bar{b}) = \left[\frac{x}{a}\right] - \left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{x}{ab}\right]$ (2).

Consecința 1:

$$N(a \cup b \cup c) = \left[\frac{x}{a}\right] + \left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{x}{c}\right] - \left(\left[\frac{x}{ab}\right] + \left[\frac{x}{bc}\right] + \left[\frac{x}{ac}\right]\right) + \left[\frac{x}{abc}\right].$$

Consecința 2:

$$N(a \cap \bar{b} \cup b \wedge \bar{a}) = \left[\frac{x}{a}\right] + \left[\frac{x}{b}\right] - 2\left[\frac{x}{ab}\right].$$

Consecința 3:

$$N\left((a \cap \bar{b} \cap \bar{c}) \cup (b \cap \bar{a} \cap \bar{c}) \cup (c \wedge \bar{a} \wedge \bar{b})\right) =$$

$$= \left[\frac{x}{a}\right] + \left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{x}{c}\right] - 2\left(\left[\frac{x}{ab}\right] + \left[\frac{x}{ac}\right] + \left[\frac{x}{bc}\right]\right) + 3\left[\frac{x}{abc}\right].$$

Consecința 4:

Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ și a, b numere prime.

a) Numărul numerelor mai mici decât x care sunt divizibile cu a sau b

$$m(a \vee b) = \left[\frac{x}{a}\right] + \left[\frac{x}{b}\right] - \left[\frac{x}{ab}\right] \quad (1).$$

b) Numărul numerelor mai mici decât x, divizibile cu a și nedivizibile cu b

$$m(a \cap \bar{b}) = \left[\frac{x}{a}\right] - \left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{x}{ab}\right] \quad (2).$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Numărul numerelor mai mici decât x, divizibile numai la a sau numai la b

$$m(a \cap \bar{b} \vee b \wedge \bar{a}) = \left[\frac{x}{a}\right] + \left[\frac{x}{b}\right] - 2\left[\frac{x}{ab}\right] \quad (3).$$

d) Numărul numerelor mai mici cu x, divizibile cu a sau b sau c

$$m(a \cup b \cup c) = \left[\frac{x}{a}\right] + \left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{x}{c}\right] - \left(\left[\frac{x}{ab}\right] + \left[\frac{x}{ac}\right] + \left[\frac{x}{bc}\right]\right) + 3\left[\frac{x}{abc}\right] \quad (4).$$

e) Numărul numerelor mai mici decât x divizibile la unul și numai unul dintre numerele prime a, b, c

$$m(a \cap \bar{b} \cap \bar{c} \vee b \cap \bar{a} \cap \bar{c} \vee c \cap \bar{a} \wedge \bar{b}) =$$

$$= \left[\frac{x}{a}\right] + \left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{x}{c}\right] - 2\left(\left[\frac{x}{ab}\right] + \left[\frac{x}{ac}\right] + \left[\frac{x}{bc}\right]\right) + 3\left[\frac{x}{abc}\right] \quad (5).$$

Ex. 1. Câte numere de la 1 la 100 sunt divizibile numai la unul dintre numerele 2, 3 și 5?

Soluție:

Utilizăm relația (5).

Avem $m(2 \cap \bar{3} \cap \bar{5} \vee 3 \cap \bar{2} \cap \bar{5} \vee 5 \cap \bar{2} \wedge \bar{3}) =$

$$= \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{5}\right] - 2\left(\left[\frac{100}{6}\right] + \left[\frac{100}{10}\right] + \left[\frac{100}{15}\right]\right) + 3\left[\frac{100}{30}\right] = 48.$$

Ex. 2. Să se determine numărul x divizibil la 2 și 3, știind că numărul numerelor, mai mici decât x divizibile la 2 sau 3 este 1000.

Soluție:

Aplicând relația (1) $m(2 \vee 3) = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{6}\right] = 1000.$

Avem $\left[\frac{x}{2} - \left[\frac{x}{6}\right]\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = 1000 \Rightarrow \left[\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{6} - \left\{\frac{x}{6}\right\}\right)\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = 1000 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\frac{x}{3} + \left\{\frac{x}{6}\right\}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = 1000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\left[\frac{x}{3}\right] + \left\{\frac{x}{3}\right\} + \left\{\frac{x}{6}\right\}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = 1000 \Rightarrow 2\left[\frac{x}{3}\right] + \left[\left\{\frac{x}{3}\right\} + \left\{\frac{x}{6}\right\}\right] = 1000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\left\{\frac{x}{3}\right\} + \left\{\frac{x}{6}\right\}\right] = \text{par},$$

imposibil, deci $\left[\frac{x}{3}\right] = 500 \Rightarrow x \in \{1500, 1501, 1502\}$, dar numai $x = 1500$ este divizibil cu 2 și 3.

Ex. 3. Să se determine numărul numerelor mai mici decât 100, prime cu 36.

Soluție: Utilizăm relația (1).

Avem $36 = 2^2 \cdot 3^2$ și $m(2 \vee 3) = \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{3}\right] - \left[\frac{100}{6}\right] = 67$, deci $100 - 67 = 33$ de numere prime cu 36 mai mici decât 100.

Scanned with OKEN Scanner

Ex. 4. Să se determine numărul numerelor naturale mai mici decât 100, care nu sunt divizibile cu 2 sau 3 sau 5.

Soluție:

Utilizăm relația (4). Avem

$$m(2 \cup 3 \cup 5) = \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{5}\right] - \left(\left[\frac{100}{6}\right] + \left[\frac{100}{10}\right] + \left[\frac{100}{15}\right]\right) + \\ + \left[\frac{100}{30}\right] = 50 + 33 + 20 - (16 + 10 + 6) + 3 = 74$$

și prin urmare numărul numerelor naturale care nu sunt divizibile cu 2 sau 3 sau 5 sunt $100 - 67 = 33$.

§ 7. Puncte laticiale

P_1. Fie $a, b \in \mathbb{N}, a < b$ și $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și pozitivă și domeniul D, mărginit de dreptele $x = a, x = b$, axa OX și de graficul funcției f.

Atunci numărul punctelor laticiale din D este dat de

$$N_p = b - a + 1 + \sum_{k=a}^{b} [f(k)].$$

Demonstrație:

Toate punctele laticiale se află pe dreptele $x = k, a \leq k \leq b, k \in \mathbb{N}$. Numărul punctelor laticiale de pe segmentul de dreaptă $x = k$ cu domeniul D este egal cu $1 + [f(k)]$. Numărul total de punctele laticiale din domeniul D se obține însumând valorile $1 + [f(k)]$ de la a la b adică:

$$N_p = \sum_{k=a}^{b} 1 + [f(k)] = b - a + 1 + \sum_{k=a}^{b} [f(k)].$$

P_2. Numărul punctelor laticiale de pe segmentul determinat de punctele $O(0,0)$ și $P(m, n)$ este dat de $N_p = 1 + d$, unde $d = (m, n)$.

Demonstrație:

Fie $d = (m, n) \Rightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $= dm_1$ și $n = dn_1$, cu $(m_1, n_1) = 1$.

Segmentul OM este determinat de dreapta de ecuație $y = \frac{n}{m}x$ sau $y = \frac{n_1}{m_1}x$ cu $x \in [0, m]$.

Evident punctele $P_k(km_1, kn_1), k = \overline{0, d}$ sunt puncte laticiale de pe segmentul OM. Vom arăta că nu mai sunt alte puncte. Presupunând, prin absurd, că există un punct laticial $Q(m_0, n_0), Q \neq P_k, Q \in [OM]$ adică

$$m_0 = \frac{n_1}{m_1} m_0 \Rightarrow n_0 m_1 = n_1 m_0, (m_1, n_1) = 1 \ (1) \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1 | m_0 \Rightarrow m_0 = q m_1, q \in \mathbb{N} \ (m_0 \in [0, m]).$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (1) rezultă $n_0 m_1 = n_1 q m_1 \Rightarrow n_0 = n_1 q$, deci coordonatele lui Q se pot scrie $m_0 = q m_1, n_0 = q n_1 \Rightarrow 0 \leq q \leq d \Rightarrow Q \in P_k, k = \overline{0,d}$, contradicție. Așadar, singurele puncte laticiale de pe segmentul OM sunt $P_k, k = \overline{0,d}$ în număr $d + 1 = (m,n) \neq 1$.

$\boldsymbol{P_3}$. Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $n \geq 2$. Atunci cel mai mare divizor comun al numerelor m și n este:

$$d = (m,n) = 1 - (m-1)(n-1) + 2\sum_{k=1}^{m-1} \left[\frac{n}{m}k\right].$$

Demonstrație:

Considerăm triunghiul cu vârfurile în punctele de coordonate $P(m,n)$, $M(m,0), O(0,0)$ vom evalua numărul punctelor laticiale din acest triunghi utilizând proprietatea $\boldsymbol{P_1}$ pentru $a = 0, b = m$ și $f(x) = \frac{n}{m}x$, adică

$$N_p' = m + 1 + \sum_{k=0}^{m} \left[\frac{n}{m}k\right] = m + 1 + \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{n}{m}k\right] = m + n + 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \left[\frac{n}{m}k\right] \quad (1)$$

Numărul de puncte laticiale din triunghiul MNP poate fi calculat considerând triunghiul cu jumătate din dreptunghiul cu vârfurile în punctele de coordonate $(0,0), (m,0), (0,n), (m,n)$.

În acest caz, la numărul de $(m+1)(n+1)$ puncte laticiale ale dreptunghiului trebuie înainte de împărțirea cu 2, să adăugăm punctele laticiale aflate pe diagonala OM, deoarece aceste puncte se distribuie la ambele triunghiuri și de aceea trebuie numărate de două ori.

$$N_p' = \frac{(m+1)(n+1) + d + 1}{2} \quad (2).$$

Egalând (1) cu (2) rezultă:

$$\frac{(m+1)(n+1) + d + 1}{2} = m + n + 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \left[\frac{n}{m}k\right] \Rightarrow d = (m,n) =$$

$$= 1 - (m-1)(n-1) + 2\sum_{k=1}^{m-1} \left[\frac{n}{m}k\right] \quad (3).$$

$\boldsymbol{P_4}$. Dacă numerele m și n sunt prime între ele atunci din (3) rezultă:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left[\frac{n}{m}k\right] = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{m}{n}k\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{2} \quad \text{(rezultat cunoscut).}$$

$\boldsymbol{P_5}$. Fie $p \in \mathbb{N}, p \geq 3$, atunci p prim dacă și numai dacă

$$\sum_{i=2}^{p-1}\sum_{j=2}^{p-1} \left[\frac{ij}{p}\right] = \frac{(p-1)^2(p-2)}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație:

p prim $\Leftrightarrow \forall\, i = 2,3,\ldots,p-1$ avem $(p,i) = 1$.

Atunci $\begin{cases} p \text{ prim} \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{p-1}(p,i) = p-2 \\ p \text{ compus} \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{p-1}(p,i) > p-2 \end{cases}$. Așadar, p prim $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow p-2 = \sum_{i=2}^{p-1}(p,i) = (p-1)\sum_{i=2}^{p-1}(i-1) + 2\sum_{i=2}^{p-1}\sum_{j=2}^{p-1}\left[\frac{ij}{p}\right].$$

(Nu s-a făcut sumarea pentru $j = 1$, deoarece termenii corespunzători sunt nuli.)

$\boldsymbol{P_6}$. Fie $p \in \mathbb{N}, p \geq 3$ atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{(p-1)^2(p-2)}{4} \leq \sum_{i=2}^{p-1}\sum_{j=2}^{p-1}\left[\frac{ij}{p}\right] \quad (p \in \mathbb{N}, p \geq 3, \text{oarecare}).$$

Aurel Sabo, G.M. nr. 8-9/1990

§ 8.

Teorema 1 (T_1) N.H. Guersenzveig – M.Z. Spivey

Dacă $n, m, p \in \mathbb{N}, 1 \leq p < m \leq n$, atunci:

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right] - \sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right] = m\left[\frac{n}{m}\right].$$

Demonstrație:

Vom utiliza proprietatea $\boldsymbol{P_{26}}$ (Cap. I), adică $\forall\, m, k, n \in \mathbb{N}^*$ cu $m, k \leq n$, atunci

$$\left[\frac{n}{k}\right] = m \Leftrightarrow \left[\frac{n}{m+1}\right] < k \leq \left[\frac{n}{m}\right]$$

de unde rezultă: dacă $\left[\frac{n}{m+1}\right] + 1 \leq k \leq \left[\frac{n}{m}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{n}{k}\right] = m$.

Între $\left[\frac{n}{m+1}\right] + 1$ și $\left[\frac{n}{m}\right]$ există $\left[\frac{n}{m}\right] - \left(\left[\frac{n}{m+1}\right] + 1\right) + 1 = \left[\frac{n}{m}\right] - \left[\frac{n}{m+1}\right]$ întregi.

Deci:

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{m+1}\right]+1}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\left[\frac{n}{k}\right] = m\left(\left[\frac{n}{m}\right] - \left[\frac{n}{m+1}\right]\right) \quad (*)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{\left[\frac{n}{m-1}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]+\sum_{k=\left[\frac{n}{m-1}\right]+1}^{\left[\frac{n}{m-2}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]+\cdots+\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{\left[\frac{n}{1}\right]}\left[\frac{n}{k}\right].$$

Se scrie suma în sens invers:

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{\left[\frac{n}{1}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]+\sum_{k=\left[\frac{n}{m-1}\right]+1}^{\left[\frac{n}{m-2}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]+\cdots+\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{\left[\frac{n}{m-1}\right]}\left[\frac{n}{k}\right].$$

Folosind $(*)$ rezultă:

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{m+1}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=\left[\frac{n}{j+1}\right]+1}^{\left[\frac{n}{j}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{j=1}^{m-1}j\left(\left[\frac{n}{j}\right]-\left[\frac{n}{j+1}\right]\right)=$$

$$=\sum_{j=2}^{m}(j-1)\left(\left[\frac{n}{j-1}\right]-\left[\frac{n}{j}\right]\right).$$

Dar pentru $j=2,\ldots,m$:

$$(j-1)\left(\left[\frac{n}{j-1}\right]-\left[\frac{n}{j}\right]\right)=(j-1)\left[\frac{n}{j-1}\right]-j\left[\frac{n}{j}\right]+\left[\frac{n}{j}\right].$$

Deci:

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{j=2}^{m}(j-1)\left(\left[\frac{n}{j-1}\right]-\left[\frac{n}{j}\right]\right)=$$

$$=\sum_{j-2}^{m}\left((j-1)\left[\frac{n}{j-1}\right]-j\left[\frac{n}{j}\right]\right)+\sum_{j=2}^{m}\left[\frac{n}{j}\right].$$

Dar:

$$\sum_{j-2}^{m}\left((j-1)\left[\frac{n}{j-1}\right]-j\left[\frac{n}{j}\right]\right)=n-m\left[\frac{n}{m}\right],$$

$$\sum_{j=2}^{m}\left[\frac{n}{j}\right]=\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-n.$$

Rezultă:

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=n-m\left[\frac{n}{m}\right]+\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Adică:

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=m\left[\frac{n}{m}\right].\quad (Q.E.D.)$$

Corolar 1 (C1)

$$1)\ n(mod\ m)=\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=2}^{m}\left[\frac{n}{k}\right].$$

Demonstrație:

Din $\boldsymbol{T_1}$:

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=m\left[\frac{n}{m}\right],n+\sum_{k=2}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=m\left[\frac{n}{m}\right],$$

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=2}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]=n-m\left[\frac{n}{m}\right],$$

$$r=n(mod\ m)\rightarrow n=qm+r,0\leq r<m,$$

$$n-m\left[\frac{n}{m}\right]=qm+r-m\left[\frac{qm+r}{m}\right]=qm+r-m\left[q+\frac{r}{m}\right]=$$

$$=qm+r-qm=r.$$

Adică:

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=2}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]=n(mod\ m).$$

$$2)\ n(mod\ m)=\sum_{k=m+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\left[\frac{n}{k}\right].$$

Demonstrație:

Din $\boldsymbol{T_1}$ avem:

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=m\left[\frac{n}{m}\right].$$

Adunăm și scădem $\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]$ în partea stângă:

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=m\left[\frac{n}{m}\right],$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]=m\left[\frac{n}{m}\right],$$

$$m\left[\frac{n}{m}\right]=-\left(\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]\right)+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]=-\sum_{k=m+1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\left[\frac{n}{k}\right],$$

$$n=q,+r\rightarrow m=\frac{n}{q}--\frac{r}{q},$$

$$m\left[\frac{n}{m}\right]=\left(\frac{n}{q}-\frac{r}{q}\right)\left[\frac{qm+r}{m}\right]=\left(\frac{n}{q}-\frac{r}{q}\right)\left[q+\frac{r}{m}\right]=\left(\frac{n}{q}-\frac{r}{q}\right)q=n-r,$$

$$m\left[\frac{n}{m}\right]=n-n(mod\ m),n-n(mod\ m)=-\sum_{k=m+1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\left[\frac{n}{k}\right],$$

$$n-n(mod\ m)=\sum_{k=m+1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]+n,$$

$$n(mod\ m)=\sum_{k=m+1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\left[\frac{n}{k}\right].$$

Corolar 2 (C2)

$$\sum_{k=p+1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{\left[\frac{n}{p}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]=m\left[\frac{n}{m}\right]-p\left[\frac{n}{p}\right].$$

Demonstrație:

$\boldsymbol{T_1}$:

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=m\left[\frac{n}{m}\right]\quad(**).$$

În $\boldsymbol{T_1}$: $m\rightarrow p$

$$\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n}{p}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=p\left[\frac{n}{p}\right]\quad(***).$$

Scanned with OKEN Scanner

Scădem (**) − (***):

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{n}{k}\right]+\sum_{k=\left[\frac{n}{p}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=m\left[\frac{n}{m}\right]-p\left[\frac{n}{p}\right],$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{n}{k}\right]\right)-\left(\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n}{p}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]\right)=m\left[\frac{n}{m}\right]-p\left[\frac{n}{p}\right],$$

$$\sum_{k=p+1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{\left[\frac{n}{p}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]=m\left[\frac{n}{m}\right]-p\left[\frac{n}{p}\right].$$

Divisor summatory function – Dirichlet-Hermite

$$D(x)=\sum_{n\le x}d(n)=\sum_{\substack{j,k\\ jk\le x}}1,$$

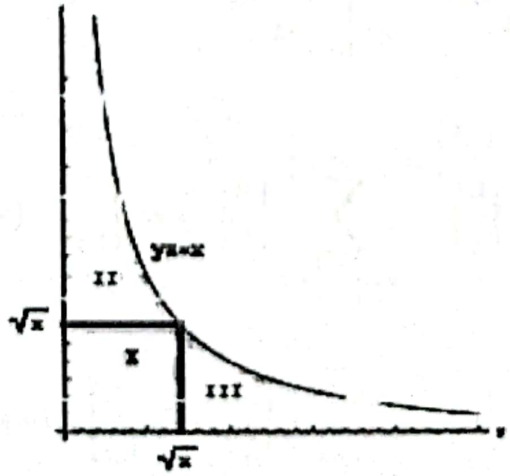
$$d(n)=\sum_{\substack{j,k\\ jk\le n}}1 \quad \text{este funcția divizor,}$$

$d(n)$ = numărul modurilor în care un întreg n poate fi scris ca produsul a doi întregi.

Teorema 2 (Hermite)

$$D(x)=\sum_{k=1}^{[x]}\left[\frac{x}{k}\right]=2\sum_{k-1}^{[\sqrt{x}]}\left[\frac{x}{k}\right]-\left[\sqrt{x}\right]^2,\forall\, x\ge 0.$$

Fie hiperbola $yz=x$ pentru $y,z\ge 0$.



Scanned with OKEN Scanner

$D(x)$ este numărul total al punctelor (y,z) cu coordonate întregi $y,z \geq 1$ aflate sub sau pe hiperbola $yz = x$.

Divizăm aria de sub hiperbolă în 3 secțiuni: S_I, S_{II}, S_{III}.

Fie n_1, n_2, n_3 numărul punctelor întregi din cele trei secțiuni.

$$D(x) = n_1 + n_2 + n_3,$$

n_1 =numărul punctelor din pătratul $S_I \to n_1 = [\sqrt{x}]^2$.

Din simetria hiperbolei $\to n_2 = n_3$.

Numărul punctelor întregi cu $y \leq [\sqrt{x}]$ este :

$$\sum_{k=1}^{[\sqrt{x}]} \left[\frac{x}{k}\right] = n_1 + n_2.$$

Deci:

$$n_2 = \sum_{k=1}^{[\sqrt{x}]} \left[\frac{x}{k}\right] - n_1.$$

Rezultă:

$$D(x) = n_1 + n_2 + n_3 = n_1 + 2n_2 = n_1 + 2\left(\sum_{k=1}^{[\sqrt{x}]} \left[\frac{x}{k}\right] - n_1\right),$$

$$D(x) = \sum_{k=1}^{[x]} \left[\frac{x}{k}\right] = 2\sum_{k=1}^{[\sqrt{x}]} \left[\frac{x}{k}\right] - n_1,$$

$$\sum_{k=1}^{[x]} \left[\frac{x}{k}\right] = 2\sum_{k=1}^{[\sqrt{x}]} \left[\frac{x}{k}\right] - [\sqrt{x}]^2.$$

Pentru $x = n \in \mathbb{N}$ rezultă:

$$D(n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] = 2\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{k}\right] - [\sqrt{n}]^2.$$

Problema 1

Dacă $n, m \in \mathbb{N}, m \leq n$, atunci:

$$\sum_{k=2}^{n} \left[\frac{n^2}{k}\right] = \sum_{k=n+1}^{n^2} \left[\frac{n^2}{k}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: (folosind „**Divisor summatory function – Dirichlet-Hermite**").

$$D(n)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=2\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\sqrt{n}\right]^2,$$

$$n\to n^2$$

$$D(n^2)=\sum_{k=1}^{n^2}\left[\frac{n^2}{k}\right]=2\sum_{k=1}^{[\sqrt{n^2}]}\left[\frac{n^2}{k}\right]-\left[\sqrt{n^2}\right]^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n^2}\left[\frac{n^2}{k}\right]=2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]-n^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n^2}\left[\frac{n^2}{k}\right]-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]-n^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]+\sum_{k=n+1}^{n^2}\left[\frac{n^2}{k}\right]-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]=n^2+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]-n^2,$$

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]=\sum_{k=n+1}^{n^2}\left[\frac{n^2}{k}\right].$$

David Doster (Crux Mathematicorum)

Teorema 1 (T_1)

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=m\left[\frac{n}{m}\right].$$

Folosind teorema 1 pentru
$n\to n^2$,
$m\to n$,
T_1 devine:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n^2}{n}\right]+1}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]=n\left[\frac{n^2}{n}\right],$$

$$\left[\frac{n^2}{1}\right]+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]-\sum_{k=n+1}^{n^2}\left[\frac{n^2}{k}\right]=n\left[\frac{n^2}{n}\right],$$

$$n^2+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]-\sum_{k=n+1}^{n^2}\left[\frac{n^2}{k}\right]=n^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]=\sum_{k=n+1}^{n^2}\left[\frac{n^2}{k}\right].$$

Corolar 1 (C_1)

$$n(mod\ m)=\sum_{k=m+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k-2}^{m}\left[\frac{n}{k}\right],$$

$n \to n^2$,
$m \to n$,
C_1 devine:

$$n^2(mod\ n)=\sum_{k=n+1}^{n^2}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=2}^{\left[\frac{n^2}{n}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{k=\left[\frac{n}{n}\right]+1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k-2}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]$$

$$\sum_{k=n+1}^{n^2}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=2}^{[n]}\left[\frac{n}{k}\right]=0$$

$$\sum_{k=n+1}^{n^2}\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{n}{k}\right].$$

Corolar 1 (C_2)

$$\sum_{k=p+1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{\left[\frac{n}{p}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]=m\left[\frac{n}{m}\right]-p\left[\frac{n}{p}\right]$$

$n \to n^2$
$m \to n$
$p = 1$
C_2 devine:

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=n+1}^{n^2}\left[\frac{n}{k}\right]=n\left[\frac{n^2}{n}\right]-1\cdot\left[\frac{n}{p}\right]$$

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=n+1}^{n^2}\left[\frac{n}{k}\right]=n\left[\frac{n^2}{n}\right]-1\cdot\left[\frac{n^2}{1}\right]=0$$

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{k=n+1}^{n^2}\left[\frac{n}{k}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema 2

Dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$,

$$2\left[\frac{n^2}{2}\right]+\left[\frac{n^2}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n^2}{n}\right]=n^2+\left[\frac{n^2}{n+1}\right]+\left[\frac{n^2}{n+1}\right]+\cdots+\left[\frac{n^2}{\left[\frac{n^2}{n}\right]}\right].$$

Adică:

$$\left[\frac{n^2}{2}\right]+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]=n^2+\sum_{k=n+1}^{\left[\frac{n^2}{2}\right]}\left[\frac{n^2}{k}\right].$$

Soluție:

Teorema 1 - Corolar 2

$$\sum_{k=p+1}^{m}\left[\frac{n}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{\left[\frac{n}{p}\right]}\left[\frac{n}{k}\right]=m\left[\frac{n}{m}\right]-p\left[\frac{n}{p}\right]$$

$n \to n^2$

$m \to n$

$p = 2$

C_2 devine:

$$\sum_{k=3}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]-\sum_{k=\left[\frac{n^2}{n}\right]+1}^{\left[\frac{n^2}{2}\right]}\left[\frac{n^2}{k}\right]=n\left[\frac{n^2}{n}\right]-2\left[\frac{n^2}{2}\right]$$

$$-\left[\frac{n^2}{2}\right]+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]-\sum_{k=n+1}^{\left[\frac{n^2}{2}\right]}\left[\frac{n^2}{k}\right]=n^2-2\left[\frac{n^2}{2}\right]$$

$$\left[\frac{n^2}{2}\right]+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{n^2}{k}\right]=n^2+\sum_{k=n+1}^{\left[\frac{n^2}{2}\right]}\left[\frac{n^2}{k}\right].(Q.E.D.)$$

Problemă:

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=[n\sqrt{3}]+[n\sqrt{2}], g(n)=f(n+1)-f(n)$.

Să se demonstreze că:

a) $g(n) \in \{2,3,4\}, \forall\, n \in \mathbb{N}$;

b) $\forall\, a \in \{2,3,4\} \Rightarrow g(n) = a$ pentru o infinitate de valori ale lui n.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție:

1. *Proprietate:* Dacă $x \geq y \geq 0$: $0 \leq [x-y] \leq [x]-[y] \leq [x-y]+1$ $(*)$,

$$g(n) = ([n+1]\sqrt{3} + [n+1]\sqrt{2}) - ([n\sqrt{3}] + [n\sqrt{2}]),$$

$$g(n) = ([n+1]\sqrt{3} - [n\sqrt{3}]) + ([n+1]\sqrt{2} - [n\sqrt{2}]).$$

În $(*)$: $\alpha > 0, x = (n+1)\alpha,\ y = n\alpha,$

$$[(n+1)\alpha - n\alpha] \leq [(n+1)\alpha] - [n\alpha] \leq [(n+1)\alpha - n\alpha] + 1$$

$$[a] \leq [(n+1)\alpha] - [n\alpha] \leq [a] + 1$$

$$a = \sqrt{3} \Rightarrow [a] = [\sqrt{3}] = 1,\ a(n) = [n+1]\sqrt{3} - [n\sqrt{3}]$$

$$[\sqrt{3}] \leq [n+1]\sqrt{3} - [n\sqrt{3}] \leq [\sqrt{3}] + 1 \Rightarrow 1 \leq [n+1]\sqrt{3} - [n\sqrt{3}] \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq a(n) \leq 2 \quad (**)$$

$$a = \sqrt{2} \Rightarrow [\alpha] = [\sqrt{2}] = 1,\ b(n) = [n+1]\sqrt{2} - [n\sqrt{2}]$$

$$[\sqrt{2}] \leq [n+1]\sqrt{2} - [n\sqrt{2}] \leq [\sqrt{2}] + 1 \Rightarrow 1 \leq [n+1]\sqrt{2} - [n\sqrt{2}] \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq b(n) \leq 2 \quad (***).$$

Adunând $(**)$ și $(***)$ rezultă: $g(n) = a(n) + b(n),\ 2 \leq g(n) \leq 4.$

Dar $g(n) \in \mathbb{Z} \Rightarrow g(n) \in \{2,3,4\}.$

2. Fie $\alpha, \beta \in (0,1)$ iraționale:

$$\alpha = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow 1 - \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\beta = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 1 - \beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$a(n) = [(n+1)\sqrt{3}] - [n\sqrt{3}] =$$

$$= [(n+1)(\sqrt{3}-1) + (n+1)] - [n(\sqrt{3}-1) + n]$$

$$a(n) = 1 + [(n+1)\alpha] - [n\alpha].$$

Analog:

$$b(n) = [(n+1)\sqrt{2}] - [n\sqrt{2}]$$

$$b(n) = 1 + [(n+1)\beta] - [n\beta]$$

$$g(n) = a(n) + b(n).$$

2.1. $g(n) = 2$

$$g(n) = 2 \Rightarrow a(n) = 1 \text{ și } b(n) = 1$$

$$a(n) = 1 \Rightarrow 1 + [(n+1)\alpha] - [n\alpha] = 1 \Rightarrow [(n+1)\alpha] - [n\alpha] = 0.$$

Din P1$\Rightarrow \{n\alpha\} < 1 - \alpha \Rightarrow \{n\alpha\} \in (0, 1-\alpha)$

$$b(n) = 1 \Rightarrow 1 + [(n+1)\beta] - [n\beta] = 1 \Rightarrow [(n+1)\beta] - [n\beta] = 0.$$

Din P1$\Rightarrow \{n\beta\} < 1 - \beta \Rightarrow \{n\beta\} \in (0, 1-\beta).$

Fie $x_\alpha \in (0, 1-\alpha)$ și $x_\beta \in (0, 1-\beta).$

$$\varepsilon > 0 \text{ astfel încât } (x_\alpha - \varepsilon, x_\alpha + \varepsilon) \subset (0, 1-\alpha)$$

$$\varepsilon > 0 \text{ astfel încât } (x_\beta - \varepsilon, x_\beta + \varepsilon) \subset (0, 1-\beta)$$

$\alpha, \beta, 1$ sunt linear independente

Scanned with OKEN Scanner

α, β – iraționale diferite

$a_1\alpha + a_2\beta + a_3 = 0$

$a_1(\sqrt{3}-1) + a_2(\sqrt{2}-1) + a_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1\sqrt{3} + a_2\sqrt{2} = a_1 + a_2 - a_3 = r \in \mathbb{Q}.$

Dacă $a_1 \neq 0$ și $a_2 \neq 0 \Rightarrow \left(a_1\sqrt{3} + a_2\sqrt{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow 3a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_1a_2\sqrt{6} = r^2$

$$\sqrt{6} = \frac{(a_1 + a_2 - a_3)^2 - 3a_1^2 - 2a_2^2}{2a_1a_2} \Rightarrow \sqrt{6} \in \mathbb{Q}, \text{ fals.}$$

Dacă $a_1 \neq 0$ și $a_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a_1 - a_3}{a_1} \Rightarrow \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, fals.

Dacă $a_1 = 0$ și $a_2 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a_2 - a_3}{a_2} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, fals.

Deci $a_1 = 0$ și $a_2 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0.$

Din teorema lui Kroneker rezultă: $\exists\{n_p\} \in \mathbb{N}$ pentru care

$\lim\limits_{n_p \to \infty} \{n_p\alpha\} = x_\alpha \Rightarrow \exists N_\alpha$ astfel încât pentru $n_p \geq N_\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \{n_p\alpha\} \in (x_\alpha - \varepsilon, x_\alpha + \varepsilon) \Rightarrow \{n_p\alpha\} < 1 - \alpha \Rightarrow a(n_p) = 1$

$\lim\limits_{n_p \to \infty} \{n_p\beta\} = x_\beta \Rightarrow \exists N_\beta$ astfel încât pentru $n_p \geq N_\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \{n_p\beta\} \in (x_\beta - \varepsilon, x_\beta + \varepsilon) \Rightarrow \{n_p\beta\} < 1 - \beta \Rightarrow b(n_p) = 1.$

Pentru

$n_p \geq \max(N_\alpha, N_\beta) \Rightarrow a(n_p) = 1$ și $b(n_p) = 1 \Rightarrow$ există o infinitate de $n = n_p$ pentru care $g(n_p) = 2.$

2.2. $g(n) = 3$

$a(n) = 1 \Rightarrow 1 + [(n+1)\alpha] - [n\alpha] = 1 \Rightarrow [(n+1)\alpha] - [n\alpha] = 0.$

Din P1$\Rightarrow \{n\alpha\} < 1 - \alpha \Rightarrow \{n\alpha\} \in (0, 1-\alpha)$

$b(n) = 2 \Rightarrow 1 + [(n+1)\beta] - [n\beta] = 2 \Rightarrow [(n+1)\beta] - [n\beta] = 1.$

Din P2$\Rightarrow \{n\beta\} > 1 - \beta \Rightarrow \{n\beta\} \in (1-\beta, 1).$

Fie $x_\alpha \in (0, 1-\alpha)$ și $x_\beta \in (1-\beta, 1), \varepsilon > 0$ astfel încât:

$$(x_\alpha - \varepsilon, x_\alpha + \varepsilon) \subset (0, 1-\alpha) \text{ și } (x_\beta - \varepsilon, x_\beta + \varepsilon) \subset (1-\beta, 1).$$

Din teorema lui Kroneker rezultă:

Există o infinitate de $n = n_p$ pentru care $a(n_p) = 1$ și $b(n_p) = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow g(n_p) = 3.$$

2.3. $g(n) = 4$

$a(n) = 2 \Rightarrow 1 + [(n+1)\alpha] - [n\alpha] = 2 \Rightarrow [(n+1)\alpha] - [n\alpha] = 1.$

Din P2$\Rightarrow \{n\alpha\} > 1 - \alpha \Rightarrow \{n\alpha\} \in (1-\alpha, 1)$

$b(n) = 2 \Rightarrow 1 + [(n+1)\beta] - [n\beta] = 2 \Rightarrow [(n+1)\beta] - [n\beta] = 1.$

Din P2$\Rightarrow \{n\beta\} > 1 - \beta \Rightarrow \{n\beta\} \in (1-\beta, 1).$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $x_\alpha \in (1-\alpha,1)$ și $x_\beta \in (1-\beta,1), \varepsilon > 0$ astfel încât:

$$(x_\alpha - \varepsilon, x_\alpha + \varepsilon) \subset (1-\alpha,1) \text{ și } (x_\beta - \varepsilon, x_\beta + \varepsilon) \subset (1-\beta,1).$$

Din teorema lui Kronecker rezultă:

Există o infinitate de $n = n_p$ pentru care $a(n_p) = 2$ și $b(n_p) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(n_p) = 4.$

Proprietăți:

$$[\alpha] \leq [(n+1)\alpha] - [n\alpha] \leq [\alpha] + 1, \qquad \alpha \in (0,1) \Rightarrow [\alpha] = 0$$

$$0 \leq [(n+1)\alpha] - [n\alpha] \leq 1 \Rightarrow ([(n+1)\alpha] - [n\alpha]) \in \{0,1\}.$$

P1:

$\alpha \in (0,1)$ –irațional.

$$[(n+1)\alpha] - [n\alpha] = 0 \Leftrightarrow \{n\alpha\} < 1 - \alpha.$$

Demonstrație:

$\alpha \in (0,1)$ –irațional$\Rightarrow \{n\alpha\} > 0$. Direct: $[(n+1)\alpha] - [n\alpha] = 0$

$$(n+1)\alpha - \{(n+1)\alpha\} - n\alpha + \{n\alpha\} = 0 \Rightarrow \{n\alpha\} = -\alpha + \{(n+1)\alpha\}$$

$$\{n\alpha\} = 1 - \alpha - (1 - \{n+1\}\alpha) < 1 - \alpha.$$

Reciproc: $\{n\alpha\} < 1 - \alpha$.

Presupunem $[(n+1)\alpha] - [n\alpha] \neq 0$. Rezultă $[(n+1)\alpha] - [n\alpha] = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{n\alpha\} > 1 - \alpha$ $(P2 - Direct)$, contradicție.

P2:

$\alpha \in (0,1)$ –irațional, $[(n+1)\alpha] - [n\alpha] = 1 \Leftrightarrow \{n\alpha\} > 1 - \alpha.$

Demonstrație:

$\alpha \in (0,1)$ –irațional$\Rightarrow 1 > \{n\alpha\} > 0.$

Direct: $[(n+1)\alpha] - [n\alpha] = 1$

$(n+1)\alpha - \{(n+1)\alpha\} - n\alpha + \{n\alpha\} = 1 \Rightarrow \{n\alpha\} =$

$= 1 - \alpha + \{(n+1)\alpha\} > 1 - \alpha.$

Reciproc: $\{n\alpha\} > 1 - \alpha$.

Presupunem $[(n+1)\alpha] - [n\alpha] \neq 1$. Rezultă $[(n+1)\alpha] - [n\alpha] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{n\alpha\} < 1 - \alpha$ $(P1 - Direct)$, contradicție.

Teoreme:

Teorema lui Dirichlet:

Dacă $\alpha \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n > 0$ există $p, q \in \mathbb{Z}, 1 \leq q \leq n$ pentru care:

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{n}.$$

Consecință (Liouville):

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{q} \text{ implică: } |q\alpha - p| < \frac{1}{p} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

are o infinitate de soluții relativ prime $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, (p,q) = 1.$

Teorema lui Dirichlet (versiunea simultană):

Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \notin \mathbb{Q}$ atunci:

Scanned with OKEN Scanner

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{k}}} \quad (i = 1,2,\dots,k)$$

$$|q\alpha_i - p_i| < \frac{1}{q^{\frac{1}{k}}} \quad (i = 1,2,\dots,k)$$

are o infinitate de soluții $p_i, q \in \mathbb{Z}, q > 0$.

Teorema lui Kronecker:

(Varianta Hardy&Wright – una dintre formulări)

Definiție:

Setul de numere $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ este linear independent dacă:

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_r\xi_r = 0 \ (a_i \in \mathbb{Q} \Rightarrow a_i = 0 \ \ (i = 1, \dots, r).$$

Teorema (Kronecker)

Dacă $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_k, 1$ sunt linear independente. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ arbitrare și $N > 0, \varepsilon > 0$.

Atunci există $n \in \mathbb{Z}, n > N, p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{Z}$ astfel încât orice $m = 1, \dots, k$:

$$|n\vartheta_m - p_m - \alpha_m| < \varepsilon.$$

Teorema (Kronecker)

Dacă $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_k, 1$ sunt linear independente.

Atunci: $S = \{\{n\vartheta_1\}, \{n\vartheta_2\}, \dots, \{n\vartheta_k\} | n \in \mathbb{N}\}$ este densa în hipercubul unitate.

Adică: $\forall\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in (0,1)$ există subșir natural $\{n_p\} \in \mathbb{N}$ pentru care:

$$\lim_{n_p \to \infty} \{n_p\vartheta_m\} = \alpha_m \quad (\forall\, m = 1, \dots, k).$$

Caz particular:

$\alpha \in (0,1)$ –irațional⇒ $\{n\alpha\}$ densa în $[0,1]$.

Probleme propuse

Problema 3

Să se arate că: $\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] = n - \left[\frac{n}{2}\right]$.

Problema 4

Să se demonstreze că n este prim dacă și numai dacă:

a) $\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]+1} \left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right) = 1$; b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right) = 2$.

Paragraful 8 se datorează lui Ion Vizireanu – S.U.A. (fost olimpic al Colegiului Național „Mircea cel Bătrân" Constanța).

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Dumitru Acu – *Aritmetica și teoria numerelor*, Editura Universității „Lucian Blaga", 1999;
2. N. Agahanov, O. Padlipsky – *Olimpiade matematice rusești – Moscova 1993-2002*, Editura GIL, 2004;
3. Toma Albu, Ion D. Ion – *Complemente de algebră*, Editura Academiei, 1984;
4. Ștefan Alexe, Marin Chirciu – *Algebră clasa a IX-a*, Editura Paralela 45, 2005;
5. Titu Andreescu, Marius Ghergu, Dinu Șerbănescu, Gabriel Popa, A. Zaharia, Gheorghe Andrei, I. Chesca, A. Ghioca, Lucian Dragomir – *Olimpiade de matematică*, Editura GIL, 2004;
6. Titu Andreescu, Cosmin Pohoața – *Editors Mathematical Reflections*, 2008-2013;
7. Titu Andreescu, Dorin Andrica – *360 de probleme de matematică pentru concursuri*, Editura GIL, 2002;
8. Titu Andreescu, Zuming Feng – *Mathematical Olimpiads*, 1998-1999;
9. Gheorghe Andrei – *Radicali*, Editura Ex Ponto, 2005;
10. Gheorghe Andrei – *Șiruri și progresii*, Editura Paralela 45, 2002;
11. Gheorghe Andrei, Constantin Caragea, Ion Cucurezeanu, Gheorghe Bordea – *Probleme de algebră pentru concursurile și olimpiadele școlare clasa a IX-a*, Editura Didactică și Pedagogică, 1993;
12. Gheorghe Andrei, Constantin Caragea – *Probleme alese de matematică*, Editura GIL, 1999;
13. Gheorghe Andrei, Ion Cucurezeanu, Constantin Caragea – *Probleme de algebră (Funcțiile partea întreagă, partea fracționară)*, Editura GIL, 1996;
14. Marian Andronache, Nicolae Ghiciu, Ion Savu – *Algebra vol. I, clasa a IX-a*, Editura Aritmas, 2000;
15. Marius Andronache, Marcel Chiriță, Teodor Dănel, Mircea Fianu, Vulpescu Jatea, D.M. Bătinețu-Giurgiu – *Buletin Matematic*, I.S. București, 1990;
16. Marian Andronache, Marcel Țena, Dinu Șerbănescu, Gheorghe Andrei, C. Chiteș, Valentin Vornicu – *Olimpiade de matematică clasele IX-X, 2003*, Editura GIL, 2004;

Scanned with OKEN Scanner

68. Vasile, Pop, Viorel Lupşor, Gh. Lobonţ, Eugen Jecan – *Matematica pentru grupele de performanţă – clasa a IX-a*, Editura Dacia Educaţional, Cluj, 2004;
69. Dragoş Popescu, George Oboroceanu – *Exerciţii şi probleme de algebră, combinatorică şi teoria numerelor*, Editura Pedagogică, 1979;
70. Florea Puican, Vasile Gorgota, Nicolae Pavelescu – *Olimpiade şi concursuri Vâlcene 1990-2000*, Editura Paralela 45, 2000;
71. Viorel Radu – *Teme şi probleme de matematică pentru concursul „Traian Lalescu"*, Editura Mirton, 1999;
72. David A. Santos – *Number Theory for Mathematical contests*, 2005;
73. Ion Savu, Sorin Rădulescu, D. Şt. Marinescu, M. Prajea, C. Chiteş etc. – *Probleme pregătitoare pentru olimpiadele şcolare*, Editura Art, 2006;
74. Traian Tămâian – *Matematica – probleme pentru examene şi concursuri şcolare*, Editura Paralela 45, 2008;
75. Valentin Vornicu – *Olimpiade de matematică*, Editura GIL, 2003;
76. Romeo Zamfir, Vasile Popa, Oana Mădălina Jagîte – *Concursul interjudeţean „Cristian Calude" 2000-2006*, Editura Sinteze, 2007.

Alte publicaţii

1. *Gazeta Matematică* (Seria A, B) (SSM);
2. *Didactica matematica* (SSM);
3. *R.M.T.*;
4. *R.M.C.S.*;
5. *Recreaţii matematice*;
6. Revista *Argument*;
7. Revista – *Galaţi*;
8. Revista *Arhimede*;
9. Revista *Cardinal*;
10. *A.M.M.*;
11. *Crux Mathematicorum*;
12. *Kvant*;
13. *Matematica v scole*;
14. *400 de probleme din A.M.M.*, Editura MIR Moscova;
15. *Seria de culegeri de probleme anuale, olimpiade şcolare, locale, judeţene şi naţionale din România*, Editura Paralela 45;
16. *Romanian Mathematical Competitions R.M.C. 2005-2017 (S.S.M.)*, coordonator Radu Gologan;
17. Seria de cărţi *Reflections*, coordonator Titu Andreescu;
18. Seria de cărţi *Octogon*, coordonator Mihaly Bencze.

Scanned with OKEN Scanner

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesaţi **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Scanned with OKEN Scanner

Profesorii Andrei şi Caragea sunt renumiţi azi şi prin numărul însemnat de culegeri de probleme apărute în ultimii patruzeci de ani, dar şi prin probleme propuse la etapele olimpiadelor româneşti.

Culegerea de faţă este dedicată unui subiect important în toate domeniile matematicii: partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr. De această noţiune sunt legate importante probleme, unele încă deschise, din teoria numerelor, algebră, analiză matematică.

Cele nouăsprezece capitole ale cărţii fac o trecere prin toate domeniile matematicii unde apare noţiunea de parte întreagă sau parte fracţionară. Acestea conţin peste 1700 de probleme, prezentate gradat şi având, în fiecare capitol, un preambul teoretic complet.

O recomand cu mare căldură elevilor care nu neglijează matematica, dar, în primul rând, profesorilor de matematică din gimnaziu şi liceu. Vor găsi suficient material spre a delecta minţile deschise ale copiilor.

Prof. univ. dr. Radu Gologan,
Preşedintele Societăţii de Ştiinţe Matematice
din România

ÎNVĂŢARE DE EXCELENŢĂ
supersucces®

ISBN 978-973-47-2693-6
Vol. II ISBN 978-973-47-2695-0

Preţ cu TVA: 40 LEI

Scanned with OKEN Scanner